

מערכות ליניאריות

פרופ' ז. פלמור

יולי 1989

המקצוע מערכות ליניאריות הוכנס כקורס חובה בלמודי הסמכה של הפקולטה להנדסת מכונות בשנת תשמ"ב. זהו מקצוע יסודי שמטרתו להקנות מושגים, כלים ויסודות מתמטיים המאפשרים לנתח באופן שיטתי את התכונות והתגובות של מערכות דינמיות ליניאריות. המקצוע מהווה קורס שירות למקצועות כמו דינמיקה, תנודות ובקרה. יחודו של המקצוע הוא בהצגת גישות לטיפול במערכת הכוללת. מערכת זו עשויה להיות מורכבת ממספר יחידות דינמיות. גישות אלו מתאימות למערכות משטחי מדע והנדסה שונים.

בספרות הענפה הקימת בנושא המערכות, מוצג הנושא מזווית ראייה והדגשים של דיסציפלינות אחרות, ובדרך כלל כחלק בלתי נפרד ממערכות משוב.

הסרתו של ספר לימוד מתאים מקשה על הלומדים ב"עכול" החומר. עובדה זו הביאה את מורי המקצוע להפצת חומר ההרצאות בסמסטרים הראשונים לנתינתו. חלקו הראשון של הקורס (פרקים 5 - 1) הוצא כחוברת א' בספטמבר 1982 וחלקו השני של הקורס (פרקים 9 - 6) הוצא כחוברת ב' במרץ 1983. מאז עבר הקורס מערכות ליניאריות שינויים ועדכונים. כתוצאה מכך נכתבה חוברת א' מחדש (אוקטובר 1988). גם פרקים 9 - 6 נכתבו מחדש ועודכנו ונכללים בחוברת זו. לחוברת זו הוכנס פרק נוסף (פרק 10) אשר החל משנת הלימודים תשמ"ט כלול בחומר הלימוד ב"מערכות ליניאריות" עקב השינוי ב"מעמדו" של המקצוע "תנודות".

החוברת הנוכחית כוללת את הפרקים 10 - 1 בצורה ובהיקף כפי שניתנו בהרצאותי בשנתיים האחרונות.

ינוני 1989

ז. פלמור

(*) תיקוני דפוס (פברואר 1993).

תוכן

עמוד

1	פרק 1 : מערכות - תכונות ומודלים מתמטיים
1	1.1 מבוא
1	1.2 אותות
2	1.3 מערכות - תכונות
10	1.4 מודלים מתמטיים של מערכות פשוטות
30	פרק 2 : מטריצות ומרחבים וקטוריים ליניאריים (רענון)
30	2.1 דטרמיננטים ומטריצות
32	2.2 מרחב וקטורי ליניארי
35	2.3 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים
39	2.4 טרנספורמציה סימילרית
40	2.5 לכסון המטריצה A
41	2.6 וקטורים עצמיים מוכללים - תבנית גזרדן
47	פרק 3 : מרחב המצב (תאור פנימי של מערכות)
47	I מערכות רציפות (3.1 - 3.5)
61	II מערכות בדידות (3.6 - 3.10)
64	3.11-3.12 טרנספורמציות ליניאריות של מימושים
67	3.13 קבלת מימושים מלוקסנים
68	3.14 לכסון עם ע"ע-ים מורכבים
69	3.15 מציאת שווי-משקל במערכות ליניאריות סטציונריות
71	3.16 ליניאריזציה סביב נקודות שווי-משקל
83	פרק 4 : פולינומים ופונקציות של מטריצות
83	4.1 פולינומים מטריצתיים
	4.2 חישוב פתקציה של מטריצה
87	4.3 המטריצה e^{At}
96	פרק 5 : פתרון משוואות המצב בציר הזמן
	א. מערכות רציפות
96	5.1 מערכת סטציונרית חפשית (פתרון הומוגני)
97	5.2 מערכת סטציונרית מאולצת (פתרון כללי)
101	5.3 אופני תנועה (מודים) של מערכת

תוכן (המשך)

עמוד

106	5.4 תגובת ההלם של מערכת
109	5.5 מציאת x_0
112	5.6 פתרון משוואות המצב - מערכת תלויה בזמן
	ב. מערכות בדידות
113	5.7 מערכת סטציונרית
120	5.8 פתרון משוואות המצב - מערכת תלויה בזמן
121	5.9 מציאת x_0
122	5.10 מערכת בדידה אקוילנטית - מערכות דגומות
129	פרק 6 : פתרון משוואות המצב באמצעות התמרות
129	6.1 התמרת לפלס
140	6.2 פתרון משוואות המצב באמצעות התמרת-לפלס (מערכות רציפות)
147	6.3 התמרת z
156	6.4 פתרון משוואות המצב הבדידות באמצעות התמרת z
161	6.5 התמרת פוריה
164	6.6 טבלת התמרות לפלס ו- z (חד-צדדיות)
165	פרק 7 : אינטגרל (סכום) הקונבולוציה ; מטריצות תמסורת
165	7.1 מבוא
165	7.2 אינטגרל הקונבולוציה
167	7.3 סכום הקונבולוציה
168	7.4 מטריצות תמסורת
170	7.5 קבלת מטריצת תמסורת ממימוש נתון
171	7.6 חיבור טורי של שתי מערכות (ללא השפעה הדדית)
175	7.7 תבור מערכות במקביל
176	7.8 דוגמאות
181	7.9 חיבור משווי
182	7.10 פונקציות תמסורת ותגובות של מערכות SISO מסדר ראשון ושני

תוכן (המשך)

עמוד

187	פרק 8 : יציבות מערכות
187	8.1 מערכות רציפות
198	8.2 מערכות בדידות
202	8.3 דוגמא
205	8.4 שמוש במשפטי הערך הסופי
206	פרק 9 : תגובת התדירות
206	9.1 מערכות רציפות
212	9.2 תאורים גרפיים של תגובת תדירות
231	9.3 מערכות בדידות
237	פרק 10 : אנליזה מודלית - מושגים בתורת הרסט
237	10.1 מבוא
237	10.2 דוגמת מבוא - מערכת מכנית עם שלוש דרגות חופש
238	10.3 תכונות K ו-M
239	10.4 ערכים וקטוריים עצמיים במערכת חופשית לא מרוסנת
242	10.5 טרנספורמציה לקואורדינטות טבעיות
243	10.6 תגובה לתנאי התחלה
247	10.7 הצגת מערכות רוטטות במרחב המצב
248	10.8 תהודה במערכות רוטטות ללא רסון

פרק 1 : מערכות - תכונות ומודלים מתמטיים

1.1 מבוא

קורס זה עוסק בהגדרת מושגים ובפתוח כלים לניתוחן ולהבנתן של מערכות דינמיות פיזיקליות ואחרות. מערכות דינמיות מופיעות במגוון רחב מאד של שטחים. המושגים, הרעיונות והכלים שנפתח בקורס זה משחקים תפקיד חשוב ביותר בשטחי המדע והטכנולוגיה השונים כמו במכונות, דינמיקה, רובוטיקה, תהליכי יצירת אנרגיה, בבקרת תהליכים כימיים, באירונטיקה, בתהליכים ביולוגיים, בתקשורת, בעבוד אותות, בנהוג טילים וכו'.

למרות שהמערכות בשטחי ההנדסה והטכנולוגיה השונים שונות לחלוטין, ניתן להציג בצורה אחידה וכללית. לכל המערכות תכונה אחת משותפת - כל מערכת מגיבה לאותות כניסה (שמות נרדפים: סיגלי כניסה, משתני כניסה ובקצור פניסות (inputs)) ומיצרת אותות יציאה (שמות נרדפים: תגובות, סיגלי יציאה, משתני יציאה ובקצור יציאות (outputs)).

אות הוא פונקציה של משתנה (או מספר משתנים) בלתי תלוי ובדרך כלל מכיל אינפורמציה על התנהגות תופעה פיזיקלית מסוימת.

את המושגים הבסיסיים הנ"ל ניתן להדגים בדוגמה הפשוטה הבאה: נהג הנוהג במכונית ולוחץ על דוושת הדלק גורם למכונית להגביר מהירותה. בדוגמה זו, המכונית היא המערכת, הלחיצה על דוושת הדלק (כפונקציה של הזמן) היא הכניסה, ואילו מהירותה של המכונית היא היציאה.

במסגרת הקורס אנו נציג ונפתח שיטות לניתוחן הן של מערכות רציפות והן של מערכות בדידות. בעבר, עקב השימושים השונים של מערכות רציפות ובדידות, נלמדו ופותחו מערכות אלו בנפרד. ההתפתחות האדירה של מחשבים מהירים בעשורים האחרונים הביאה לשמושים הולכים ורבים בהם משולבות מערכות רציפות ובדידות יחדיו. הדמיון הרב בכלים המטפלים בשני סוגי המערכות והשימוש הגובר והולך בשלובן בישומים הנדסיים מביאים באופן טבעי לצורך ללמד ולהכיר את שני סוגי המערכות ואת הכלים המשמשים לניתוחן ולתכנון.

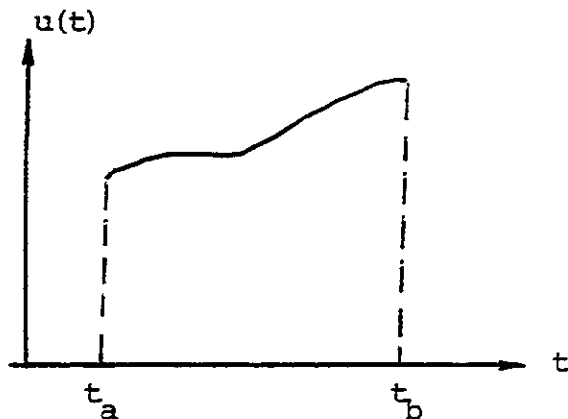
במסגרת הקורס, אנו נעסוק במקביל בשני סוגי המערכות.

1.2 אותות

1.2.1 כללית, מתאר אות את השתנותה של תופעה פיזיקלית. מתמטית מתוארים אותות כפונקציה של משתנה או משתנים בלתי תלויים. השתנות הלחץ הברומטרי כפונקציה של הגובה; השתנות מהירות הרוחות עם המרחק מפני כדור הארץ או המהירות, כפונקציה של הזמן, של המסה במערכת מכנית הכללת מסה קפיץ ומרסן - הן דוגמאות של אותות.

בקורס זה יהיו האותות פונקציה של משתנה בלתי תלוי יחיד. בדרך כלל יהיה זה הזמן, t , עבור מערכות רציפות או הזמן הבדיד: t_i (או nT) במערכות בדידות.

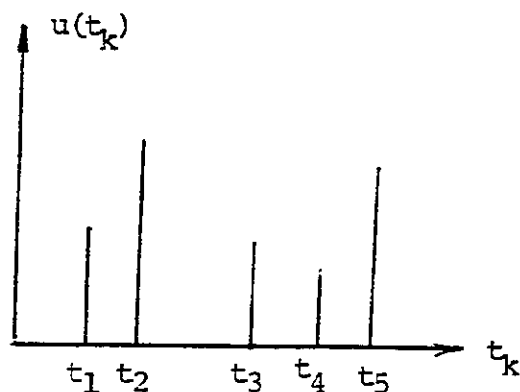
12.2 קימים שני סוגים בסיסיים של אותות - אותות רציפים ואותות בדידים (דיסקרטיים). באות רציף המשתנה הבלתי תלוי הינו רציף והאות מוגדר עבור כל ערכי המשתנה הבלתי תלוי לפחות בתחום מסוים.



בציור 1.1 מוצגת אות רציף u כפונקציה של המשתנה הבלתי תלוי t . u מוגדר עבור כל ערך של t בתחום $t_a < t < t_b$.

ציור 1.1

אות בדיד הוא אות המוגדר רק בערכים בדידים של המשתנה הבלתי תלוי. המשתנה הבלתי תלוי מקבל אך ורק ערכים בדידים.



בציור 1.2 מתואר אות בדיד $u(t_k)$, האות מוגדר רק בערכים הבדידים t_k . מיד המחירים לצורך המתפרסם פעם בחדש הוא דוגמה לאות בדיד. למדד המחירים אין ערך בכל רגע אלא פעם בחדש.

ציור 1.2

13 מערכות

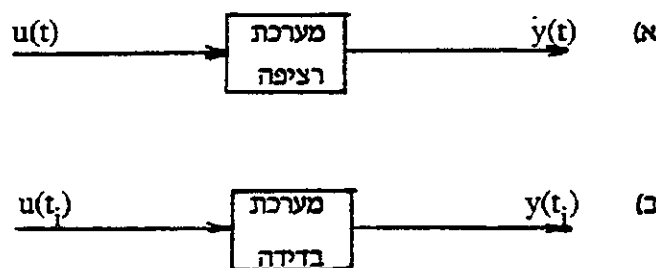
13.1 על מערכת דינמית ניתן להביט כתהליך המבצע טרנספורמציה של אותות. למערכת, לכן, כניסות ויציאות הקשורות באמצעות המערכת.

132 מערכת בה כניסות רציפות מיצרות יציאות רציפות תקרא מערכת רציפה. מערכת בה כניסות בדידות מיצרות יציאות בדידות תקרא מערכת בדידה.

133 מערכת רציפה, בעלת כניסה אחת, $u(t)$, ויציאה אחת, $y(t)$, תסומן סכמטית כבציור 1.3 א' ומערכת בדידה בעלת כניסה אחת, $u(t_i)$, ויציאה אחת, $y(t_i)$, תסומן סכמטית כבציור 1.3 ב'. t הוא המשתנה הרציף הבלתי תלוי במערכת הרציפה ו- t_i הוא המשתנה הבדיד הבלתי תלוי במערכת הבדידה. סימון מקביל, אקוילנטי, במערכות בדידות הוא u_i במקום $u(t_i)$ וכאשר האינטרבליים $t_{i+1}-t_i$ קבועים כך ש-

$$(1.1) \quad t_{i+1} - t_i = T \quad -\infty < i < \infty$$

נהוג לסמן $u(iT)$ במקום u_i (או $u(t_i)$).



ציור 1.3

134 מערכת בעלת כניסה אחת ויציאה אחת תקרא להלן מערכת SISO (Single Input - Single Output) ומערכת מרובת כניסות ויציאות תקרא להלן מערכת MIMO (Multi-Input - Multi-Output). במערכת MIMO אין מספר היציאות זהה בהכרח למספר הכניסות.

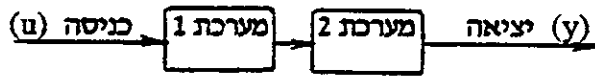
135 חבור מערכות

על ידי חבורן של מערכות קימות ניתן לקבל מערכות חדשות מורכבות ולהפך, הבנת נושא החבור מאפשרת לנו לנתח מערכת מורכבת על ידי פרוקה לרכיביה הפשוטים יותר. קיימים מספר חבורים יסודיים:

א. תבור טורי.

התבור הטורי של שתי מערכות מתואר

בציור 14. היציאה ממערכת 1 משמשת



כניסה למערכת 2. באופן דומה ניתן לחבר

סורית שלוש או יותר מערכות.

ציור 14

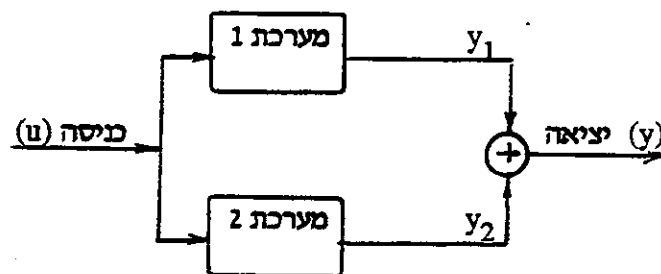
הערה: ציור מסוג ציור 14 נקרא דיאגרמת

בלוקים.

ב. תבור מקבילי

דיאגרמת בלוקים של תבור מקבילי של שתי מערכות מתוארת בציור 15. לשתי המערכות אותה כניסה

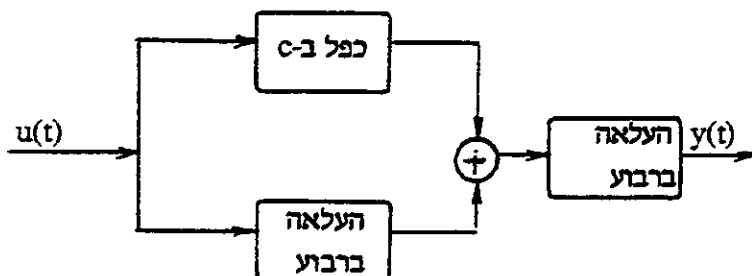
והיציאותיהן של המערכות מסוכמות על ידי המסכם ונותנות את היציאה y ($y = y_1 + y_2$).



ציור 15

דוגמא: בציור 16 מתוארת מערכת המבצעת פעולה אריתמטית מורכבת יחסית על ידי תבור מערכות

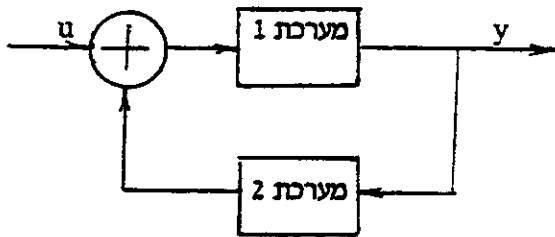
המבצעות פעולות אלגבריות פשוטות.



ציור 16

היציאה $y(t)$ בציר 16 נתונה על ידי: $y(t) = (c u(t) + u(t)^2)^2$

ג. חבור משובי



חבור משובי מתואר בציר 17. יציאת

מערכת 1 משמשת ככניסה למערכת 2.

יציאת מערכת 2 יחד עם הכניסה החיצונית,

u , מהוות כניסה למערכת 1. חבור משובי

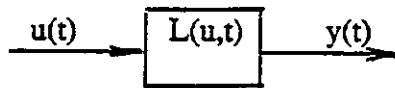
הוא אבן יסוד במערכות בקרה.

ציר 17

על משמעותם של החיבורים והכלים לטיפול בהם נדון בפרקים מאוחרים יותר.

13.6 תכונות בסיסיות של מערכות

את פעולת המערכת על הכניסה u ליצירת היציאה y נסמן על ידי האופרטור L (ראה ציר 18). כך ש:



$$(1.2) \quad y(t) = L(u, t)$$

ציר 18

נגדיר להלן מספר תכונות בסיסיות של מערכות.

13.6.1 ליניאריות

הגדרה: מערכת (רציפה או בדידה) תקרא מערכת ליניארית באם היא מקימת את תנאי ההומוגניות

ותנאי הסופרפוזיציה.

תנאי ההומוגניות:

אם יציאת (תגובת) המערכת לכניסה u_1 היא $y_1 = L(u_1)$ אזי המערכת מקימת את

תנאי ההומוגניות אם יציאתה y_2 לכניסה $u_2 = \alpha u_1$, היא $y_2 = L(u_2) = \alpha y_1$ לכל הכניסות u_1

ולכל הקבועים α .

תנאי הסופרפוזיציה:

אם y_1 היא יציאת המערכת לכניסה u_1 ($y_1 = L(u_1)$)

ואם y_2 היא יציאת המערכת לכניסה u_2 ($y_2 = L(u_2)$)

אזי המערכת מקימת את תנאי הסופרפוזיציה באם יציאתה y לכניסה $u = u_1 + u_2$

תהיה $y = L(u = u_1 + u_2) = y_1 + y_2$ לכל u_1 ו- u_2 .

בבדיקת הליניאריות של מערכת ניתן לתבר את שני התנאים ולהשתמש בהמדרה הבאה: מערכת

תקרא ליניארית באם הכניסה המשוקללת $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ מיצרת יציאה y הנתונה על ידי:

$$y = L(u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \quad (1.3)$$

עבור כל הכניסות u_1 ו- u_2 וכל הקבועים α_1 ו- α_2 כאשר y_i היא יציאת המערכת לכניסה u_i

$$i = 1, 2 \quad (y_i = L(u_i))$$

13.62 דוגמאות:

(1) נתונה המערכת הרציפה הבאה $y(t) = t \dot{u}(t)$. ($\dot{u}$ היא סמון מקובל ל- $du(t)/dt$). נשתמש

בתנאי (1.3) ונבדוק האם המערכת ליניארית.

עבור $u_1(t)$ נקבל: $y_1(t) = t \dot{u}_1(t)$

ועבור $u_2(t)$ נקבל: $y_2(t) = t \dot{u}_2(t)$

נבדוק עתה באם המערכת הנ"ל מקימת עבור הכניסה $u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)$ את תנאי

$$(1.3):$$

$$y(t) = \dot{u}(t) = t \frac{d}{dt} (\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)) = \alpha_1 \dot{u}_1 + \alpha_2 t \dot{u}_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

מסקנה: המערכת ליניארית.

$$(2) \quad \text{נתונה המערכת הרציפה: } y(t) = u(t) \dot{u}(t) \text{ . האם זו מערכת ליניארית?}$$

$$u_i \text{ (} i = 1, 2 \text{) מוצר } y_i(t) = u_i(t) \dot{u}_i(t) \text{ . עבור } u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \text{ נקבל:}$$

$$y(t) = u(t) \dot{u}(t) = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)(\alpha_1 \dot{u}_1 + \alpha_2 \dot{u}_2) \neq \alpha_1 u_1 \dot{u}_1 + \alpha_2 u_2 \dot{u}_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

מסקנה: המערכת אינר ליניארית.

$$(3) \quad \text{נתונה המערכת הדיסקרטית } y(n) = u(n)^2$$

$$y_i(n) = u_i(n)^2 \quad (i = 1, 2) \text{ כדוגמאות הקודמות נכתוב:}$$

$$\text{ועבור } u(n) = \alpha_1 u_1(n) + \alpha_2 u_2(n) \text{ נקבל:}$$

$$y(n) = u(n)^2 = (\alpha_1 u_1(n) + \alpha_2 u_2(n))^2 \neq \alpha_1 u_1(n)^2 + \alpha_2 u_2(n)^2 = \alpha_1 y_1(n) + \alpha_2 y_2(n)$$

מסקנה: המערכת אינר ליניארית.

$$(4) \quad \text{נתונה מערכת באמצעות המשוואה הדיפרנציאלית הבאה: } \dot{y}(t) + y(t)^{1/2} = u(t)$$

נראה שזו אינה מערכת ליניארית:

$$i = 1, 2 \quad \text{עבור } u_i \text{ נקבל } \dot{y}_i + y_i^{1/2} = u_i$$

$$\text{ועבור } u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \text{ נקבל}$$

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \alpha_1 (\dot{y}_1 + y_1^{1/2}) + \alpha_2 (\dot{y}_2 + y_2^{1/2}) = \\ &= (\alpha_1 \dot{y}_1 + \alpha_2 \dot{y}_2) + \alpha_1 y_1^{1/2} + \alpha_2 y_2^{1/2} \neq \dot{y} + y^{1/2} = \\ &= (\alpha_1 \dot{y}_1 + \alpha_2 \dot{y}_2) + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)^{1/2} \end{aligned}$$

13.63 סטציונריות (אי תלות בזמן)

כללית, מערכת עם תנאי התחלה 0 או מערכת במנוחה היא מערכת סטציונרית אם ורק אם צורת תגובתה, y , לכניסה u תלויה רק בצורת הכניסה ולא בזמן שהכניסה מופעלת.

הצורה: מערכת עם תנאי התחלה 0 תקרא מערכת סטציונרית אם ורק אם עבור כל כניסה

$u(t)$ (או $u(nT)$ עבור מערכות בדידות) וכל הזזות הזמן λ (או kT) תגובתה לכניסה המוזזת,

$u(t-\lambda)$, $(u(nT-kT))$, היא כתגובתה לכניסה $u(t)$ $u(nT)$ מוזזת בשעור λ (kT) .

$$(1.4) \quad y(t) = L(u(t), t) \quad \text{אם} \quad \text{מתמטית:}$$

$$(1.5) \quad L(u(t-\lambda), t) = y(t-\lambda) \quad \text{ואם}$$

אזי המערכת סטציונרית.

ועבור מערכת בדידה:

$$(1.6) \quad y(nT) = L(u(nT), nT) \quad \text{אם:}$$

$$(1.7) \quad L(u(nT-kT), nT) = y(nT-kT) \quad \text{ואם}$$

אזי המערכת סטציונרית.

13.4.4 דוגמאות

(1) נתונה המערכת $y(t) = L(u, t) = \dot{u}(t)$. האם היא סטציונרית?

נפעיל את תנאי (1.5):

$$L(u(t-\lambda), t) = t \dot{u}(t-\lambda) \neq y(t-\lambda) = (t-\lambda) \dot{u}(t-\lambda)$$

מסקנה: המערכת אינה סטציונרית (אך ליניארית כפי שהוכחנו בדוגמה קודמת).

$$2 \quad \text{נתונה המערכת } y(t) = L(u(t)) = u(t) \dot{u}(t)$$

$$L(u(t - \lambda)) = u(t - \lambda) \dot{u}(t - \lambda) = y(t - \lambda)$$

מסקנה: המערכת סטציונרית (אך אינה ליניארית כפי שהוכחנו קודם).

1.3.65 הערות:

1) תכונת הסטציונריות אינה קשורה לתכונת הליניאריות כפי שניתן לראות בדוגמאות הנ"ל.

מערכת עשויה להיות ליניארית ולא סטציונרית, ליניארית וסטציונרית ולהיפך.

2) מדוגמאות הליניאריות והסטציונריות ניתן להסיק כי מערכת הנתונה באמצעות משוואה

דיפרנציאלית מהסוג :

$$(1.8) \quad \sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t)$$

כאשר :

$$x^{(i)} \triangleq \frac{d^i x}{dt^i}$$

תהיה מערכת ליניארית, אם המקדמים a_i ו- b_j אינם כוללים את $y(t)$ ו/או $u(t)$ (בחזקה

כלשהיא שונה מ-0) ו/או את נגזרותיהם. מערכת (1.8) תהיה סטציונרית אם המקדמים a_i ו- b_j

אינם תלויים בזמן t במפורש.

1.3.66 סיבתיות (קוזאליזם)

מערכת תקרא סיבתית אם יציאתה בכל זמן אינה תלויה בערכים עתידיים של הכניסה.

המערכת הבדידה: $y(n) = u(n+1)$ אינה סיבתית. גם המערכת הרציפה $y(t) = \dot{u}(t)$, למשל,

אינה סיבתית שכן גזירת $u(t)$ דורשת ידיעת ערכים עתידיים של $u(t+\Delta t) - u$.

למרות שמערכות פיזיקליות הינן סיבתיות קימת משפחה ענפה של מערכות שאינן סבתיות. למשל

מערכת בדידה שערכי כניסתה, $u(n)$, נרשמו עבור $0 \leq n \leq \infty$, ויציאתה מוגדרת כממוצע

המשוקלל הבא:

$$y(n) = \frac{1}{2k+1} \sum_{j=-k}^k u(n-j)$$

אינה סיבתית שכן $y(n)$ תלוי ב- $u(n+k)$. מערכות כאלו מופיעות לעיתים קרובות ביעבוד נתונים. גם המערכת $y(t) = u(t^2)$ אינה סיבתית עבוד כל $t > 1$. ניתן גם לקבל מערכות לא סיבתיות מתבונן מערכות סיבתיות.

13.6.7 סטטיות

מערכת תקרא סטטית (או מערכת ללא זכרון) אם יציאתה בכל ערך של המשתנה הבלתי תלוי (הזמן למשל) תלויה אך ורק בכניסה באותו ערך של המשתנה הבלתי תלוי. המערכת $y(t) = (cu(t) - u^2(t))^2$ היא מערכת סטטית. לעומת זאת המערכת

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

הינה מערכת דינמית (לא סטטית) או מערכת עם זכרון.

14 מודלים מתמטיים של מערכות פשוטות

14.1 נתון אנליטי או תיכון מוצלח של מערכת מתחיל בכתיבת מודל דינמי מתמטי של המערכת. כתיבת מודל דורשת הבנה טובה של התנהגות המערכת. לצורך כתיבת המודל אנו משתמשים בחוקים פיזיקליים ידועים כמו חוקי ניוטון, חוקי קירכהוף, חוקי השמור השונים וכו'. קימות מערכות בהן ה"חוקים" הפיזיקליים אינם ידועים או ידועים באופן חלקי. מערכות כאלו הן למשל מערכות אקולוגיות, סוציאליות, כלכליות וכו'. כתיבת מודלים מתמטיים במקרים אלו מבוצעת, בין השאר, באמצעות שיטות זיהוי המבוססות על תוצאות ניסויים. אין אנו לומדים כתיבת מודלים מפורטים בקורס זה. דבר זה נלמד בפרוט בקורסים השונים: פיזיקה, דינמיקה, תרמודינמיקה, זרימה, מעבר חום, חשמל, הידראוליקה, מנועים וכו'. נביא כאן דוגמאות פשוטות לקבלת מודלים של מערכות רציפות ובדידות פשוטות אשר נשתמש בהם בהמשך.

המודלים של מערכות רציפות שנטפל בהן יהיו מתוארים על ידי משוואות דיפרנציאליות (או אינטגרליות - דיפרנציאליות) הקושרות בין הכניסות והיציאות של המערכת ועם משתנה בלתי תלוי יחיד כמו הזמן למשל. מערכות כאלו נקראות מערכות עם פרמטרים מרוכזים (Lumped parameter systems) להבדיל ממערכות עם פרמטרים מפולגים (distributed parameter system), להן שניים או יותר משתנים בלתי תלויים ומתוארות על ידי משוואות דיפרנציאליות חלקיות. המערכות הבדירות כאן ותוארנה על ידי משוואות הפרשים עם משתנה בלתי תלוי אחד.

1.4.2 מערכות רציפות

1.4.2.1 מערכות מסדר I

א. מערכת תרמית - מדחום כספית

בציור 1.9 מתואר סכמטית מדחום כספית :

m - מסת הכספית (Kg)

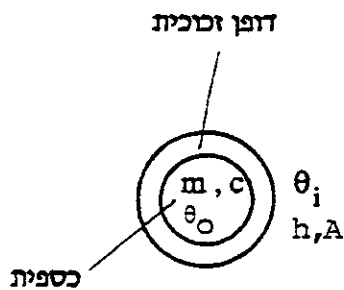
c - חום סגולי כספית ($Kcal/(Kgm \cdot ^\circ C)$)

θ_i - טמפרטורה נמדדת ($^\circ C$)

θ_o - טמפרטורה הכספית - הורית המדחום

h - מקדם מעבר החום ($Kcal/(m^2 \cdot sec \cdot ^\circ C)$)

A - שטח מעבר החום (m^2)



ציור 1.9

בהזנחת קבול החום של הזכוכית והתנגדות מעבר החום של הכספית נקבל:

$$(1.9) \quad hA(\theta_i(t) - \theta_o(t)) = mc\dot{\theta}_o(t)$$

(1.9) מבוטסת על מאזן חום:

ספיקת חום נכנסת - ספיקת חום יוצאת = קצב הצטברות חום.

את (1.9) נביא לצורה:

$$(1.10) \quad \tau \dot{\theta}_0 + \theta_0 = \theta_i$$

כאשר $\tau = mc/hA$. ל- τ מימדים של זמן והוא נקרא קבוע הזמן של המערכת.

$$(Dy = \frac{dy}{dt} ; \quad D^2y = \frac{d^2y}{dt^2}) \quad \text{אם נשתמש באופרטור } D \text{ לציון גזירה לפי הזמן}$$

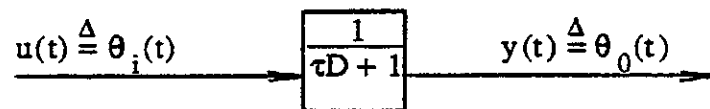
נוכל לכתוב את (1.10) בצורה:

$$(\tau D + 1)\theta_0 = \theta_i$$

או:

$$(1.11) \quad \theta_0 = \frac{1}{(\tau D + 1)} \theta_i$$

ציור הקשר (1.11) במתחים של ציור 1.3 יתן:



ציור 1.10

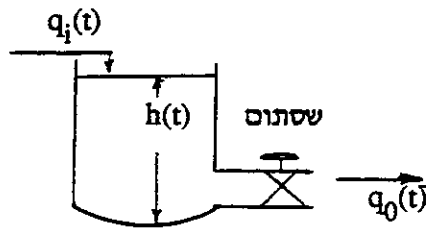
כך שהכניסה למערכת מוגדרת כ- θ_i ויציאתה כ- θ_0 .

ב. גובה נוזל במיכל

q_i - ספיקה נפחית נכנסת (m^3/hr)

q_0 - ספיקה נפחית עוזבת (m^3/hr)

h - גובה הנוזל במיכל (m)



ציור 1.11

A - שטח חתך המיכל (m^2)

ρ - צפיפות הנוזל (kg/m^3)

מאזן מסה: מסה נכנסת (ליחידת זמן) - מסה עוזבת (ליחידת זמן) = קצב הצטברות מסה במיכל . לכן אם שטח המיכל קבוע וצפיפות הנוזל קבועה נקבל:

$$(1.12) \quad \rho(q_i - q_o) = \frac{d}{dt} (\rho Ah)$$

או:

$$(1.13) \quad q_i - q_o = A\dot{h}$$

הספיקה q_o דרך השסתום נתונה על ידי:

$$(1.14) \quad q_o = c\sqrt{\Delta h}$$

(c - קבוע, Δh - הפרש העומדים בשני צידי השסתום). היות ובדוגמא זו הנוזל דרך השסתום זורם

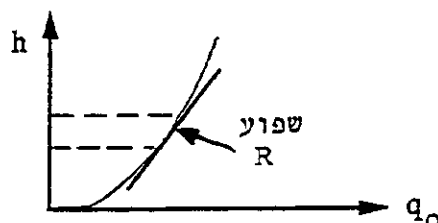
לאטמוספירה נוכל לכתוב $q_o = c\sqrt{h}$. נציב ב-(1.13) ונקבל:

$$(1.15) \quad A\dot{h} + c\sqrt{h} = q_i$$

משוואה (1.15) הינה משוואה לא-ליניארית. בתנאים מסוימים ניתן להפכה למשוואה ליניארית. בציור 1.12 נתון

הקשר (1.14). אם נניח כי שנויי גובה הנוזל במיכל הם בתחום מוגבל (ראה ציור) נוכל לקרב הפרבולה

באמצעות ישר בעל שפוע R. בתנאים אלו נקבל:



ציור 1.12

$$q_0 = \frac{h}{R}$$

(R נקרא התנגדות השסתום לזרימה).

ומשוואה (1.15) תתקבל כ-

$$A\dot{h} + \frac{h}{R} = q_i$$

או:

$$(1.16) \quad (RA)\dot{h} + h = Rq_i$$

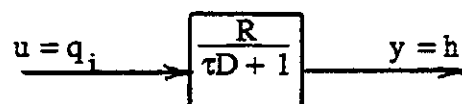
ל-RA מימדים של זמן ולכן נסמן $\tau = RA$ ועל די שמוש באופרטור D נקבל:

$$(1.16)' \quad (\tau D + 1) h = Rq_i$$

או

$$(1.17) \quad h = \frac{R}{\tau D + 1} q_i$$

הקשר כניסה יציאה של מערכת הנוזל במיכל נתון בציר 1.13.



ציר 1.13

בהנחת הליניאריות של השסתום קבלנו עבור המערכת הנ"ל משוואה דפרנציאלית מסדר I הדומה לזו

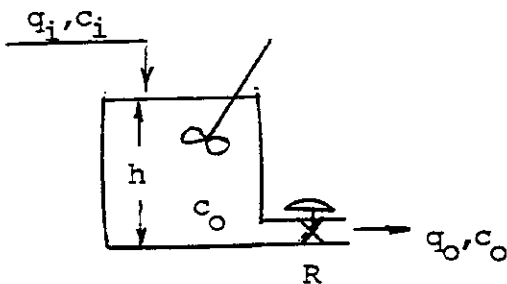
שהתקבלה עבור מדחום הכספית.

הערה: במידה ושטח חתך המיכל אינו קבוע ותלוי בגובה, דהיינו $A = f(h)$, תוחלף משוואה (1.12) על ידי:

$$(1.18) \quad q_i - q_0 = \frac{d}{dt} \int_0^h f(h) dh = f(h)\dot{h}$$

(1.18) הינה משוואה לא-ליניארית.

ג. רכוז במיכל בחוש היטב



נוזל המכיל חומר מסוים בריכוז $c_i(t)$ נכנס למיכל ויוצא ממנו ברכוז אחר $c_o(t)$. אנו מניחים שהנוזל במיכל בחוש היטב כך שרכוז החומר במיכל הוא $c_o(t)$. (אם לא ניתן להניח שרכוז החומר במיכל אחיד אלא תלוי במקום נקבל משוואה דפרנציאלית חלקית שכן c

ציור 1.14

במיכל יהיה תלוי בזמן ובמקום).

$q_i(q_o)$ - ספיקה נכנסת (יוצאת) (m^3/hr)

c_i - רכוז החומר בכניסה (Kgm/m^3)

c_o - רכוז החומר ביציאה (ובמיכל)

h - גובה הנוזל במיכל; A - שטח תתך המיכל; $V = Ah$ - נפח הנוזל במיכל.

אם נכתוב מאזן מסה עבור החומר נקבל:

$$(1.19) \quad c_i q_i - c_o q_o = \frac{d}{dt} (V \cdot c_o)$$

נניח כי $q_o = q_i = q = \text{constant}$ ואז V קבוע. (1.19) נתון:

$$c_i - c_o = \frac{V}{q} \dot{c}_o$$

$$(1.20) \quad \tau \dot{c}_o + c_o = c_i \quad \text{או}$$

כאשר $\tau = V/q$ - קבוע הזמן.

(1.20) היא משוואה דפרנציאלית מסדר I בדיוק במתכונת של (1.10) ולכן ציור 1.10 תופס גם כאן אלא ש-

$$y \triangleq c_o \quad u \triangleq c_i$$

הערה: אם $q_o \neq q_i$ אזי h אינו קבוע. משוואה (1.19) בהנחת ליניאריות השסתום נתן

$$(1.21) \quad c_i(t) q(t) - c_o(t) \frac{h(t)}{R} = Ah(t) c_o(t) + Ah(t) \dot{c}_o(t)$$

משוואה (1.21) הינה משוואה לא-ליניארית אשר יחד עם משוואת מאון החומר הכולל:

$$(1.22) \quad q_i - \frac{h}{R} = Ah$$

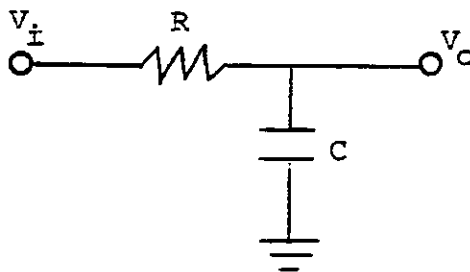
מתארת את המערכת במקרה הכללי יותר.

במקרה זה נוכל להציג המערכת כמערכת עם שתי כניסות ושתי יציאות כמתואר בציור 1.15.



ציור 1.15

כאשר המודל המתמטי של המערכת מורכב מ-(1.21) ו-(1.22).



ציור 1.16

ד. מעגל חשמלי (נגד - קבל).

R - התנגדות (Ohm)

C - קבל (Farad)

V - מתח (Volt)

i - זרם (Ampere)

q - מטען (Coulomb)

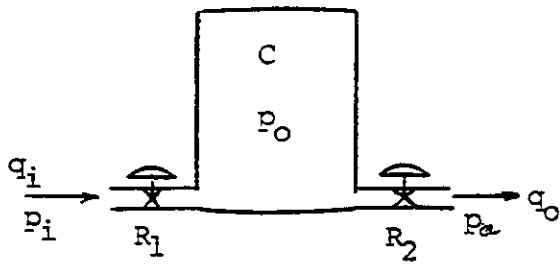
היות והמתח על פני הקבל נתון על ידי $V_o = q/C$ (או $\dot{q} = C\dot{V}_o$) ו- $i = \dot{q}$ נקבל מחוק קירקהוף:

$$(1.23) \quad RC\dot{V}_o + V_o = V_i$$

ואם נסמן $\tau = RC$ תהיה (1.23) בדיוק במתכונת (1.10) או (1.20) ותתואר סכמטית על ידי ציור (1.10)

$$\text{כאשר } u \triangleq V_i \text{ ו- } y \triangleq V_o$$

ה. מערכת לחץ פניאומטית



ציור 117

אוויר בלחץ p_i עובר דרך שסתום בעל התנגדות

R_1 לתוך מיכל. למיכל קבול פניאומטי C . לחץ האוויר

במיכל הינו p_o . האוויר במיכל משתחרר לאטמוספירה דרך

שסתום בעל התנגדות R_2 .

C - קבול פניאומטי ($m^3/(Kgf/m^2)$)

R - התנגדות ($(Kgf/m^2)/(m^3/sec.)$)

p - לחץ (Kgf/m^2) (p_a - לחץ אטמוספרי)

q - ספיקה ($m^3/sec.$)

הנחות: נניח C קבוע (C תלוי בלחץ. לכן נלקח בדרך כלל ערכו הממוצע בתחום לחצי העבודה). כמו כן נניח R

קבוע. הנחה זו נכונה כל עוד הזרימה למערכת. בתנאים אלו:

$$(1.24) \quad q = \frac{p_1 - p_2}{R}$$

כאשר $p_1 - p_2$ הפרש הלחצים על פני השסתום.

היות והלחצים נמדדים ביחס ללחץ האטמוספרי יהיה $p_a = 0$. מאזן ספיקות יתן:

$$(1.25) \quad C \dot{p}_o = q_i - q_o = \frac{p_i - p_o}{R_1} - \frac{p_o}{R_2}$$

$$(1.26) \quad \tau \dot{p}_o + p_o = K p_i \quad \text{או}$$

$$\tau = R_1 R_2 C / (R_1 + R_2) \quad \text{כאשר:}$$

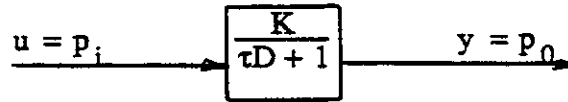
$$(1.27) \quad K = R_2 / (R_1 + R_2) \quad \text{ו-}$$

ובאמצעות האופרטור D נקבל:

$$(1.28) \quad P_o = \frac{K}{\tau D + 1} P_i$$

משואות (1.26) ו-(1.28) הן משואות מסדר I במתכונת זהה למערכות הקדמות. הקשר כניסה יציאה ניתן בציר

1.18



ציר 1.18

הערה: כאשר הזרימות הן בתחום הטורבולנטי הקשר בין הספיקה דרך השסתום ומפל הלחצים על פניו נתון על

די:

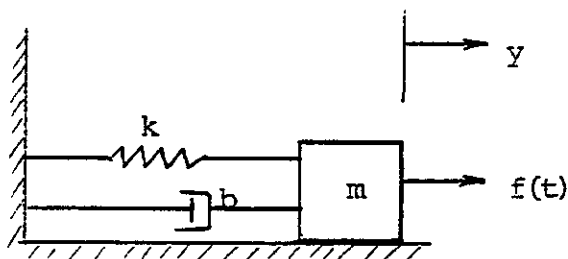
$$(1.29) \quad q = c\sqrt{\Delta P}$$

בתנאים אלו נקבל מערכת לא-ליניארית. במדה ותחום שני הלחצים קטן יחסית ניתן לקבל קשר ליניארי על

די קרוב (1.29) בצורה דומה לזו שבסעיף ב.

14.22 מערכות מסדר II

1. מערכת מכנית קוית



במערכת המכנית הנתונה בציר 1.19 מסה

קפיץ ומרסן. בהעדר חכוך בין המסה והמשטח

האפקי תתקבל המשואה הדיפרנציאלית הבאה

מהחוק השני של ניוטון:

ציר 1.19

$$(1.30) \quad m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = f(t)$$

כאשר:

m - מסה (Kgm)

b - קבוע המרסן (מקדם חכוך ויסקוזי) (N/(m/sec.))

k - קבוע הקפיץ (N/m)

f - כח (N)

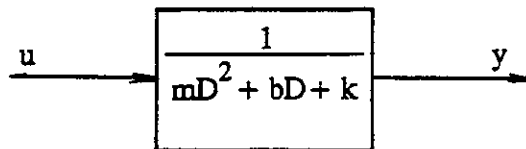
y - המיקום הרגעי של המסה (m)

משוואה (L30) הינה משוואה דיפרנציאלית - מסדר שני.

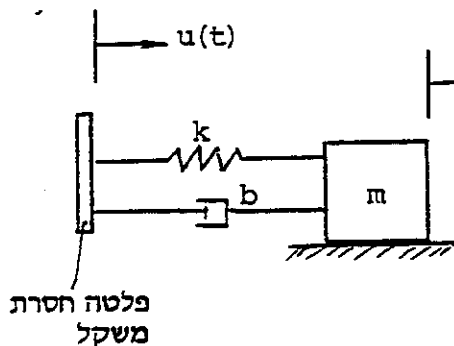
על ידי שמוש באופרטור D והגדרת הכח f ככניסה $(u \triangleq f)$ נקבל:

$$y = \frac{1}{mD^2 + bD + k} u \quad (L31)$$

תאור סכמטי של (L31) נתון בציור 1.20.



ציור 1.20:



ציור 1.21

הערה: אם הכניסה u למערכת המכנית הנ"ל תוגדר

כמיקום הרגעי של הפלטה חסרת המשקל (ראה

ציור 1.21) תהיה הדינמיקה של המערכת נתונה

על ידי:

$$m\ddot{y} + b(\dot{y} - \dot{u}) + k(y - u) = 0$$

(L32)

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = b\dot{u} + ku$$

או :

ובאמצעות האופרטור D נקבל:

$$y = \frac{bD + k}{mD^2 + bD + k} u \quad (1.32)$$

מערכת מכנית סבובית

בציור 1.22 נתונה מערכת מכנית סבובית

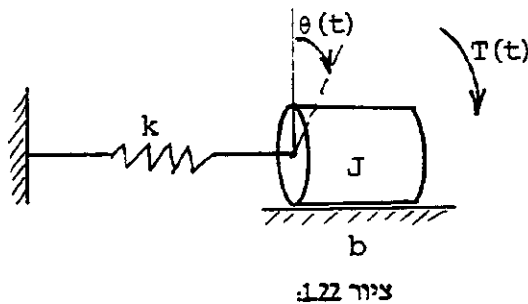
המורכבת מגוף קפץ פתול על הגוף

פתול חכך ויסקוזי המפעיל מומנט מנגד

לכוח הסיבוב ופרופורציונלי (דרך הקבוע b)

למהירות הזוויתית $\dot{\theta}$ של הגוף.

מאזן מומנטים על הגוף:



$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = T(t) \quad (1.33)$$

כאשר:

J - מומנט האינרציה של הגוף ($\text{Kg}\cdot\text{m}^2$)

b - מקדם החכך הויסקוזי (או קבוע המרסן) ($\text{N}\cdot\text{m}/(\text{rad}/\text{sec})$)

k - קבוע קפיץ הפתול ($\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}$)

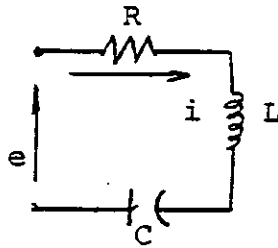
θ - המקום הזוויתי הרגעי של הגוף (rad)

T - המומנט החיצוני המופעל על הגוף ($\text{N}\cdot\text{m}$)

משוואה (1.33) אכלוגית לחלוטין למשוואה (1.30). אם נגדיר הכניסה: $u \triangleq T$ והיציאה: $y \triangleq \theta$ יתאר ציור

(1.20) גם את המערכת הסבובית (כאשר נחליף m ב- J).

ת. מערכת חשמלית (נגד - קבל - סליל)



ציור 1.23

ציור 1.23 מתאר מערכת חשמלית עם מקור מתח $e(t)$

מחוק קירכהוף נקבל:

$$(1.34) \quad L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = e$$

אם נגדיר $\dot{q} = i$ ונציב ב-(1.34)

נקבל:

$$(1.35) \quad L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = e(t)$$

כאשר:

R - התנגדות (Ohm)

L - השראות (Henry)

C - קבל (Farad)

e - מתח המקור (Volt)

i - זרם (Ampere)

q - מטען (Coulomb)

משוואה (1.35) הינה משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר II. באמצעות האופרטור D נכתוב את (1.35)

בצורה:

$$(1.36) \quad q = \frac{1}{LD^2 + RD + \frac{1}{C}} e$$

אם נגדיר $y \triangleq q$ ו- $u \triangleq e$ ונחליף את m, b, k ב- $L, R, 1/C$ בהתאמה, יתאר ציור 1.20 גם את

המערכת החשמלית הנ"ל.

הערה: אם היציאה y מוגדרת כזרם i נוכל למצוא את המשוואה הדיפרנציאלית המתאימה ישירות מתוך (1.36) אם נסבור כי $i = Dq$. אם נציב קשר זה ב-(1.36) נקבל:

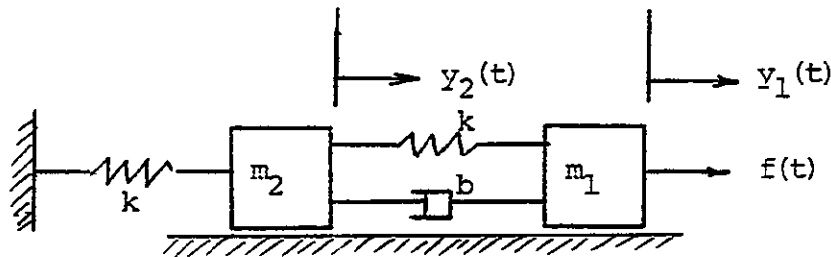
$$y = i = Dq = \frac{D}{LD^2 + RD + 1/C} u \quad (1.36)$$

14.2.3 מערכות מסדר גבוה

המערכות הפשוטות שהיצגנו בסעיפים הקודמים היו מסדר ראשון ושני. סדר המערכת נקבע לפי סדר המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את המערכת.

מערכות מורכבות יותר מאלו שהיצגנו עד כה ותבונן של מערכות פשוטות מביאים למודלים מתמטיים עם משוואות דיפרנציאליות מסדר גבוה יותר. נדגים זאת באמצעות מערכת מכנית קוית עם שתי מסות

כמראה בציור 1.24.



ציור 1.24

הפעלת החוק השני של ניוטון על כל אחת מהמסות מביאה ל:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + b(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k(y_1 - y_2) &= f \\ m_2 \ddot{y}_2 + b(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k(y_2 - y_1) + ky_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.37)$$

כאשר y_1 ו- y_2 מציינים את המיקום הרגעי של m_1 ו- m_2 בהתאמה. באמצעות האופרטור D נקבל:

$$\begin{aligned} a) \quad (m_1 D^2 + bD + k)y_1 - (bD + k)y_2 &= f \\ b) \quad -(bD + k)y_1 + (m_2 D^2 + bD + 2k)y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

אם מגדירים את היציאה $y \triangleq y_1$ ואת הכניסה $u \triangleq f$ נרצה לקבל משוואה דיפרנציאלית אחת

הקושרת בין y ל- u . זאת נוכל להשיג על ידי חלוץ y_2 מ-(1.38b) והצבתו ב-(1.38a). פעולה זו תביא

לקשר כניסה-יציאה הבא:

$$(1.39) \quad y = \frac{m_2 D^2 + bD + 2k}{m_1 m_2 D^4 + (m_1 + m_2)bD^3 + (2m_1 + m_2)kD^2 + kbD + k^2} u$$

או:

$$(1.40) \quad m_1 m_2 \ddot{y} + (m_1 + m_2)b\ddot{y} + (2m_1 + m_2)k\dot{y} + kb\dot{y} + k^2 y = m_2 \ddot{u} + b\dot{u} + 2ku$$

משוואות (1.39) או (1.40) מתארות מערכת מסדר רביעי.

14.24 סיכום

1. מודל מתמטי של מערכת רציפה ליניארית עם כניסה אחת u ויציאה אחת y נתון כללית על ידי

המשוואה הדיפרנציאלית:

$$(1.41) \quad \sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^m b_i D^i u$$

כאשר בדרך כלל $n \leq m$ וברב המקרים $n < m$.

2. במערכות מסדר ראשון $n=1$ ו-(1.41) היא מהצורה:

$$(1.42) \quad a_1 \dot{y} + a_0 y = b_1 \dot{u} + b_0 u$$

במרבית הדוגמאות קבלנו כי $b_1 = 0$. במקרים אלו ניתן לכתוב את (1.42) בצורה (במידה

ו- $a_0 \neq 0$):

$$(1.43) \quad \frac{a_1}{a_0} \dot{y} + y = \frac{b_0}{a_0} u$$

אם נסמן $\tau = a_1/a_0$ ו- $k = b_0/a_0$ מתקבל המודל המתמטי המתאים לכל הדוגמאות מסדר I אשר טפלנו בהן בפרק זה. במקרים אלו τ הוא קבוע הזמן של המערכת ו- k ההגבר הסטטי (מונח זה יובהר בהמשך).

3. במערכות מסדר שני $n = 2$ ו-(1.41) נתון:

$$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_2 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 u \quad (1.44)$$

משוואות (1.30), (1.33) ו-(1.35) הן במתכונת הנ"ל כאשר $b_2 = b_1 = 0$ משוואה (1.32) מותאימה ל-(1.44)

עם $b_2 = 0$ ו-(1.36) עם $b_2 = b_0 = 0$.

14.3 מערכות בדידות

14.3.1 מערכות בדידות ליניאריות אשר נטפל בהן בקורס זה תתוארנה על ידי משוואות הפרשים במשתנה

בלתי תלוי אחד, למשל הזמן הבדיד t_k או המקום הסדורי k . אם $u(t_k)$ ו- $y(t_k)$ הם הכניסה הבדידה

והיציאה הבדידה ברגע t_k תהיה מערכת SISO כללית בדידה וליניארית נתונה על ידי משוואת

ההפרשים:

$$\sum_{i=0}^n a_i y(t_{k+i}) = \sum_{i=0}^m b_i u(t_{k+i}) \quad (1.45a)$$

או:

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k+i) = \sum_{i=0}^m b_i u(k+i) \quad (1.45b)$$

או:

$$\sum_{i=0}^n a_i y_{k+i} = \sum_{i=0}^m b_i u_{k+i} \quad (1.45c)$$

שלוש המשוואות הנ"ל נבדלות רק בצורת הכתיבה.

נעזר באופרטור ההזזה z המוגדר לפי:

$$(1.46) \quad z^n y_i = y_{i+n}$$

או:

$$(1.47) \quad z^{-n} y_i = y_{i-n}$$

נביא להלן מספר דוגמאות לקבלת מודלים מתמטיים של מערכות בדידות פשוטות.

1.4.3.2 דוגמא א' - באוניברסיטה מסוימת נהוג לקבוע לסטודנט ציון מיוצג בסיום כל סמסטר אשר הינו

ממוצע משוקלל של הגורמים הבאים:

א. ממוצע ציוניו בסמסטר הנוכחי - במשקל 60%.

ב. ציונו המיוצג בסמסטר הקודם - במשקל 25%.

ג. ציונו המיוצג בסמסטר שלפני הקודם - במשקל 15%.

נסמן: y_k - ציון מיוצג בסוף הסמסטר ה- k (יציאה)

u_k - ממוצע הציונים בסמסטר ה- k (כניסה).

נקבל לכן:

$$y_k = 0.6u_k + 0.25y_{k-1} + 0.15y_{k-2}$$

או:

$$(1.48) \quad y_k - 0.25y_{k-1} - 0.15y_{k-2} = 0.6u_k$$

משוואה (1.48) הינה משוואת הפרשים המתארת את ה"דינמיקה" של הציון המיוצג כתלות בממוצע

ציוני.

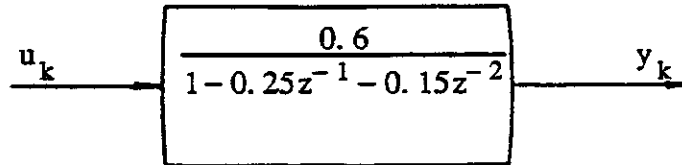
באמצעות האופרטור z נכתוב את (1.48) בצורה:

$$y_k(1 - 0.25z^{-1} - 0.15z^{-2}) = 0.6 u_k$$

או:

$$(1.49) \quad y_k = \frac{0.6}{1 - 0.25z^{-1} - 0.15z^{-2}} u_k = \frac{0.6z^2}{z^2 - 0.25z - 0.15} u_k$$

הקשר כניסה-יציאה יתואר סכמטית כבצור 1.25.



צור 1.25:

משוואה (1.48) היא משוואת הפרשים מסדר שני.

14.3.3 דוגמא ב' - בעית מלאי במחסן

הזמנות ומשלוחים מתקבלים פעם בשבוע. חולף שבוע מיום הזמנת חלקים ועד קבלתם במחסן.

המשלוח מהמחסן בשבוע ה- k פרופורציונלי למלאי הקיים באותו שבוע ומקדם הפרופורציה הוא a .

נסמן:

$y(k)$ - המלאי במחסן בשבוע ה- k לפני בצוע כל פעולה אחרת (לפני כניסת הזמנות והוצאת

משלוחים).

$u(k)$ - הזמנת המחסן בשבוע ה- k .

דינמיקת המלאי תהיה נתונה לכן על ידי:

$$(1.50) \quad y(k) = y(k-1) + u(k-2) - a y(k)$$

או:

$$(1.51) \quad (1+a) y(k) - y(k-1) = u(k-2)$$

ובעזרת האופרטור z נקבל:

$$(1.52) \quad y(k) = \frac{z^{-2}}{1 + a - z^{-1}} u(k) = \frac{1}{(1+a)z^2 - z} u(k)$$

משוואה (1.51) הינה משוואת הפרשים מסדר שני $(k-(k-2) = 2)$.

14.3.4 דוגמא ב' - אדם חוסך בשתי תכניות חסכון. תוכנית א' מקנה ריבית חודשית α ($0 < \alpha < 1$) ותכנית ב' מעניקה ריבית חודשית β ($0 < \beta < 1$) - 60% מהפקדותיו בחודש מסוים מכניס החוסך לתכנית א' והשאר לתכנית ב'. הריביות מחושבות על בסיס המאזן בתחילת כל חודש.

נסמן:

u_i - סך ההפקדות בחודש ה- i .

y_i - מאזן כללי של חסכונותיו בתחילת החודש ה- i .

x_i - מאזן חשבון החסכון בתכנית א' בתחילת החודש ה- i .

מאזן חסכונו בתכנית א' בתחילת החודש ה- $i+1$, יהיה נתון על ידי:

$$(1.53) \quad x_{i+1} = (1+\alpha)x_i + 0.6u_i$$

ומאזן חסכונו בתכנית ב' בתחילת החודש ה- $i+1$, יהיה:

$$(1.54) \quad y_{i+1} - x_{i+1} = (1+\beta)(y_i - x_i) + 0.4 u_i$$

אם מטרתנו לקבל קשר ישיר בין u_i ל- y_i (ללא משתנה העזר x_i) נבצע הפעולות הבאות:

נחבר (1.53) ו-(1.54):

$$(1.55) \quad y_{i+1} = (1+\beta)y_i + (\alpha-\beta)x_i + u_i$$

בעזרת האופרטור z נחלץ מ-(1.53) את x_i :

$$zx_i = (1+\alpha)x_i + 0.6u_i$$

$$(1.56) \quad x_i = \frac{0.6}{z-1-\alpha} u_i$$

נציב (1.56) ב-(1.55):

$$zy_i = (1+\beta)y_i + ((\alpha-\beta) \frac{0.6}{z-1-\alpha} + 1) u_i$$

לאחר בצוע מכנה משותף של שני האגפים נקבל:

$$(1.57) \quad y_{i+2} - (2+\alpha+\beta)y_{i+1} + (1+\beta)(1+\alpha)y_i = u_{i-1} - (1 + 0.4\alpha + 0.6\beta)u_i$$

(1.57) הינה משוואת ההפרשים המבוקשת. זוהי משוואת הפרשים מסדר שני.

14.3.5 דוגמא ד' - קרוב משוואה דיפרנציאלית באמצעות משוואת הפרשים. לצורך פתרון נומרי של משוואות

דיפרנציאליות מקרבים אותן באמצעות משוואת הפרשים. נדגים פעולה זו באמצעות משוואה

דיפרנציאלית מסדר שני:

$$(1.58) \quad a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

נבחר בקרוב פשוט:

$$(1.59) \quad \dot{y}(t) \equiv \frac{y_k - y_{k-1}}{T}$$

כאשר:

y_k הוא ערך $y(t)$ ברגע $t = t_k$.

y_{k-1} הוא ערך $y(t)$ ברגע t_{k-1} .

$$T = t_k - t_{k-1}$$

את (1.59) ניתן להציג באמצעות האופרטור z :

$$\dot{y}(t) \equiv \frac{1 - z^{-1}}{T} y_k$$

את $\ddot{y}(t)$ נוכל לך לקרב על ידי:

$$\ddot{y}(t) \equiv \left(\frac{1 - z^{-1}}{T}\right)^2 y_k = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{T^2} y_k = \frac{1}{T^2} y_k - \frac{2}{T^2} y_{k-1} + \frac{1}{T^2} y_{k-2}$$

(1.60)

אם נציב (1.59) ו-(1.60) ב-(1.58) נקבל:

$$\frac{a_2}{T^2} (y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}) + \frac{a_1}{T} (y_k - y_{k-1}) + a_0 y_k = b_0 u_k$$

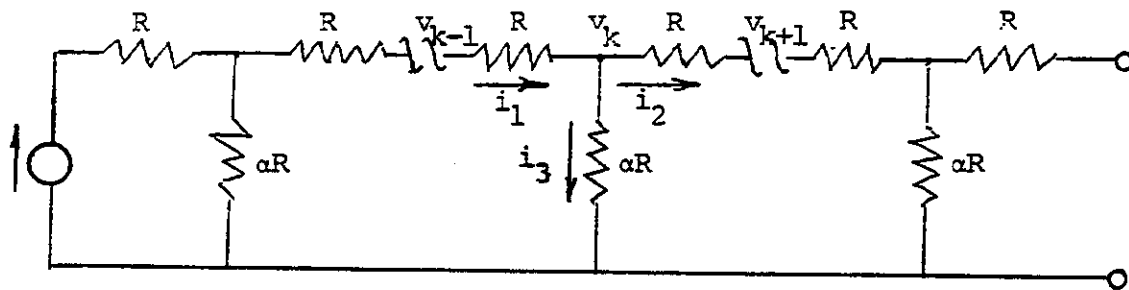
ולאחר כינוס נקבל:

$$(1.61) \quad \left(\frac{a_2}{T^2} + \frac{a_1}{T} + a_0\right) y_k - \left(\frac{2a_2}{T^2} + \frac{a_1}{T}\right) y_{k-1} + \frac{a_2}{T^2} y_{k-2} = b_0 u_k$$

(1.61) היא משוואת הפרשים מסדר שני המקרבת את (1.58). איכות הקרוב תלויה במשוואה

הדיפרנציאלית ואת T יש לבחור קטן מספיק.

14.3.6 דוגמא ה' - רשת חשמלית עם מבנה חוזר.



ציור 126

בציור מתוארת רשת חשמלית עם מבנה חוזר. הפוטנציאלים v_i בכל צומת הם פתקציה של אינדקס

המקום k . חוק קירקהוף לגבי הצומת ה- k ($i_1 = i_2 + i_3$) יתן:

$$\frac{v_{k-1} - v_k}{R} = \frac{v_k - v_{k+1}}{R} + \frac{v_k}{\alpha R}$$

או:

$$(1.62) \quad \alpha v_{k+1} - (2\alpha + 1)v_k + \alpha v_{k-1} = 0$$

יש לשים לב לעובדה שהמשתנה הבלתי תלוי במקרה זה מציין מקום ולא זמן. משוואה (1.62) הינה

משוואת הפרשים מסדר שני המקשרת בין פוטנציאלי הצמתות ברשת.

פרק 2 : מטריצות ומרחבים וקטוריים ליניאריים (רענון)

בפרק זה נסקור בקצרה מושגים וכלים מתורת המרחבים הוקטוריים הליניאריים, מטריצות וטרנספורמציות. ההנחה היא שהקורא כבר למד נושאים אלו והמטרה כאן היא רענון תוך הדגשה של המושגים הרלוונטיים לענייננו ואשר נשתמש בהם בהמשך. סקירה קצרה זו אינה יכולה לשמש כתחליף ללמוד יסודי של הנושא.

2.1 דטרמיננטים ומטריצות

תהיה נתונה המטריצה $A \in C^{n \times m}$:

$$A_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

נסמן דטרמיננט של מטריצה רבועית $A_{n \times n}$ על ידי $|A|$ או $\det(A)$.

2.1.1 מינור - דטרמיננט של תת-מטריצה רבועית של A . אם מימד התת מטריצה הוא $k \times k$ נאמר שזהו מינור מסדר k של A .

2.1.2 מינור ראשי - הוא מינור המתקבל מתת-מטריצה רבועית שאלכסונה הוא חלק מאלכסון המטריצה הריבועית A .

2.1.3 אם נתונה $A_{n \times n}$ אזי המינורים ממימד $(n-1) \times (n-1)$ המתקבלים מהוצאת השורה ה- i והעמודה ה- j ב- A יסומנו M_{ij} .

2.1.4 משלים אלגברי - c_{ij} של אלמנט a_{ij} ב- $A_{n \times n}$ מוגדר על ידי:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}| \quad (2.2)$$

את מטריצת המשלימים נסמן על ידי (C_{ij}) .

2.1.5 פתוח לפלס של דטרמיננט

ניתן לחשב את $|A|$ על ידי פתוח לפלס לפי שורות או עמודות. פתוח לפלס נתון על ידי:

$$(23) \quad |A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{ij} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{לפי שורות:}$$

$$(24) \quad |A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} c_{ij} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{לפי עמודות:}$$

216 דוגמא: נתונה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

נפתח $|A|$ לפי השורה הראשונה:

$$|M_{11}| = 4 \quad ; \quad c_{11} = 4$$

$$|M_{12}| = 2 \quad ; \quad c_{12} = -2 \quad |A| = \sum_{j=1}^3 a_{1j} c_{1j} = -2$$

$$|M_{13}| = -4 \quad ; \quad c_{13} = -4$$

217 הערה: אם את a_{ij} שב-(23) נחליף ב- a_{kj} ($k \neq i$) נקבל

$$(25) \quad \sum_{j=1}^n a_{kj} c_{ij} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad ; \quad k \neq i$$

218 מטריצת Adjoint - היא מטריצת המשלימים המוחלפת:

$$(26) \quad \text{Adj}(A) = (C_{ji}) = (C_{ij})^T$$

219 דוגמא: נתונה A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(A) = (C_{ij})^T = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 6 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.1.10 על ידי שמוש ב-(2.6) ובפתוח לפלס קל להראות עבור $A_{n \times n}$ את הקשר:

$$(2.7) \quad A \cdot \text{Adj}(A) = |A| I_n$$

2.1.11 המטריצה ההפכית: A^{-1} .

על ידי חלוקת (2.7) ב- $|A|$ נקבל:

$$A \cdot \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} = I_n$$

$$(2.8) \quad A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} \quad \text{ומכאן:}$$

$$(2.9) \quad C = A B \quad \text{2.1.12 הערה: אם}$$

$$(2.10) \quad C^{-1} = B^{-1} A^{-1} \quad \text{אזי}$$

(כפל (2.9) ב- $B^{-1} A^{-1}$)

22 מרחב וקטורי ליניארי

2.2.1 הגדרה: מרחב וקטורי ליניארי X , מעל שדה F (שדה - אוסף אלמנטים הנקראים סקלרים עם שתי

פעולות: חבור וכפל) מורכב מסט של וקטורים (אלמנטי המרחב), שדה F ושתי פעולות: חבור וקטורי ומכפלה בסקלר.

שתי הפעולות הנ"ל מוגדרות כך שמקימות את התנאים הבאים:

$$1. \quad \text{אם } x_1 \in X \text{ ו- } x_2 \in X \text{ אזי גם } x_1 + x_2 \in X$$

$$2. \quad \text{(חבור קומוטטיבי) אם } x_1 \in X \text{ ו- } x_2 \in X \text{ אזי } x_1 + x_2 = x_2 + x_1$$

3. (חבור אסוציאטיבי) אם $x_1 \in X$ ו- $x_2 \in X$ ו- $x_3 \in X$ אזי:

$$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$$

4. X מכל וקטור 0 כך ש- $x + 0 = x$ עבור כל $x \in X$.

5. לכל $x \in X$ קיים $\bar{x} \in X$ כך ש- $\bar{x} + x = 0$.

6. לכל $\alpha \in F$ ו- $x \in X$ קיים $\alpha x \in X$.

7. לכל $\alpha, \beta \in F$ ולכל $x \in X$ קיים $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

$$\alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

10. לכל $x \in X$ קיים $1x = x$ כאשר 1 הוא האלמנט 1 ב- F .

סימון: וקטור x השייך למרחב X מעל השדה F יסומן: $x \in (X, F)$.

222 תלות ליניארית - אוסף הוקטורים $x^1, x^2, \dots, x^n$ במרחב ליניארי מעל שדה F נקרא תלוי ליניארית

אם קיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ב- F , לא כולם 0, כך ש:

$$(2.11) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i = 0$$

אם סט ה- α היחידים המקיים הקשר (2.11) הוא $\alpha_i = 0$ $i = 1, \dots, n$ אזי הסט x^i ($i = 1, 2, \dots, n$)

בלתי תלוי ליניארית

223 הערות:

1. תלות ליניארית תלויה לא רק בסט הוקטורים אלא גם בשדה.

2. אם x^i ($i = 1, 2, \dots, n$) תלויים ליניארית אזי לפחות אחד מהם ניתן לבטא כקומבינציה ליניארית של האחרים.

224 מימד המרחב: המספר המקסימלי של וקטורים בלתי תלויים במרחב.

הערה: קיימים מרחבים ממימד אין-סופי. דהיינו אי אפשר למצוא α_i כאלו, לא סולם 0 כך ש-

$$\sum \alpha_i x^i = 0$$

אלא אם i הולך מ-1 ל- ∞ . בקורס זה נעסוק במרחבים בעלי מימד סופי בלבד.

225 בסיס: סט של וקטורים בלתי תלויים ליניארית יקרא בסיס ב- X אם כל וקטור ב- X ניתן לבטא כקומבינציה ליניארית יחידה של וקטורים אלו.

מסקנה: במרחב וקטורי Π מימדי כל סט של Π וקטורים בלתי תלויים יכול לשמש כבסיס.

226 נורם

נורם של וקטור x אשר יסומן להלן על ידי $\|x\|$ הוא הכללה של מושג האורך. כל פונקציה עם ערכים ממשיים יכולה לשמש כנורם של x אם עבור כל וקטור x מעל שדה המספרים הקומפלקסיים ולכל $\alpha \in \mathbb{C}$ מתקיים:

א. $\|x\| > 0$ עבור $x \neq 0$.

ב. $\|x\| = 0$ אם $x = 0$.

ג. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

ד. $\|x^1 + x^2\| \leq \|x^1\| + \|x^2\|$ (אי שוויון המשולש).

דוגמה לנורם הוא הנורם האוקלידי:

$$\|x\|_2 \triangleq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

227 מכפלה פנימית - מכפלה פנימית של שני וקטורים x ו- y השייכים ל- (C^n, C) הוא מספר קומפלקסי המסומן $\langle x, y \rangle$ והמוגדר על ידי:

$$\langle x, y \rangle = x^* \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \quad (2.12)$$

כאשר x^* הוא הצמוד הקומפלקסי של x .

הערות:

$$\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle = y^* \cdot x \quad (2.13)$$

(2.13) הופך לשוויון אם x ו- y ממשיים.

$$\|x\|_2 = (\langle x, x \rangle)^{1/2} \quad 2$$

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \text{אם } x \text{ ו-} y \text{ נקראים אורתוגונליים.} \quad 3$$

22.8 דרגה (Rank) של מטריצה.

דרגת המטריצה A , שתסומן $\rho(A)$, היא המספר המקסימלי של עמודות (או שורות) בלתי תלויות במטריצה A .

אם דרגת המטריצה $A_{n \times n}$ היא n אנו אומרים של- A דרגה מלאה.

ברור לכך של- $A_{n \times n}$ דרגה מלאה אם $\det A \neq 0$.

אקוילונטיות ניתן להגדיר שדרגת מטריצה היא הסדר הגדול ביותר של מינור של המטריצה שאינו אפס. כלומר, אם מינור אחד (או יותר) מסדר k אינו אפס אבל כל המינורים מסדר $k+1$ הם אפס אז $\rho(A) = k$.

23 ערכים עצמיים (ע"ע-ים) ווקטורים עצמיים (ו"ע-ים)

נתונה המטריצה $A_{n \times n}$ ($A \in C^{n \times n}$)

23.1 ע"ע-ים של A הם הסקלרים λ עבורם למשוואה $Av = \lambda v$ פתרונות $v \neq 0$.

ו"ע-ים ימניים של A הם הפתרונות v ($v \neq 0$) של $Av = \lambda v$.

$v^i \neq 0$ המקיים $Av^i = \lambda_1 v^i$ נקרא הו"ע המתאים לע"ע λ_1 .

23.2 המשוואה $Av = \lambda v$ שקולה ל-

$$(2.14) \quad (\lambda I - A)v = 0$$

ל-(2.14) פתרונות $v \neq 0$ אם $\det(\lambda I - A) = 0$ מכאן שהע"ע-ים הם הפתרונות של:

$$(2.15) \quad \det(\lambda I - A) = 0$$

23.3 הפולינום $\Delta(\lambda)$ הנתון על ידי:

$$(2.16) \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

נקרא הפולינום האפייני של A .

המשוואה (2.15):

$$\Delta(\lambda) = 0$$

נקראת המשוואה האופיינית של A .

2.3.4 ניתן להראות כי:

1. לכל עיץ נפרד קיים לפחות עיץ אחד.
2. כל הוויי-ים המתאימים לעיץ-ים נפרדים הינם בלתי תלויים.
3. אם ל-A n עיץ-ים נפרדים אזי קימים בדיוק n עיץ-ים בלתי-תלויים.

הערה:

- (1) לעיץ החוזר k פעמים עשויים להיות 1 עד k עיץ-ים בלתי תלויים.
- (2) למטריצה סימטרית יש תמיד n עיץ-ים בלתי תלויים גם אם יש לה עיץ חוזרים.

2.3.5 עיץ שמאלי - r

עיץ-ים שמאליים של A מוגדרים כפתרונות השונים מאפס של :

$$(2.17) \quad r'(\lambda I - A) = 0$$

אם הוויי-ים הימניים מנורמלים כך ש- $\|v_i\| = 1$ אזי ניתן להראות ש-

$$(2.18) \quad \langle r^j, v^i \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

2.3.6 המטריצה המודלית של $A_{n \times n}$

אם ל-A n עיץ-ים λ_i עם n עיץ-ים v^i בלתי תלויים ליניאריים אזי הסט של הוויי יכול לשמש כבסיס

במרחב ה-n מימדי (C^n, C) .

נסמן:

$$(2.19) \quad M = (v^1, v^2, \dots, v^n)$$

המטריצה M הנתונה ב-(2.19) אשר עמודותיה הם הוויי-ים של A נקראת המטריצה המודלית של A.

הערה: שורות M^{-1} מהוות את הוויי-ים השמאליים (המנורמלים) של A. (זאת היות ו- $MM^{-1} = I$) - השווה ל-(2.18).

2.3.7 חשוב הוויי-ים (המטריצה המודלית)

א. ישירות מההגדרה (2.14)

$$(2.14) \quad (\lambda I - A)v = 0$$

דוגמא: נתונה המטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -8 & 3 & 7 \\ -8 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

נפתור $\det(\lambda I - A) = 0$ עבור העיניים:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -1 \\ 8 & \lambda - 3 & -7 \\ 8 & 1 & \lambda - 11 \end{vmatrix}$$

ונקבל:

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda - 10) = 0$$

$$\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 4; \lambda_3 = 10 \quad \text{ומכאן:}$$

נציב ב- $\lambda I - A$ את $\lambda_1 = 2$ ונפתור $v^1 = (v_1^1 \ v_2^1 \ v_3^1)^T$ מ-(2.14):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 8 & -1 & -7 \\ 8 & 1 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{pmatrix} = 0$$

נקבל:

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

או כל וקטור אחד הפרופורציונלי ל- v^1 .

בצורה דומה נקבל:

$$v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ומכאן:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ב. מציאת הווי-עיים באמצעות $\text{Adj}(\lambda I - A)$

היות ו- $(\lambda I - A)^{-1} = I - (\lambda I - A)$ נקבל מ-(2.7):

$$(2.20) \quad |\lambda I - A| I = (\lambda I - A) \text{Adj}(\lambda I - A)$$

היות ו- $(\lambda_i I - A)$ לפחות שתי שורות תלויות אזי:

$$\rho(\lambda_i I - A) \leq n-1$$

מכאן:

$$(2.21) \quad \rho(\text{Adj}(\lambda_1 I - A)) = 1$$

דהיינו כל עמודות $\text{Adj}(\lambda_1 I - A)$ תלויות.

אם נציב $\lambda = \lambda_1$ ב-(2.20) נקבל:

$$(2.22) \quad (\lambda_1 I - A) \text{Adj}(\lambda_1 I - A) = |\lambda_1 I - A| I = 0$$

השוואת האנף השמאלי של (2.22) ל-

$$(\lambda_1 I - A) v^1 = 0$$

מצביעה על כך שכל עמודה של $\text{Adj}(\lambda_1 I - A)$ השונה מאפס היא וינ.

דוגמא: נפתור הדוגמא הקודמת בשיטה זו:

$$\text{Adj}(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} (\lambda - 3)(\lambda - 11) + 7 & -(\lambda - 11) - 1 & (\lambda - 3) - 7 \\ -8(\lambda - 11) - 56 & (\lambda - 2)(\lambda - 11) + 8 & 7(\lambda - 2) - 8 \\ -8(\lambda - 3) + 8 & -(\lambda - 2) + 8 & (\lambda - 2)(\lambda - 3) - 8 \end{pmatrix}$$

אם נציב $\lambda = \lambda_1 = 2$

$$\text{Adj}(\lambda_1 I - A) = \begin{pmatrix} 16 & 8 & -8 \\ 16 & 8 & -8 \\ 16 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

והוקטור העצמי v^1 המתאים ל- λ_1 הוא כל וקטור הפרופורציונלי לאחת מעמודות $\text{Adj}(\lambda_1 I - A)$, למשל:

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בצורה דומה נקבל עבור $\lambda = \lambda_2 = 4$:

$$\text{Adj}(\lambda_2 I - A) = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

ומכאן

$$v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ועבור $\lambda = \lambda_3 = 10$ נקבל:

$$\text{Adj}(\lambda_3 I - A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -48 & 0 & 48 \\ -48 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$v^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

-1

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4 טרנספורמציה סימילרית

24.1 נתונות $A_{n \times n}$ ו- $B_{n \times n}$

המדרג: אם קימת מטריצה $P_{n \times n}$ לא סינגולרית כך ש-

$$(2.23) \quad B = P^{-1} A P$$

אנו אומרים ש- B דומה ל- A (B סימילרית ל- A) או B התקבלה מ- A באמצעות טרנספורמציה סימילרית.

24.2 אחת התכונות החשובות של מטריצות סימילריות נתונה במשפט הבא:

משפט: ע"ע-ים אינוריאנטים תחת טרנספורמציה סימילרית. במילים אחרות: לשתי מטריצות סימילריות אותם ע"ע-ים.

הוכחה: אם A ו- B סימילריות כב-(2.23) נכתוב:

$$\lambda I - B = \lambda I - P^{-1} A P = P^{-1} (\lambda I - A) P$$

לכן:

$$|\lambda I - B| = |P^{-1}| |\lambda I - A| |P| = |\lambda I - A| |P^{-1} P| = |\lambda I - A|$$

מ.ש.ל.

2.4.3 מ- (2.23) ברור ש-

$$(2.24) \quad B^k = P^{-1} A^k P$$

2.5 לכסון המטריצה A

2.5.1 הנח כי ל- $A_{n \times n}$ n וי-עים בלתי תלויים v^i ($i = 1, 2, \dots, n$). כל מתאים ל- λ_i . נראה כי:

$$(2.25) \quad \Lambda = M^{-1} A M$$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_i) \quad \text{כאשר :}$$

M -ו הינה המטריצה המודלית של A .

כל v^i מקיים:

$$(2.26) \quad \lambda_i v^i = A v^i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

אם נצרף את n האגפים השמאליים והימניים של (2.26) נקבל:

$$(\lambda_1 v^1, \lambda_2 v^2, \dots, \lambda_n v^n) = (A v^1, A v^2, \dots, A v^n)$$

או:

$$(v^1, v^2, \dots, v^n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = A (v^1, v^2, \dots, v^n)$$

לכן:

$$(2.27) \quad M \Lambda = A M$$

נכפול (2.27) ב- M^{-1} ונקבל את (2.25).

מ.ש.ל.

2.5.2 מ- (2.25) ברור ש- A ו- Λ דומות (סימילריות).

2.5.3 מ- (2.24) נקבל:

$$(2.28) \quad \Lambda^k = M^{-1} A^k M$$

או

$$(2.29) \quad A^k = M \Lambda^k M^{-1}$$

2.6 ו"ע-ים מוכללים - תבנית ג'ורדן

2.61 אם למטריצה $A_{n \times n}$ ע"ע-ים חוזרים לא תמיד ניתן להביאה לצורה המלוכסנת Λ .

2.62 אם ל- $A_{n \times n}$ ע"ע λ_i החוזר m פעמים מספר הו"ע-ים הבלתי תלויים המתאימים ל- λ_i שניתן

למצוא תלוי בדרגת המטריצה $\lambda_i I - A$ ותתן על ידי:

$$(2.30) \quad n - \rho(\lambda_i I - A)$$

$$n - \rho(\lambda_i I - A) = m \quad \text{אם:}$$

ניתן למצוא m ו"ע-ים בלתי תלויים המתאימים ל- λ_i .

2.63 דוגמא: נתונה A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)$$

$$m = 2; \quad \lambda_1 = 1 \quad \text{כלומר:}$$

$$\lambda_2 = 2$$

ברור שניתן למצוא שני ו"ע-ים בלתי תלויים (אחד עבור כל λ). השאלה היא אם ניתן למצוא לערך

העצמי $\lambda_1 = 1$ וקטור עצמי בלתי תלוי נוסף.

$$\rho(\lambda_1 I - A) = 1 \quad \text{היות ו-}$$

$$n - \rho(\lambda_1 I - A) = 3 - 1 = 2 = m = 2 \quad \text{ו-}$$

ניתן למצוא וקטור עצמי בלתי תלוי שני המתאים ל- λ_1 .

את שני הו"ע-ים הבלתי תלויים המתאימים ל- λ_1 נמצא מתוך:

$$(\lambda_1 I - A)v = 0; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3 \\ 0 \\ -v_3 \end{pmatrix} = 0$$

לכן $v_3 = 0$ ומכאן

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

את v^3 המתאים ל-ע"ע $\lambda_2 = 2$ נמצא באופן רגיל (סעיף 2.3.7):

$$v^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

והיות ו- A שלושה ו"ע-ים בלתי תלויים ניתן ללכסנה לפי (2.25)

$$\Lambda = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$n - (\rho \lambda_i I - A) < m \quad \text{אם} \quad 2.64$$

לא נוכל למצוא m ו"ע-ים בלתי תלויים הקשורים ל- λ_i . במקרה זה גם לא ניתן ללכסן את A . נוכל

במקרים אלו להביא את A לתבנית ג'ורדן (Jordan) הנתנה על ידי:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & J_k \end{pmatrix}$$

(2.31)

כל J_i בתבנית הנ"ל נקרא בלוק הקשור ל-ע"ע מסוים ונתון על ידי:

$$(2.32) \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & & \\ & \lambda_i & * & 0 \\ & & & * \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{m \times m}$$

כאשר m הינו מספר החזרות של λ_i וכאשר $*$ הוא 1 או 0.

J נתונה על ידי:

$$(2.33) \quad J = \bar{M}^{-1} A \bar{M}$$

כאשר עמודות $\bar{M}$ הן אותם וי-ע-ים בלתי תלויים שניתן למצוא ושאר העמודות הן וי-ע-ים מוכללים.

2.65 וי-ע-ים מוכללים - לא נטפל כאן במקרה הכללי אלא במקרה הפשוט יותר בו ה- $*$ ב- J_i שב-(2.32) הם

כולם 1. דהיינו J_i נתון על ידי:

$$(2.34) \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & 0 \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{m \times m}$$

הדרך למציאת וי-ע-ים הקשורים ל- λ_i החוזר k_i פעמים היא להשתמש בקשר:

$$(2.35) \quad \bar{M}J = A\bar{M}$$

ולהניח כי J_i נתון על ידי (2.34).

אם נסמן את עמודות $\bar{M}$ על ידי - v^i , אזי קיים J_i מסדר m הקשור לוי-ע λ_i אם ורק אם

m הוקטורים הבלתי תלויים v^j ($j = 1, \dots, m$) מקימים:

$$(2.36) \quad \begin{aligned} (\lambda I - A)v^1 &= 0 \\ (\lambda I - A)v^2 &= -v^1 \\ &\vdots \\ (\lambda I - A)v^m &= -v^{m-1} \end{aligned}$$

כדי להבחיר את (2.36) נניח כי ל- $A_{m \times m}$ עי-ע אחד λ החוזר m פעמים וכי J נתון על ידי (2.34). אם

נכתוב עבור מקרה זה את (2.35) במפורש:

$$(v^1 \ v^2 \ \dots \ v^m) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = (Av^1, Av^2, \dots Av^m)$$

תשווה עמודה ימנית לשמאלית נקבל את (2.36).

הוקטורים $v^2 \dots v^m$ המקימים את (2.36) נקראים וי-ים מוכללים.

הערה: יש להדגיש שהשמוש ב-(2.36) הוא בצורת "נסה ושגה" שכן אין לנו ידענים מראש כי J_1 הוא

במתכנת שב- (2.34).

2.6.6 דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 ; \quad \lambda_3 = 2$$

עבור העיץ החוזר λ_1 נקבל מ-(2.30)

$$n - \rho(\lambda_1 I - A) = 3 - 2 = 1$$

לכן ניתן למצוא רק וי-ע אחד הקשור ל- $\lambda = 1$.

היות ו-

$$\text{Adj}(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} (\lambda - 1)(\lambda - 2) & 0 & 0 \\ \lambda - 2 & (\lambda - 1)(\lambda - 2) & 0 \\ 3 + 2(\lambda - 1) & 3(\lambda - 1) & (\lambda - 1)^2 \end{pmatrix}^T$$

נקבל עבור $\lambda_1 = 1$:

$$\text{Adj}(\lambda_1 I - A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עבור $\lambda_3 = 2$:

$$\text{Adj}(\lambda_3 I - A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad v^3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

v^2 הוא וי"ע מוכלל שנבנה למצאו לפי (2.36):

$$(\lambda_1 I - A)v^2 = -v^1$$

הצבת המספרים נתן:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נקבל $v_2^2 = 1$; $v_3^2 = 0$. נבחר $v_1^2 = 0$ ולכן:

$$v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מכאן:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \bar{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הצבת הנייל ב-(2.33) נתן:

$$\bar{M}^{-1} A \bar{M} = J = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} J_1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

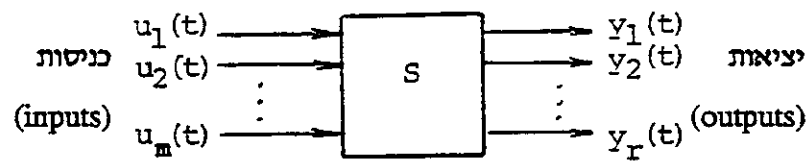
J_1 - הבלוק הקשור ל- $\lambda=1$ מתקבל במתכונת של (2.34).

פרק 3 : מרחב המצב (תאור פנימי של מערכות)

בפרק זה נעסוק בתאור מערכות דינמיות באמצעות משתני מצב.

I מערכות רציפות

3.1 נתונה המערכת הדינמית S.



צור 3.1

כאשר $u_i(t)$ הן הכניסות ו- $y_i(t)$ הן היציאות.

המערכת הדינמית S ניתנת לתאור על ידי משוואות דפרנציאליות רגילות ליניאריות עם מקדמים קבועים או תלויים בזמן.

מערכת MIMO ליניארית תתואר על ידי סט המשוואות הדיפרנציאליות:

$$\sum_{i=0}^{n_k} a_{ki} y_k^{(i)} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^{n_{kj}} b_{kji} u_j^{(i)} \quad k = 1, \dots, r \quad (3.1)$$

כאשר m - מספר הכניסות

r - מספר היציאות

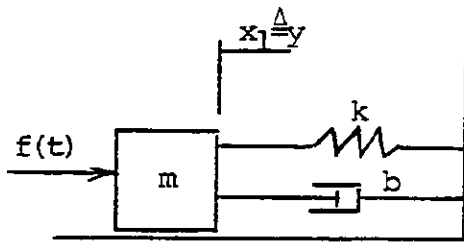
$$y^{(i)} \triangleq \frac{d^i y}{dt^i} \quad -1$$

מערכת SISO ליניארית תתואר על ידי המשוואה:

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^m b_i u^{(i)} \quad (3.2)$$

מערכת קבועה בזמן (סטציונרית) - אם המקדמים a_{ki} ו- b_{kji} אינם תלויים בזמן.

3.2 משותני מצב - דוגמת מבווא



ציור 3.2:

נתונה המערכת קפיץ מסה ומרסן שבציור 3.2.

המערכת מונעת על ידי הכח $f(t)$.

המשוואה הדיפרנציאלית:

$$(3.3) \quad m\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + kx_1 = f(t)$$

m - מסה

b - מקדם רסון

k - קבוע הקפיץ

נסמן את מקומה הרגעי של המסה על ידי x_1 , ואת מהירותה הרגעית על ידי $\dot{x}_1$. ניתן אז לכתוב את (3.3) על

די שתי משוואות מסדר ראשון:

$$(3.4) \quad \dot{x}_1 \triangleq x_2$$

$$(3.5) \quad \dot{x}_2 \triangleq \ddot{x}_1 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}f(t)$$

$$\text{נסמן: } u(t) \triangleq f(t) \quad (\text{כניסה})$$

$$y(t) \triangleq x_1(t) \quad (\text{יציאה})$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : \text{ ונבחר וקטור } x$$

נרשום את (3.4) ו-(3.5) בצורה מטריציונית:

$$(3.6) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

המבנה (3.6) ניתן לרישום בצורה כללית:

(3.7)

משוואת המצב	$\dot{x} = Ax + Bu$
משוואת היציאה	$y = Cx + Du$

כאשר:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{(n \times 1)} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{(n \times n)}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}_{(m \times 1)} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}_{(n \times m)}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}_{(r \times 1)} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rn} \end{bmatrix}_{(r \times n)} \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{r1} & \dots & d_{rm} \end{bmatrix}_{(r \times m)}$$

וכאשר:

x - וקטור המצב ($x \in R^n$)

u - וקטור המניעה ($u \in R^m$)

y - וקטור היציאה ($y \in R^r$)

3.3 הגדרות:

(א) מצב מערכת דינמית - סט של n משתנים $x_1(t) \dots x_n(t)$ הנקראים משתני מצב כך שתנאי ההתחלה

של סט זה $x_i(t_0)$ ($i = 1, \dots, n$), והכניסות למערכת $u_j(t)$ ($j = 1, \dots, m$) (עבור $t \geq t_0$), קובעים חד

משמעית את התנהגות המערכת עבור $t \geq t_0$.

הערות:

- (1) קיים מינימום של משתני מצב הדרוש לתאור מערכת.
- (2) משתני המצב אינם חייבים להיות גדלים בעלי משמעות פיזיקלית הניתנים לעקיבה או למדידה. הללו עשויים להיות גדלים מתמטיים.
- (3) בחירת משתני המצב או הצגת המערכת באמצעות משתני מצב אינה יחידה. את אותה המערכת ניתן להציג באמצעות סטים שונים של משתני מצב כפי שטראה בהמשך.

- (ב) וקטור המצב - הסט של כל משתני המצב $x_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) אשר ניתן להציגו באמצעות וקטור n מימדי $x(t)$.

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

- (א) מרחב המצב - זהו המרחב ה- n -מימדי שבו רכיבי וקטור המצב מהווים את צירי הקואורדינטות.
- (ד) ממוש המערכת (ריאליזציה) - הצגת מערכת דינמית בצורה (3.7) נקראת ממוש או ריאליזציה.
- (ה) מימד המערכת - מימד וקטור המצב (מסי משתני המצב).
- (ו) ממוש מינימלי - ממוש בו מימד וקטור המצב הוא המינימלי הדרוש לתאור המערכת בצורה (3.7).

3.4 הערות להצגת המערכת במרחב המצב

- (1) ההצגה (3.7) היא סט של משוואות מסדר ראשון במשתני המצב (מערכת SISO המתוארת על ידי (3.2) תתואר בדרך כלל במרחב המצב על ידי n משוואות מסדר ראשון).
- (2) במערכת סטציונרית המטריצות A B C ו- D קבועות.
- במערכת התלויה בזמן המטריצות $A(t)$ $B(t)$ $C(t)$ ו- $D(t)$ תלויות בזמן. (כולן או חלקן).
- (3) במערכת חפשית (שאינה מאולצת - $u \equiv 0$):

$$\dot{x} = Ax$$

$$y = Cx \quad (3.8)$$

הראשית $x = 0$ היא אז נקודת שווי משקל.

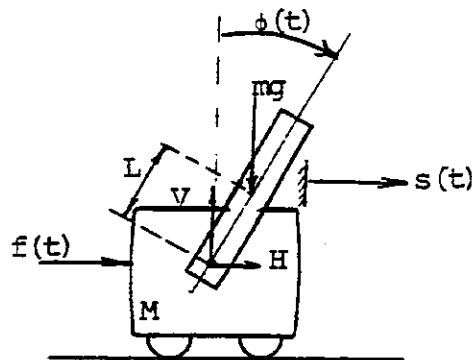
- (4) במערכת SISO (u ו- y סקלרים) המטריצה B היא וקטור עמודה b והמטריצה C הינה וקטור שורה c .

3.5 בחירת משתני מצב

אין דרך יחידה לבחור את משתני המצב. ניתן לבחור משתני מצב בעלי משמעות פיזיקלית כמו למשל בדוגמא 3.2 (שם x_1 - מקומה הרגעי של המסה m ו- x_2 מהירותה הרגעית) או בצורה שיטתית ישירות מהמשוואות הדיפרנציאליות.

כתיבת מימושים על ידי בחירת משתני מצב פיזיקליים איננה פשוטה לעיתים. אפילו במערכות SISO (משוואה 3.2) אין זה טריביאלי להגיע למשוואות מצב אם מופיעות באגף הימני נגזרות הכניסה (קח כדוגמא את (3.2) ונסה לחזור על התהליך שבדוגמא 3.2).

במסגרת סעיף זה נביא שני ממושים "שיטתיים" שניתן להגיע אליהם ישירות מהמשוואות הדיפרנציאליות. דהיינו, ניתן לכתוב את אברי המטריצות A, B, C, D ישירות מתוך מקדמי המשוואות הדיפרנציאליות. מימושים מסוג זה נקראים מימושים קנוניים. שני הממושים הקנוניים שנביא יוצגו עבור מערכות SISO בלבד. קבלת מימושים קנוניים עבור מערכות MIMO מורכבת יותר ולא נעסוק בה בקורס זה.



ציור 3.3

3.5.1 בחירה פיזיקלית - דוגמא (מטוטלת הפוכה)

צירה של מטוטלת הפוכה רתום לעגלה

הנעה אפקית כתוצאה מפעולת כוח $f(t)$

(הכניסה למערכת). המרחק האפקי של העגלה ברגע t

מסומן על ידי $s(t)$. ההעתק הזויתי של המטוטלת כרגע

$\phi(t)$ - מסת המטוטלת - m , מומנט האינרציה

שלה סביב מרכז הכובד - J , מסת העגלה - M .

העגלה מפעילה על המטוטלת בציר כוחות ראקציה:

כח אפקי - $H(t)$ וכח אנכי - $V(t)$.

μ - מקדם החכוך הויסקוזי בין העגלה למשור האפקי.

משוואות התנועה:

המטוטלת:

$$(3.9a) \quad m \frac{d^2}{dt^2} [s(t) + L \sin \phi(t)] = H(t)$$

$$(3.9b) \quad m \frac{d}{dt} [L \cos \phi(t)] = V(t) - mg$$

$$(3.9c) \quad J \frac{d^2 \phi}{dt^2} = LV(t) \sin \phi(t) - LH(t) \cos \phi(t)$$

$$(3.9d) \quad M \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = f(t) - H(t) - \mu \frac{ds(t)}{dt} \quad \text{העגלה:}$$

ובצורה מפורשת:

$$(3.10a) \quad m\ddot{s} - mL\dot{\phi}^2 \sin \phi + mL\ddot{\phi} \cos \phi = H$$

$$(3.10b) \quad -mL\dot{\phi} \sin \phi - mL\dot{\phi}^2 \cos \phi = V - mg$$

$$(3.10c) \quad J\ddot{\phi} = LV \sin \phi - LH \cos \phi$$

$$(3.10d) \quad M\ddot{s} = f - H - \mu s$$

חלוץ H ו-V מתוך (3.10a) ו-(3.10b) והצבה ב-(3.10c) מביאים ל:

$$J\ddot{\phi} = L \sin \phi (-mL\dot{\phi} \sin \phi - mL\dot{\phi}^2 \sin \phi + mg) - L \cos \phi (m\ddot{s} - mL\dot{\phi}^2 \sin \phi)$$

או

$$(3.11) \quad (J + mL^2)\ddot{\phi} - Lmg \sin \phi + (mL \cos \phi)\ddot{s} = 0$$

בהנחה ש- $m \ll M$ ניתן להזניח את השפעת H על תנועת העגלה.

משוואה (3.10d) תתן לכן:

$$(3.12) \quad M\ddot{s} + \mu \dot{s} = f$$

משוואות (3.11) ו-(3.12) הינן משוואות התנועה של המערכת. משוואה (3.11) אינה ליניארית. אבל אם נתמקד

בחקירת תנועת המערכת באזור סביב $\phi = 0$ נוכל לקבל מערכת משוואות ליניאריות.

עבור $\phi \sim 0$ נכתוב: $\cos \phi = 1$; $\sin \phi = \phi$

ונקבל:

$$\frac{J + mL^2}{mL} \ddot{\phi} - g\phi + \ddot{s} = 0$$

$$M\ddot{s} + \mu \dot{s} = f$$

$$(J + mL^2) / mL = L'$$

נסמן:

ונקבל לבסוף:

$$L' \ddot{\phi} - g\phi + \ddot{s} = 0$$

(3.13)

$$M\ddot{s} + \mu\dot{s} = f$$

מטרתנו להציג המערכת הנ"ל באמצעות משתני מצב פזיקליים. נבחר לכן:

$$x_1 \triangleq s ; \quad x_2 \triangleq \phi ; \quad x_3 \triangleq \dot{s} ; \quad x_4 \triangleq \dot{\phi} ; \quad u \triangleq f$$

ומכאן משוואות המצב:

$$\dot{x}_1 = \dot{s} = x_3$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\phi} = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{s} = -\frac{\mu}{M} \dot{s} + \frac{1}{M} f = -\frac{\mu}{M} x_3 + \frac{1}{M} u$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{\phi} = \frac{g}{L'} \phi - \frac{1}{L'} \ddot{s} = \frac{g}{L'} x_2 - \frac{1}{L'} \left(-\frac{\mu}{M} x_3 + \frac{1}{M} u \right) = \frac{g}{L'} x_2 + \frac{\mu}{ML'} x_3 - \frac{1}{ML'} u$$

$$x \triangleq (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T$$

ואם

אז:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu}{M} & 0 \\ 0 & \frac{g}{L'} & \frac{\mu}{ML'} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{ML'} \end{pmatrix} u$$

(3.14)

משוואת היציאה תלויה כמובן בהגדרת היציאה.

$$y = x_2$$

אם נבחר $y = \phi$ אז:

$$y = (0 \ 1 \ 0 \ 0) x$$

ולכן:

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

אם נבחר $y = \begin{pmatrix} s \\ \phi \end{pmatrix}$ יהיה:

ולכן משוואת היציאה במקרה זה תהיה:

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

אם נבחר

$$y = \begin{pmatrix} s \\ s + 2\phi \\ \dot{s} - 3\dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_3 - 3x_4 \end{pmatrix}$$

תהיה משוואת היציאה

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} x$$

ובאם נבחר:

$$y = \begin{pmatrix} \bar{s} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} =$$

נקבל:

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\mu}{M} & 0 \\ 0 & g/L' & \frac{\mu}{ML'} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/M \\ -1/ML' \end{pmatrix} u$$

3.5.2 בחירה שיטתית (הצורה המלווה - Companion Form)

צורה זו גם נקראת "ממוש קונוני בקר".

נכתוב את (3.2) באמצעות האופרטור $D \triangleq \frac{d}{dt}$.

$$(3.15) \quad \sum_{i=0}^n a_i D^i y = \sum_{i=0}^n b_i D^i u$$

מבלי לאבד מהכלליות נניח כי:

$$a_n = 1$$

אם נגדיר:

$$P(D) = \sum_{i=0}^n a_i D^i \quad ; \quad Q(D) = \sum_{i=0}^n b_i D^i$$

נקבל:

$$(3.16) \quad P(D)y = Q(D)u$$

נגדיר משתנה חדש v כך ש-

$$(3.17) \quad P(D)v = \sum_{i=0}^n a_i v^{(i)} = u$$

נכפול (3.17) ב- $Q(D)$:

$$Q(D) P(D)v = Q(D)u = P(D)y$$

ולכן:

$$(3.18) \quad y = Q(D)v = \sum_0^n b_i v^{(i)}$$

עתה נבחר את משתני המצב כך ש:

$$(3.19) \quad \dot{x}_i = x_{i+1} = v^{(i)} \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

או באופן מפורש:

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = \dot{v} \\ \dot{x}_2 &= x_3 = \ddot{v} \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n = v^{(n-1)} \end{aligned}$$

ב-(3.20) חסרה משוואת המצב של $\dot{x}_n$. את $\dot{x}_n$ נקבל מ-(3.17).

$$(3.21) \quad \dot{x}_n = v^{(n)} = -a_0 v - a_1 \dot{v} \dots - a_{n-1} v^{(n-1)} + u$$

(זכור כי הנחנו $a_n=1$) או

$$(3.22) \quad \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 \dots - a_{n-1} x_n + u$$

את (3.20) ו-(3.22) נכתוב בצורה מלוכדת:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_B u \quad (3.23)$$

את משוואת היציאה נקבל מתוך (3.18), (3.20) ו-(3.21):

$$y = (b_0 - a_0 b_n) x_1 + (b_1 - a_1 b_n) x_2 + \dots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_n) x_n + b_n u$$

או

$$y = \underbrace{(b_0 - a_0 b_n, b_1 - a_1 b_n, \dots, b_{n-1} - a_{n-1} b_n)}_C x + \underbrace{b_n}_D u \quad (3.24)$$

הממוש (3.23) ו-(3.24) נקרא בשם הצורה המלווה. ידיעת מקדמי המשוואה הדיפרנציאלית (3.2), (או (3.15): a_i, b_i ($i = 1, \dots, n$) עם $a_n = 1$) מאפשרת כתיבת הממוש ישירות מהמשוואה הדיפרנציאלית.

מקרה פרטי:

במערכות פיזיקליות רבות הנגזרת הגבוהה ביותר של הכניסה, u , נמוכה מהנגזרת הגבוהה ביותר של היציאה y .

במילים אחרות אם המשוואה הדיפרנציאלית נתונה על ידי:

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^m b_i u^{(i)} \quad (3.25)$$

ו-

$$m \leq n-1 \quad (3.26)$$

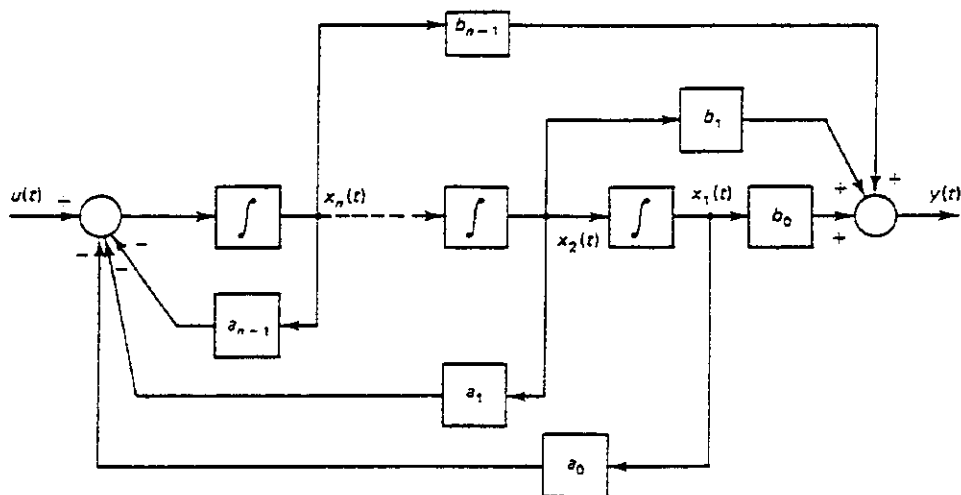
אז $b_n = 0$

ומשוואת היציאה (3.24) תהיה:

$$y = \underbrace{(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})}_C x \quad (3.24a)$$

הערות:

1. בממוש בצורה המלווה:
 - א. הוקטור B אינו תלוי במקדמי המשוואה. כל אפסים פרט לאיבר האחרון השווה ל-1. (כאשר הנחנו $a_n = 1$)
 - ב. $n-1$ השורות הראשונות במטריצה A אינן תלויות במקדמי המשוואה.
 - ג. במקרים בהם $b_n = 0$ אברי הוקטור C הם מקדמי נגזרות הכניסה (ראה (3.24a)), ו- $d = 0$.
 - ד. אם $b_n \neq 0$ אזי $d = b_n$ (ראה (3.24)).
2. עבור מערכת SISO המתוארת על ידי משוואה דיפרנציאלית מסדר n התקבל שמימד וקטור המצב הוא n . פרט למקרים מיוחדים זהו המימד המינימלי של וקטור המצב הדרוש. על המקרים המיוחדים נעמוד בפרק מאוחר יותר.
3. סכימת הבלוקים של הממוש עבור $a_n = 1$ ו- $b_n = 0$ נתונה בציור 3.4. האלמנט הדינמי היחיד בסכימה זו הם n אינטגרטורים. פרט לאלו יש בסכימה כופלים (בקבוע) ושני מסכמים. האינטגרטור, הכופל בקבוע והמסכם הם אלמנטים בסיסיים של מחשב אנלוגי. אי לכך סכימת הבלוקים בציור 3.4 היא סכמת הבלוקים לדמיון (סימולציה) המערכת על מחשב אנלוגי. יתרה מכך, אם ברצוננו "ליצר" מערכת הנוהגת לפי משוואה דיפרנציאלית כמו (3.2), נרכיבה לפי סכימת בלוקים זו.



ציור 3.4

דוגמא:

נחזור לדוגמת המטוטלת והעגלה ב-(3.5.1).

אם נכתוב את (3.13) באמצעות האופרטור D :

$$(D^2 - g/L')\phi = -\frac{1}{L'}D^2s$$

$$(MD^2 + \mu D)s = u$$

ונחלץ את s מהמשוואה השנייה ונציבה לראשונה נקבל את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$(3.27) \quad \ddot{y} + \frac{\mu}{M}\dot{y} - (g/L')\bar{y} - \frac{g\mu}{L'M}\dot{y} = -\frac{1}{ML'}\bar{u}$$

כאשר הגדרנו:

$$y \triangleq \phi ; \quad u \triangleq f$$

משוואה (3.27) היא משוואה דיפרנציאלית אחת המתארת את המערכת עגלה + מטוטלת.

במשוואה זו:

$$n = 4 ; \quad a_4 = 1 ; \quad a_3 = \frac{\mu}{M} ; \quad a_2 = -\frac{g}{L'} ; \quad a_1 = -\frac{g\mu}{L'M} ; \quad a_0 = 0$$

$$b_4 = b_3 = b_1 = b_0 = 0 ; \quad b_2 = -\frac{1}{ML'}$$

אם נציב ערכים אלו ב-(3.23) וב-(3.24) נקבל את הממוש בצורה המלווה למערכת זו:

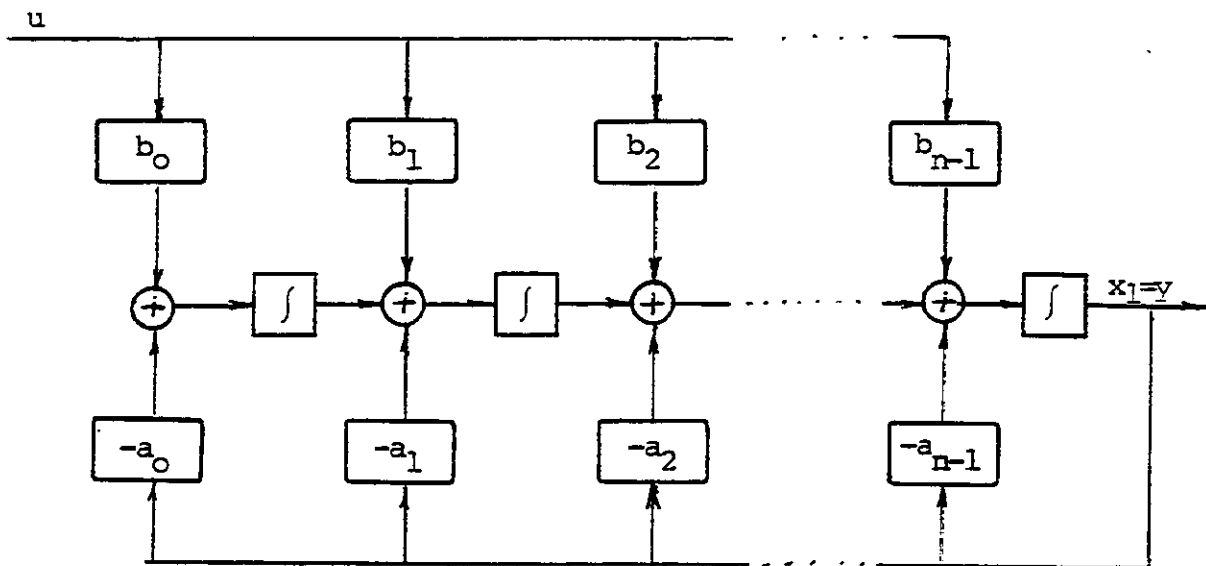
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{g\mu}{L'M} & \frac{g}{L'} & -\frac{\mu}{M} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (0, 0, -\frac{1}{ML'}, 0) x$$

3.5.3 בחירה שיטתית (צורת המשערך - Observer form)

זהו ממוש שונה מהקודם אשר ניתן להגיע אליו בדרך דומה לפיתוח הקודם.

סכימת הבלוקים של מימוש זה (עבור $a_n = 1$ ו- $b_n = 0$) נתונה בציור 3.5.



צמד 3.5:

מטריצות הממוש בצורה קנונית זו הן (עבור $b_n \neq 0$ ו- $a_n = 1$):

$$(3.28) \quad A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_{n-1} - a_{n-1}b_n \\ b_{n-2} - a_{n-2}b_n \\ \vdots \\ b_0 - a_0b_n \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad d = b_n$$

דוגמא - מטוסלת הפוכה :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{M} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g}{L} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{g\mu}{L'M} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ML} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0]x = x_1$$

3.5.4 סיכום

מספר רב של מערכות ניתנות לתאור על ידי סט של משוואות דיפרנציאליות מהצורה:

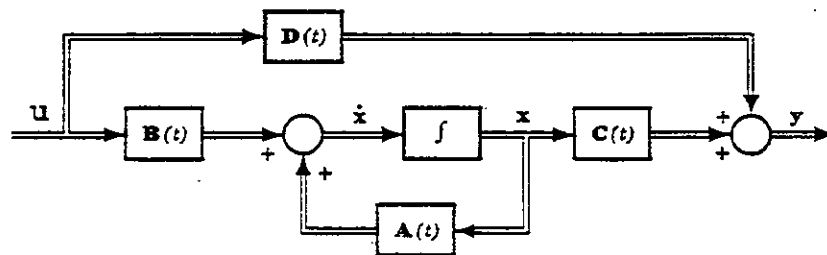
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f[x(t), u(t), t] \\ y(t) &= g[x(t), u(t), t]\end{aligned}\quad (3.29)$$

כאשר x - וקטור המצב, f - וקטור פונקציות, u - וקטור הכניסה ו- y וקטור היציאה.
אנו הצגנו בפרק זה את המקרים בהם f ו- g הינן פונקציות ליניאריות. במקרים אלו ההצגה (3.29) תהיה:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}\quad (3.30)$$

עבור מערכות תלויות בזמן. אם המערכת סטציונרית נקבל את (3.7).

סכימת הבלוקים של (3.7) או (3.30) נתונה על ידי:



ציור 3.6:

II. מערכות בדידות

3.6 מערכות בדידות ניתן לסווג לשתי קבוצות:

- א. מערכות בדידות מיסודן כמו מחשב דיגיטלי, פילטר דיגיטלי, מערכות מונטריות, מערכות מלאי. במערכות כאלו בוחנים התנהגות המערכת בזמנים בדידים בלבד t_i ($i = 1, 2, \dots$).
- ב. מערכות בדידות הנובעות מבחינת מערכות רציפות בזמנים בדידים. גישה זו נקטת בדרך כלל כאשר מערכת דינמית מורכבת מצרף של מערכות בדידות ורציפות. מקרה אופייני הן מערכות בקרה בהן מבוקר תהליך רציף על ידי בקר דיגיטלי.

3.7 המערכת הדינמית הבדידה הליניארית ניתנת להאור על ידי משוואות הפרשים:

מערכת MIMO:

$$(3.31) \quad \sum_{i=0}^{n_p} a_{pi} y_p(k+i) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^{n_{pj}} b_{pji} u_j(k+i) \quad p = 1, \dots, r$$

כאשר:

u_j - הרכיב ה- j של וקטור הכניסה ($j=1, 2, \dots, m$)

y_p - הרכיב ה- p של וקטור היציאה ($p=1, 2, \dots, r$)

$V(k+i)$ - ערך V ברגע t_{k+i} .

מערכת SISO:

$$(3.32) \quad \sum_{i=0}^n a_i y(k+i) = \sum_{i=0}^n b_i u(k+i)$$

3.8 את המערכות הבדידות ניתן להציג במרחב המצב באופן אקוילנטי למערכות רציפות:

$$x(i+1) = f[x(i), u(i), i]$$

(3.33)

$$y(i) = g[x(i), u(i), i]$$

כאשר:

$x(i)_{n \times 1}$ - וקטור המצב ברגע t_i .

$u(i)_{m \times 1}$ - וקטור הכניסה ברגע t_i .

$y(i)_{r \times 1}$ - וקטור היציאה ברגע t_i .

אם המערכת (3.33) ליניארית תלויה בזמן תהינה משוואות המצב והיציאה של המערכת נתונות על ידי:

$$x(i+1) = A(i)x(i) + B(i)u(i)$$

(3.34)

$$y(i) = C(i)x(i) + D(i)u(i)$$

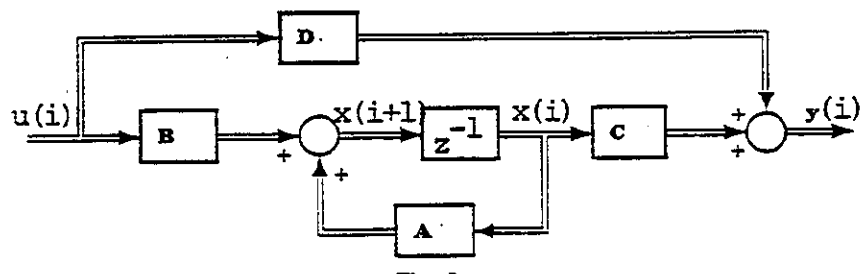
ובאם המערכת (3.34) אינה תלויה בזמן (סטציונרית):

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i)$$

(3.35)

$$y(i) = Cx(i) + Du(i)$$

3.9 סכימות הבלוקים של (3.34) ו-(3.35) נתונה על ידי:



צור 3.7:

כאשר z הוא אופרטור הזזה קדימה אשר הוגדר ב-(1.46), (1.47).

3.10 בחירת משתני מצב (ממוש מערכות בדידות):

גם במערכות בדידות כמו במערכות רציפות ניתן לממש המערכת על ידי בחירת משתני מצב עם משמעות פיזיקלית או בצורה שיטתית.

3.10.1 בחירה פיזיקלית (דוגמא)

נשתמש בדוגמת תכניות החסכון (1.4.3.4). אם בדוגמא זו הכניסה $u(i)$ והיציאה $y(i)$ מוגדרות כדלהלן:

$u(i)$ - סך ההפקדות בחדש ה- i .

$y(i)$ - מאזן כללי בתחילת החדש ה- i .

נוכל לבחור משתני מצב פיזיקליים כך:

$x_1(i)$ - מאזן חשבון החסכון בתכנית א' בתחילת החדש ה- i .

$x_2(i)$ - מאזן חשבון החסכון בתכנית ב' בתחילת החדש ה- i .

מכאן:

$$x_1(i+1) = (1+\alpha)x_1(i) + 0.6u(i)$$

$$x_2(i+1) = (1+\beta)x_2(i) + 0.4u(i)$$

-1

$$y(i) = x_1(i) + x_2(i)$$

המשוואות הנ"ל הן במתכונת של משוואות המצב (3.35):

$$x(i+1) = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & 1+\beta \end{pmatrix} x(i) + \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} u(i)$$

$$y(i) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(i)$$

כאשר :

$$x(i) \triangleq \begin{pmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \end{pmatrix}$$

3.10.2 בחירה שיטתית - ממושים קנתיים.

בדומה למערכות רציפות גם כאן ניתן לכתוב ממושים שונים ישירות מתוך משוואות ההפרשים. יתרה מזאת, מטריצות הממושים תהיינה זהות לאלו שקבלנו במערכות רציפות. כלומר, אם המערכת הבדידה

נתנה על ידי משוואת ההפרשים (3.32) אזי ממוש המערכת בצורה המלווה יתקבל עם A, B, C, D -

כב- (3.23) ו- (3.24a) ובצורת המשעך כב- (3.28). גם סכימות הבלוקים של שני ממושים אלו (ציורים 3.4 ו-

3.5) יהיו זהים אם כל אינטגרטור יוחלף באלמנט ההשהיה z^{-1} .

דוגמא: (המשך דוגמא 3.10.1).

נמצא משוואת הפרשים אחת הקושרת היציאה $y(i)$ והמניסה $u(i)$ על ידי שמוש באופרטור z .

$$z x_1(i) = (1+\alpha) x_1(i) + 0.6u(i)$$

$$z x_2(i) = (1+\beta) x_2(i) + 0.4u(i)$$

או:

$$x_1(i) = \frac{0.6}{z - (1+\alpha)} u(i) \quad ; \quad x_2(i) = \frac{0.4}{z - (1+\beta)} u(i)$$

ונציב במשוואת היציאה :

$$y(i) = x_1(i) + x_2(i) = \left(\frac{0.6}{z - (1+\alpha)} + \frac{0.4}{z - (1+\beta)} \right) u(i)$$

לכן:

$$[z^2 - (2+\alpha+\beta)z + (1+\alpha)(1+\beta)] y(i) = [z - 1 - (0.6\beta + 0.4\alpha)] u(i)$$

או:

$$\begin{aligned} y(i+2) - \underbrace{(2+\alpha+\beta)}_{a_1} y(i+1) + \underbrace{(1+\alpha)(1+\beta)}_{a_0} y(i) &= \\ &= u(i+1) - \underbrace{[1 + 0.6\beta + 0.4\alpha]}_{b_0} u(i) \end{aligned}$$

ומכאן שהממוש בצורה המלווה יהיה:

$$x(i+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1+\alpha)(1+\beta) & (2+\alpha+\beta) \end{pmatrix} x(i) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(i)$$

$$y(i) = [- (1+0.6\beta+0.4\alpha), 1] x(i)$$

3.11 טרנספורמציות ליניאריות של ממושים

ראינו כי למערכת פיזיקלית עשוי להיות מספר רב של ממושים. נראה זאת בצורה כללית יותר:

נניח כי המערכת הדינמית S מתוארת על ידי הממוש הבא:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

(3.36)

$$y = Cx(t) + Du(t)$$

נבצע שינוי משתנים על ידי טרנספורמציה לא סינגולרית באמצעות המטריצה $T_{n \times n}$ ($\det T \neq 0$):

$$(3.37) \quad x(t) = T\bar{x}(t)$$

נציב (3.37) ב-(3.36):

$$T \dot{\bar{x}} = AT \bar{x} + Bu$$

$$y = CT \bar{x} + Du$$

נכפול הייל ב- T^{-1} ונקבל:

$$\dot{\bar{x}} = T^{-1}AT\bar{x} + T^{-1}Bu$$

$$y = CT\bar{x} + Du$$

$$(3.38) \quad \bar{A} \triangleq T^{-1}AT ; \quad \bar{B} \triangleq T^{-1}B ; \quad \bar{C} \triangleq CT ; \quad \text{נסמן:}$$

ונקבל:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u$$

$$(3.39) \quad y = \bar{C}\bar{x} + Du$$

(3.39) הינו ממוש אחד של אותה מערכת עם וקטור מצב חדש $\bar{x}$. היות וישנן הרבה מטריצות T לא-סינגולריות בחרו שיש אין סוף ממושים לאותה מערכת.

3.12 הערות:

1. מ-(3.37) אנו רואים כי $\bar{A}$ סימלרית ל- A . מסקנה - בכל ממושי אותה המערכת המטריצות A סימלריות.
2. למרות שישנם אינסוף ממושים למערכת לא תמיד ניתן לקבל ממוש רצוי מסוים (ראה להלן סעיף (3.13)).
3. וקטורי היציאה y , והכניסה u אינם תלויים כמובן בממוש.

דוגמא:

בדוגמת המבוא בסעיף (3.2) קבלנו את הממוש הפיזיקלי הבא עבור המערכת המכנית (קפיץ מסה ומרסן).

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \quad 0) x$$

ברצוננו לקבל ממוש אחר בו

$$\bar{x}_1 = x_1 + x_2 = y + \dot{y}$$

$$\bar{x}_2 = x_1 - x_2 = y - \dot{y}$$

מכאן

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x = T^{-1} x$$

ולכן

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

לפי (3.38) נקבל:

$$\bar{A} = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}(k+b) & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}(k-b) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2m}(k+b) & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2m}(k-b) \end{pmatrix}$$

$$\bar{B} = T^{-1} B = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C} = C T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

והממוש החדש יהיה נתון לכן על ידי:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} u$$

$$y = \bar{C} \bar{x}$$

נראה כי היציאה y במשוואה האחרונה אינה תלויה בממוש: נציב $\bar{C}$ ו- $\bar{x}$ במפורש במשוואת היציאה

האחרונה:

$$y = \bar{C}\bar{x} = \frac{1}{2}\bar{x}_1 + \frac{1}{2}\bar{x}_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2) = x_1 = y$$

3.13 קבלת ממושים מלוקסניס.

בעיה: ברצוננו להתמיר ממוש נתון

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu$$

$$(3.40) \quad y = Cx + Du$$

לממוש:

$$\dot{\bar{x}} = \Lambda\bar{x} + B_d u$$

$$(3.40)' \quad y = C_d \bar{x} + D_d u$$

בו Λ היא מטריצה אלכסונית הנתונה על ידי:

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

כאשר λ_i הם העיג של A ב-(3.40).

בפרק 2 הכרנו את התנאים עבורם ניתן ללכסן את המטריצה A . ראינו גם שלא תמיד ניתן ללכסנה. כאשר A לא ניתנת ללכסון ניתן להביאה לצורת גיורדן. הממוש המלוקסן באותם מקרים בהם לא ניתן ללכסן את A הוא דוגמא לממוש שלא ניתן להגיע אליו.

באותם מקרים בהם A ניתנת ללכסון נקבל את (3.40) מ-(3.40), אם המטריצה T שב-(3.37) תהיה המטריצה המודלית M . נקבל אז:

$$(3.41) \quad \Lambda = M^{-1}AM ; B_d = M^{-1}B ; C_d = CM ; D_d = D$$

במקרים בהם לא ניתן ללכסן את A תהיה המטריצה M בחלקה מורכבת מו"ע מוכללים. אם נשתמש אז בקשרים שב-(3.41) יתקבל הממוש:

$$\dot{\bar{x}} = J\bar{x} + B_J u$$

$$(3.42) \quad y = C_J \bar{x} + D_J u$$

הערות:

- (1) יתרונו של הממוש המלוקסן הוא בכך שמשוואות המצב בממוש זה אינן מצומדות.
- (2) למימושים (3.40) ו-(3.42) חשיבות רבה בהבנת וחקירת תכונות מערכות.

3) לממש המלוכסן במקרה הבדיד תכונות נמריות טובות יותר מאשר למימושים אחרים (כמו למשל הממש בצורה המלווה).

3.14 "לכסוף" A עם ע"ע מורכבים.

למרות שבמערכות הנדסיות למטריצה A אלמנטים ממשיים, יופיעו מספרים קומפלקסיים בתהליך הלכסון במערכות להן ע"ע קומפלקסיים צמודים. למשל, במערכת מסדר שניים עם ע"ע-ים $\sigma \pm j\omega$ ($\sigma \geq 0, \omega > 0$) תתקבל הצורה האלכסונית של A בצורה :

$$(3.43) \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -\sigma + j\omega & 0 \\ 0 & -\sigma - j\omega \end{pmatrix}$$

הוקטורים העצמיים, של המטריצה A, יהיו גם הם וקטורים קומפלקסיים צמודים:

$$(3.44) \quad v^1 = \alpha + j\beta \quad v^2 = \alpha - j\beta$$

כאשר α ו- β הם וקטורים ממשיים.

בחלק מהשמושים ההנדסיים רצוי שלא להשתמש בגדלים קומפלקסיים. במקרים אלו משתמשים בטרנס-פורמציה הבאה:

$$(3.45) \quad x = T_m \bar{x}$$

$$(3.46) \quad T_m = (\alpha, \beta) \quad \text{כאשר}$$

המטריצה $\bar{A}$ המתקבלת תסומן על ידי Λ_m ותתנה על ידי (עבור המערכת מסדר II)

$$(3.47) \quad \Lambda_m = T_m^{-1} A T_m = \begin{pmatrix} -\sigma & \omega \\ -\omega & -\sigma \end{pmatrix}$$

דוגמא: נתונה המטריצה A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הבא מטריצה זו לצורה מלוכסנת ללא ערכים קומפלקסיים.

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

פתרון:

$$\lambda_1 = j \quad \lambda_2 = -j \quad \lambda_3 = -2$$

הע"ע נתונים על ידי:

הוקטורים העצמיים נתונים על ידי:

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 2j \end{pmatrix} \quad v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ -2j \end{pmatrix} \quad v^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v^1 = \alpha + j\beta \quad v^2 = \alpha - j\beta \quad \text{לכן:}$$

כאשר:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

מכאן

$$T_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (\alpha \quad \beta \quad v^3)$$

$$\Lambda_m = T_m^{-1} A T_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 0 \\ -1 & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$$

אלו היינו מלכסנים את A על ידי המטריצה המודלית היינו מקבלים:

$$\Lambda = M^{-1} A M = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3.15 מציאת שווי-משקל במערכות ליניאריות סטציונריות

3.15.1 מערכות רציפות

נתונה המערכת הליניארית הסטציונרית:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$(3.48) \quad y = Cx + Du$$

עבור $u = u_e = \text{const}$ תגיע המערכת בתנאים מסוימים למצב שווי-משקל. (התנאי הנדרש הוא יציבותה האסימפטוטית של המערכת. על נושא זה נעמד בפרק מאוחר יותר). מצב שווי משקל, x_e , מוגדר על ידי:

$$(3.49) \quad \dot{x}_e = 0 = Ax_e + Bu_e \quad t \geq t_0$$

אם מגיעה המערכת לשווי המשקל הרי x_e נתון על ידי:

$$(3.50) \quad x_e = -A^{-1}Bu_e$$

היציאה y_e נתונה אז על ידי:

$$(3.51) \quad y_e = (-CA^{-1}B + D)u_e$$

הערות:

1. אם $u_e = 0$ (מערכת חפשית) יהיה x_e נתון תמיד על ידי: $x_e = 0$

2. אם המערכת יציבה אסימפטוטית A אינה סינגולרית.

3.15.2 מערכות בדידות

נתונה המערכת:

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i$$

$$(3.52) \quad y_i = Cx_i + Du_i$$

באם $u_i = u_e = \text{const}$ תגיע (3.52) לשווי משקל, במידה והמערכת יציבה אסימפטוטית.

במצב שווי משקל יתקיים:

$$(3.53) \quad x_{i+1} = x_i = x_e$$

הצבת (3.53) ב-(3.52) תתן:

$$x_e = (I - A)^{-1}Bu_e$$

$$(3.54) \quad y_e = (C(I - A)^{-1}B + D)u_e$$

הערות:

(1) אם $u_e = 0$ (מערכת חפשית) יהיה x_e נתון תמיד על ידי:

$$(3.55) \quad x_e = 0$$

(2) אם המערכת יציבה אסימפטוטית $\det(I - A) \neq 0$

3.16 ליניאריות סביב נקודות שווי משקל

3.16.1 משואות המצב הליניאריות (3.7) או (3.30) הינן מקרה פרטי של משואות המצב הלא-ליניאריות (3.29):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$(3.29) \quad y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

משואות המצב (3.29) הינן משואות וקטוריות לא ליניאריות תלויות בזמן. אם המערכת הלא ליניארית הינה סטציונרית נקבל במקום (3.29) את:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

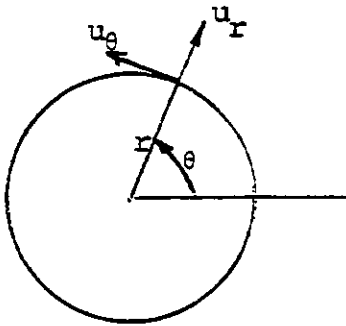
$$(3.56) \quad y(t) = g(x(t), u(t))$$

3.16.2 דוגמא

חללית בעלת מסה m נעה בתנועה דו-ממדית במסלול מעגלי נומינלי סביב כדור-הארץ. רדיוס

המסלול הנומינלי r_0 ומהירות הסבוב היא ω_0 .

משואות התנועה של החללית נתונות על ידי:



$$(3.57) \quad \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{K}{r^2} = \frac{1}{m} u_r$$

$$(3.58) \quad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{m} u_\theta$$

צור 3.8:

כאשר u_r - דחף רדיאלי ו- u_θ דחף משיקי.

באמצעות u_r ו- u_θ שולטים על תנועת החללית.

אם נבחר וקטור המצב לפי:

$$x^T = (r, \dot{r}, \dot{\theta})$$

ואת וקטור הכניסה:

$$u^T = (u_1, u_2) = (u_r, u_\theta)$$

תתקבלנה משואות המצב המתאימות:

$$\dot{x}_1 = \dot{r} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{K}{r^2} + \frac{1}{m}u_r = x_1 x_3^2 - \frac{K}{x_1^2} + \frac{1}{m}u_1$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{1}{mr}u_\theta = -\frac{2x_2 x_3}{x_1} + \frac{1}{mx_1}u_2$$

או:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 x_3^2 - \frac{K}{x_1^2} + \frac{1}{m}u_1 \\ -\frac{2x_2 x_3}{x_1} + \left(\frac{1}{mx_1}\right)u_2 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

משוואה (3.59) היא בדיוק במתכונת של (3.56).

3.163 במידה והמערכת הלא-ליניארית (3.56), פועלת באזור קרוב לנקודת שווי-משקל כלשהי ניתן בתנאים מסוימים "להפוך" את (3.56) או (3.29) למשוואה ליניארית על ידי ליניאריזציה סביב נקודת שווי-משקל.

המדרג: נקודה (או נקודות) שווי משקל, x_e , של (3.56) מוגדרת על ידי:

$$\dot{x}_e = f(x_e, u_e) = 0 \quad (3.60)$$

כאשר u_e שווה לוקטור אפס או לוקטור קבוע.

הצחת: ל- $f(\cdot)$ נגזרות ראשונות רציפות ביחס ל- x ול- u .

ממצב שווי משקל נבצע "הפרות קטנות" כדלקמן:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_e + \delta x(t) \quad ; \quad u(t) = u_e + \delta u(t) \\ \dot{x}(t) &= \dot{x}_e + \overset{0}{\delta \dot{x}(t)} \quad ; \quad (\delta \dot{x}(t)) = \frac{\Delta}{dt} \delta x(t) \end{aligned} \quad (3.61)$$

נציב את (3.61) לתוך (3.56) ונקבל:

$$(3.62) \quad \dot{\delta x}(t) = f(x_e + \delta x, u_e + \delta u)$$

עקב ההנחה נוכל לכתוב את (3.62) בצורה:

$$(3.63) \quad \dot{\delta x} = f(x_e, u_e) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_e, u_e} \delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x_e, u_e} \delta u + h(x_e, u_e, \delta x, \delta u)$$

כאשר :

$$(3.64) \quad \frac{\partial f}{\partial x} (n \times n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial f}{\partial u} (n \times m) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix}$$

ו- $h(\cdot)$ הוא איבר שארית.

הנחה:

$$(3.65) \quad \lim_{\substack{\|\delta x\| \rightarrow 0 \\ \|\delta u\| \rightarrow 0}} \frac{h(\delta x, \delta u)}{\|\delta x\|} = \lim_{\substack{\|\delta x\| \rightarrow 0 \\ \|\delta u\| \rightarrow 0}} \frac{h(\delta x, \delta u)}{\|\delta u\|} = 0$$

הערה: באם $f(\cdot)$ ניתנת לפתוח לטור טיילור סביב (x_e, u_e) אזי $h(\cdot)$ מייצגת את החזקות של δx ,

δu מהחזקה השנייה ומעלה. במקרה זה הנחה (3.65) מתקיימת תמיד.

לכן, באיזור קרוב "מספיק" ל- x_e ועבור ערכים "קטנים" של $\|\delta u\|$ המערכת (3.56) תהיה נתונה על ידי:

$$(3.66) \quad \dot{\delta x} = A \delta x + B \delta u$$

כאשר:

$$(3.67) \quad A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_e, u_e} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x_e, u_e}$$

3.16.4 דוגמא: המשך דוגמת החללית (3.16.2)

נמצא x_e עבור $u_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\dot{x}_e = 0 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 x_3^2 - K / x_1^2 \\ -2x_2 x_3 / x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{1,e} \\ \dot{x}_{2,e} \\ \dot{x}_{3,e} \end{pmatrix}$$

מקבלים $x_{2,e} = 0$. כדי ש- $x_{1,e} x_{3,e}^2 - K / x_{1,e}^2 = 0$ יהיה שווה ל-0 עם $x_{1,e} = r_0$, $x_{3,e} = \omega_0^{-1}$.
 $K = r_0^3 \omega_0^2$ חייב לקיים

$$x_e^T = (r_0, 0, \omega_0)$$

מכאן:

עתה נמצא A ו-B לפי (3.67) ו-(3.64) ונקבל:

$$(\delta x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 2r_0\omega_0 \\ 0 & -2\omega_0/r_0 & 0 \end{pmatrix} \delta x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/m & 0 \\ 0 & 1/mr_0 \end{pmatrix} \delta u$$

(3.68)

$$\delta x = x - x_e; \quad \delta u = u - u_e$$

כאשר:

משוואה (3.68) היא המשוואה הליניארית המתארת את דינמיקת החללית בקרבת המסלול הנומינלי.

3.165 ליניאריזציה של משוואת היציאה.

בין אם משוואות המצב הן ליניאריות ובין אם אינן ליניאריות משוואות היציאה עשויות להיות לא ליניאריות. במידה ומשוואות היציאה אינן ליניאריות הן תהיינה נתונות בצורה כללית על ידי:

$$(3.69) \quad y = g(x, u, t) \quad y \in R^r$$

או במקרה הסטציונרי:

$$(3.70) \quad y = g(x, u)$$

אם:

$$(3.71) \quad y_e = g(x_e, u_e)$$

תגדיר:

$$(3.72) \quad \delta y \triangleq y - y_e$$

נקבל בדרך דומה לזו שבאמצעותה קבלנו את (3.66), משוואת יציאה ליניארית הנתונה על ידי:

$$(3.73) \quad \delta y = C \delta x + D \delta u$$

כאשר:

$$C_{r \times n} \triangleq \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{x_e, u_e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x_e, u_e}$$

$$D_{r \times m} \triangleq \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{x_e, u_e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial u_1} & \dots & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial u_m} \end{pmatrix}_{x_e, u_e}$$

(3.74)

3.16.6 דוגמא: המשך דוגמת החללית

אם וקטור היציאה y מוגדר למשל על ידי:

$$y = \begin{pmatrix} r\dot{\theta} \\ r\dot{\theta}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ x_1 x_3^2 \end{pmatrix} = g(x)$$

נקבל מ-(3.74):

$$C_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3^2 & 0 & 2x_1 x_3 \end{pmatrix}_{x_e} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 & 0 \\ \omega_0^2 & 0 & 2r_0 \omega_0 \end{pmatrix}$$

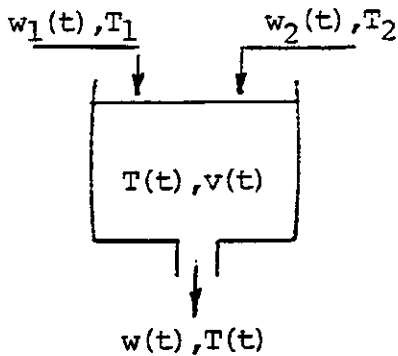
-1

$$D_{2 \times 2} = 0$$

או:

$$\delta y = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 & 0 \\ \omega_0^2 & 0 & 2r_0 \omega_0 \end{pmatrix} \delta x$$

3.16.7 דוגמה



למיכל מוזרמים בו זמנית שני נוזלים בספיקות נפחיות משתנות בזמן $w_1(t)$ ו- $w_2(t)$. שני נוזלים אלה מוחזקים בטמפרטורות קבועות T_1 ו- T_2 בהתאמה. הנוזל עוזב את המיכל בספיקה $w(t)$ וטמפרטורה $T(t)$. הנוזל במיכל מעורבב היטב כך שניתן להניח כי טמפרטורות הנוזל היוצא שווה לטמפרטורת הנוזל במיכל. המיכל הינו בעל חתך מלבני אחד ושטח החתך הינו S . נפח הנוזל במיכל הוא $v(t)$ והספיקה היוצאת $w(t)$ מהמיכל תלויה בנפח הנ"ל לפי:

$$w(t) = K \left[\frac{v(t)}{S} \right]^{1/3}$$

א. גיח שהצפיפות והחום הסגולי של הזרמים הנכנסים והנוזל במיכל שוים וקבועים, ונרשום מאזני

מסה וחם.

מאזן מסה:

$$w_1 + w_2 - w = \frac{dv}{dt}$$

מאזן חום:

$$w_1 \rho C T_1 + w_2 \rho C T_2 - w \rho C T = \rho C \frac{d}{dt}(vT)$$

כאשר ρ , C הינם הצפיפות והחום הסגולי בהתאמה.

$$\frac{dv}{dt} = w_1 + w_2 - \frac{K}{S^{1/3}} v^{1/3}$$

$$\frac{d}{dt}(vT) = v \frac{dT}{dt} + T \frac{dv}{dt} = w_1 T_1 + w_2 T_2 - wT$$

חלוץ $\dot{v}$ מהמשוואה הראשונה והצבתו בשניה מביאה ל:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{w_1 T_1}{V} + \frac{w_2 T_2}{V} - \frac{wT}{V} - \frac{T}{V} \frac{dV}{dt} = \\ &= \frac{w_1 T_1}{V} + \frac{w_2 T_2}{V} - \frac{wT}{V} - \frac{T}{V} (w_1 + w_2 - w) = \\ &= \frac{w_1(T_1 - T)}{V} + \frac{w_2(T_2 - T)}{V}\end{aligned}$$

נבחר:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} V \\ T \end{bmatrix}$$

-1

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

ובאמצעות x ו- u נקבל:

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} -K(x_1/S)^{1/3} + u_1 + u_2 \\ \frac{u_1(T_1 - x_2)}{x_1} + \frac{u_2(T_2 - x_2)}{x_1} \end{bmatrix}$$

(ב) נתון כי במשך זמן רב היו הספיקות w_1 , w_2 קבועות. מהם ערכי T_e , V_e בשווי משקל, כאשר נתונים

הערכים המספריים הבאים ביחידות מתאימות:

$$w_{1,e} = 0.02; \quad w_{2,e} = 0.04; \quad T_1 = 10; \quad T_2 = 70; \quad S = 1; \quad K = 0.03$$

הצבה נתון:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0.06 - 0.03x_1^{1/3} \\ \frac{0.02(10 - x_2)}{x_1} + \frac{0.04(70 - x_2)}{x_1} \end{bmatrix}$$

בהנחה שהמערכת מגיעה לשווי-משקל אזי $\dot{x}_e = 0$. נקבל לכן,

$$(x_1)_e^{1/3} = \frac{0.06}{0.03} = 2$$

$$v_e = (x_1)_e = 8$$

$$0.02(10 - x_{2e}) + 0.04(70 - x_{2e}) = 0$$

$$(x_2)_e = T_e = \frac{3}{0.06} = 50$$

ג) יש לבצע ליניאריזציה של משוואות המצב סביב נקודת שווי המשקל (המצב המתמיד) ולמצא את המטריצות A, B של משוואות המצב הליניאריות המתארות את המערכת באזור קרוב לנקודת שווי המשקל. מתוך משוואות המצב הלא ליניאריות נקבל:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = - (0.03) \cdot \frac{1}{3} x_1^{-2/3} \Big|_e = - 0.01 \cdot 8^{-2/3} = - 0.0025$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = - \frac{1}{x_1^2} [0.02(10 - x_2) + 0.04(70 - x_2)]_e = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \left[\frac{-0.02 - 0.04}{x_1} \right]_e = - \frac{0.06}{8} = - 0.0075$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} = \frac{\partial f_1}{\partial u_2} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_1} = \left[\frac{10 - x_2}{x_1} \right]_e = \frac{10 - 50}{8} = - 5$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_2} = \left[\frac{70 - x_2}{x_1} \right]_e = \frac{70 - 50}{8} = 2.5$$

משוואות המצב הליניאריות יהיו לכן:

$$(\delta x) = A\delta x + B\delta u$$

כאשר:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0025 & 0 \\ 0 & -0.0075 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

δx ו- δu הן הסטיות ממצב שווי המשקל:

$$\delta x = x - x_e = \begin{bmatrix} x_1 - 8 \\ x_2 - 50 \end{bmatrix}$$

$$\delta u = u - u_e = \begin{bmatrix} u_1 - 0.02 \\ u_2 - 0.04 \end{bmatrix}$$

(ד) נתון $y \triangleq \begin{pmatrix} h \\ T \end{pmatrix}$ כאשר h הינו גובה הנזל במיכל.

נמצא h_e - הגובה במצב מתמיד.

היחס ו-

$$h = \frac{v}{S} = v \quad (S = 1)$$

אזי:

$$h_e = \frac{v_e}{S} = 8$$

ומכאן

$$\delta y_1 = h - h_e = v - 8 = x_1 - 8 = \delta x_1$$

$$\delta y_2 = T - T_e = x_2 - (x_2)_e = \delta x_2$$

ולכן

$$\delta y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta x$$

3.16.8 מערכות בדידות

בדומה למערכות רציפות תתוארנה מערכות בדידות במרחב המצב כב- (3.33)

$$x_{i+1} = f(x_i, u_i, i)$$

$$(3.33) \quad y_i = g(x_i, u_i, i)$$

ובמקרה הסטציונרי על ידי:

$$x_{i+1} = f(x_i, u_i)$$

$$(3.75) \quad y_i = g(x_i, u_i)$$

נקודות שווי משקל, x_e , של (3.75) מוגדרות על ידי:

$$(3.76) \quad x_e = f(x_e, u_e)$$

הלניאריזציה של (3.75) סביב x_e מתבצעת באותו אופן ובאותם תנאים כמו במערכות רציפות. הווה

אומר שהמערכת הלניארית המתקבלת נתונה על ידי:

$$(\delta x)_{i+1} = A(\delta x)_i + B(\delta u)_i$$

$$(3.77) \quad (\delta y)_i = C(\delta x)_i + D(\delta u)_i$$

כאשר:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e, u_e} ; \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_e, u_e}$$

$$C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x_e, u_e} ; \quad D = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x_e, u_e}$$

$$(3.78) \quad \delta x = x - x_e ; \quad \delta u = u - u_e ; \quad \delta y = y - y_e$$

3.16.9 דוגמה

נתונה המערכת הבדידה:

$$y_{k+2} + y_{k+1}^2 + y_k^2 = u_k$$

על ידי הגדרת משתני המצב הבאים:

$$x_1(k) = y(k)$$

$$x_2(k) = y(k+1)$$

נקבל:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} x_2(k) \\ -x_1^2(k) - x_2^2(k) + u(k) \end{pmatrix} = f(x(k), u(k))$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(k)$$

כאשר:

$$x \triangleq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

נמצא את נקודות שווי המשקל x_e עבור $u_e = 1$:

$$x_e = f(x_e, u_e) = \begin{pmatrix} x_{2,e} \\ -x_{1,e}^2 - x_{2,e}^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,e} \\ x_{2,e} \end{pmatrix}$$

לכן:

$$x_{2,e} = x_{1,e} \triangleq \bar{x}$$

-1

$$\bar{x} = -2\bar{x}^2 + 1$$

או:

$$2\bar{x}^2 + \bar{x} - 1 = 0$$

ומכאן:

$$\bar{x}_a = -1 \quad \bar{x}_b = 1/2$$

לכן למערכת שתי נקודות שווי משקל:

$$(x_e)_a = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad (x_e)_b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

נבצע ליניאריזציה של המערכת סביב נקודות שווי המשקל:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2x_{1,e} & -2x_{2,e} \end{pmatrix} ; \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן בנקודה a למשל נקבל את המערכת הליניארית:

$$(\delta \mathbf{x})_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} (\delta \mathbf{x})_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta u_k$$

$$(\delta y)_k = (1 \quad 0) (\delta \mathbf{x})_k$$

כאשר:

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e = \mathbf{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad \delta u = u - 1$$

$$\delta y = y - y_e = y - (-1)$$

פרק 4 : פולינומים ופונקציות של מטריצות

4.1

פתרון משוואות המצב (שהוצגו בפרק הקודם) כרוך בחישוב פונקציות של מטריצות. נציג בפרק זה בקיצור נמרץ דרכים לחשוב פונקציות אלו. החומר המובא כאן כולל רק את עקרי הדברים ואין הוא בא אלא לצורך רענון.

4.1.1 חזקות של מטריצה

אם A מטריצה רבועית אזי נדיר:

$$\underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_k \triangleq A^k$$

$$A^0 = I \quad -$$

$$A^k \cdot A^m = A^{k+m} \quad \text{ומכאן}$$

$$(A^k)^m = A^{km}$$

$$(A^{-1})^m = A^{-m} \quad \text{ואם } \det A \neq 0 \text{ אזי}$$

4.1.2 פולינום במטריצה A

נתון פולינום $N(\lambda)$ במשתנה הסקלרי λ :

$$N(\lambda) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i$$

אם בפולינום הנ"ל נחליף את λ במטריצה הרבועית A נקבל פולינום ב- A :

$$N(A) = \sum_{i=0}^n c_i A^i \quad (4.1)$$

4.1.3 פולינום אינסופי במטריצה A

עבור $A_{n \times n}$ נדיר:

$$S(A) = a_0 I_n + a_1 A + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \quad (4.2)$$

ניתן להראות שהפולינום האינסופי (4.2) מתכנס אם כל הטורים הסקלריים $S(\lambda_i)$ ($i=1,2,\dots,n$) מתכנסים עבור כל העיץ λ_i של A .

4.14 מטריצת האקספוננט - e^A

A - מטריצה רבועית $(n \times n)$.

e^A מוגדרת על ידי הטור האינסופי:

$$(4.3) \quad e^A \triangleq I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} A^i / i!$$

מההגדרה הנ"ל נובע:

$$(4.3a) \quad e^0 = I$$

אם $AB = BA$ (A ו- B קומוטטיביות) אזי:

$$(4.4) \quad e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A = e^{A+B}$$

במקרה הכללי:

$$e^A \cdot e^B \neq e^B \cdot e^A$$

אם ב-(4.4) נציב $B = -A$ ונשתמש ב-(4.3a) נקבל:

$$e^A \cdot e^{-A} = e^0 = I$$

מכאן:

$$(4.5) \quad (e^A)^{-1} = e^{-A}$$

מהנ"ל נובע ש:

$$(4.6) \quad \det(e^A) \neq 0$$

כלומר מטריצת האקספוננט של כל מטריצה הינה מטריצה לא סינגולרית.

4.15 אם $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ ו- $N(\Lambda)$ נתון על ידי:

$$N(\Lambda) = \sum_{i=0}^n c_i \Lambda^i = c_0 I + c_1 \Lambda + \dots c_n \Lambda^n$$

קל להוכיח כי:

$$(4.7) \quad N(\Lambda) = \text{diag}(N(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} N(\lambda_1) & & 0 \\ & N(\lambda_2) & \\ 0 & & N(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

4.1.6 משפט: יהא $N(A)$ פולינום במטריצה $A_{n \times n}$:

$$(4.1) \quad N(A) = \sum_{i=0}^m c_i A^i$$

הנח כי ניתן ללכסן את $A_{n \times n}$ וכי M הינה המטריצה המודלית של A , אזי:

$$(4.8) \quad N(A) = MN(A)M^{-1}$$

הוכחה:

בפרק 3 משואה (3.41) ראינו כי $A = M\Lambda M^{-1}$.

מכאן:

$$(4.9) \quad A^2 = (M\Lambda M^{-1})(M\Lambda M^{-1}) = M\Lambda^2 M^{-1}$$

ועבור k שלם:

$$(4.10) \quad A^k = M\Lambda^k M^{-1}$$

נציב (4.10) ב-(4.1):

$$N(A) = \sum_{i=0}^m c_i M\Lambda^i M^{-1} = M \left(\sum_{i=0}^m c_i \Lambda^i \right) M^{-1} = MN(A)M^{-1}$$

□

הערה: ניתן להרחיב המשפט הנ"ל למקרה בו A אינה ניתנת ללכסון (אם A אינה פשוטה).

$$A = MJM^{-1} \quad \text{כאשר:}$$

J -ו היא תבנית גורדן אזי ניתן להראות כי:

$$N(A) = \sum_{i=0}^m c_i A^i = MN(J)M^{-1}$$

אם למשל:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix}$$

J_i הם הבלוקים של גורדן.

אזי $N(J)$ נתון על ידי:

$$N(J) = \begin{pmatrix} N(J_1) & & 0 \\ & N(J_2) & \\ 0 & & N(J_k) \end{pmatrix}$$

מסקנה: מהמשפט נובע שאם λ_i הוא עיץ של A אזי $N(\lambda_i)$ הינו עיץ של $N(A)$.

4.17 משפט קילי-המילטון (Caley-Hamilton)

נסמן ב- $\Delta(\lambda)$ את הפולינום האופייני של A דהיינו:

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

$$\Delta(\lambda_i) = 0$$

משפט: $\Delta(A) = 0$ (4.11)

כלומר: המטריצה A מקימת את המשוואה האופיינית של עצמה.

הוכחה: נוכיח המקרה בו A מטריצה פשוטה. נחליף ב-(4.8) את $N(A)$ ב- $\Delta(A)$ ונקבל:

$$\Delta(A) = M \begin{bmatrix} \Delta(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \Delta(\lambda_n) \end{bmatrix} M^{-1}$$

והיות ו- $\Delta(\lambda_i) = 0$ ($i=1, \dots, n$) נקבל את (4.11).

□

הערה: ניתן להראות ש-(4.11) נכונה גם במקרה הכללי יותר בו A אינה פשוטה.

4.18 מסקנה מהמשפט: כל פולינום $N(A)$ מסדר גבוה מ- $n-1$ ב- A (כאשר n סדר המטריצה הרבועית A)

ניתן להביע באמצעות פולינום $g(A)$ ב- A מסדר $n-1$ לכל היותר.

$$N(A) = A^4 + A^3 + A^2 + A + I \quad \text{דוגמה: נתון:} \quad 4.19$$

כאשר:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

ניתן לבטא את $N(A)$ על ידי פולינום $g(A)$ מסדר 1 ($n-1 = 2-1 = 1$) כדלהלן:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \text{המשוואה האופיינית של } A:$$

$$\Delta(A) = A^2 + 3A + 2I_2 = 0 \quad \text{לפי (4.11):}$$

$$A^2 = -3A - 2I \quad \text{או:}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = -15A - 14I \quad \text{לכן:}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = 7A + 6I \quad \text{ו-}$$

$$N(A) = g(A) = (-15A - 14I) + (7A + 6I) + (-3A - 2I) + A + I = \quad \text{מכאן:}$$

$$= -10A - 9I = \begin{pmatrix} -9 & -10 \\ 20 & 21 \end{pmatrix}$$

4.1.10 דוגמא: חשב A^{-1} עבור הדוגמא הקודמת:

נכפול את A^2 ($A^2 = -3A - 2I$) ב- A^{-1} ונקבל:
 $A = -3I - 2A^{-1}$
 ומכאן:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}(A + 3I) = \begin{pmatrix} -3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2 חשוב פונקציה (או פולינום) של מטריצה

נתון פולינום כלשהו $f(A)$ במטריצה הרבועית $A_{n \times n}$. ל- A m עי"ע נפרדים λ_i . העי"ע λ_i חוזר n_i פעמים.

לכן $n = \sum_{i=1}^m n_i$. נציג כאן שתי שיטות לחשוב $f(A)$.

I. שיטת קילי - המילטון

4.2.1 משפט: אם $\Delta(\lambda)$ הינה המשוואה האפיינית של A הנתונה על ידי:

$$(4.12) \quad \Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

ואם $f(\lambda)$ ו- $g(\lambda)$ הם פולינומים כלשהם ב- λ המקימים:

$$f^{(k)}(\lambda_i) = g^{(k)}(\lambda_i) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$(4.13) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n_i - 1$$

כאשר:

$$f^{(k)}(\lambda_i) \triangleq \frac{d^k}{d\lambda^k} f(\lambda) \Big|_{\lambda = \lambda_i}$$

$$(4.14) \quad f(A) = g(A) \quad \text{אזי:}$$

4.2.2 מסקנה: מטרתנו לחשב את $f(A)$. לפי 4.1.8 (מסקנת משפט קילי-המילטון) $f(A) = g(A)$ כאשר

$g(A)$ פולינום מסדר $n-1$ ב- A . (4.13) הם n שוויונים שעל $g(\lambda)$ לקיים. אנו יודעים שניתן תמיד

לבנות פולינום $g(\lambda)$ מסדר $n-1$ אם נתונים n מספרים שעל פולינום זה לתת בערכים נתונים של

λ . לכן אם A מטריצה מסדר n אזי עבור כל פולינום $f(\lambda)$ נוכל לבנות פולינום $g(\lambda)$ מסדר

$n-1$ הנתון על ידי:

$$(4.15) \quad g(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \lambda^i = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1}$$

המקיים את n השויתים שב-(4.13) ולפי המשפט:

$$(4.16) \quad f(A) = g(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i$$

4.2.3 הערה: את המשפט הנ"ל ניתן להרחיב למקרה בו $f(\lambda)$ הוא פונקציה ולא דוקא פולינום. לכן כל פונקציה במטריצה A ניתן לבטא על ידי פולינום $g(A)$ מסדר $n-1$ במטריצה A לפי (4.16) כאשר $g(\lambda)$ מקיים את (4.13).

4.2.4 סכום שלבי חישוב הפונקציה $f(A)$ בשיטת קילי-המילטון.

נתונה המטריצה $A_{n \times n}$ ונתונה הפונקציה (או הפולינום) $f(A)$.

א. מצא המשוואה האופינית של A :

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

וקבע את העיניים של A .

$$g(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \lambda^i \quad \text{ב. הנח:}$$

כאשר α_i קבועים לא ידועים.

ג. למציאת α_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) השתמש ב- n השויתים שב-(4.13):

$$f^{(k)}(\lambda_i) = g^{(k)}(\lambda_i) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$(4.13) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n_i - 1$$

(הנגזרות שב-(4.13) הן ביחס ל- λ).

ד. הצב ה- α_i ב-(4.16).

4.2.5 דוגמאות:

א) נתונה המטריצה A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

חשב: $f(A) = e^{At}$

א.

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)(\lambda + 2) \quad ; \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

ב. $n = 2$ לפי :

$$g(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$

$$f(\lambda) = e^{\lambda t}$$

ג. מ-(4.13) נקבל:

$$f(-1) = g(-1) ; \quad e^{-t} = \alpha_0 - \alpha_1$$

$$f(-2) = g(-2) ; \quad e^{-2t} = \alpha_0 - 2\alpha_1$$

פתרון שתי המשוואות הנ"ל עבור α_0 ו- α_1 נותן:

$$\alpha_0 = 2e^{-t} - e^{-2t} ; \quad \alpha_1 = e^{-t} - e^{-2t}$$

ד.

$$e^{At} = g(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -2\alpha_1 & -3\alpha_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ -2\alpha_1 & \alpha_0 - 3\alpha_1 \end{pmatrix}$$

הצבת α_0 ו- α_1 בני"ל:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}) & -(e^{-t} - 2e^{-2t}) \end{pmatrix}$$

2) עבור A שבדוגמה 1 חשב $f(A) = A^k$.

$$\lambda_1 = -1 ; \quad \lambda_2 = -2$$

א.

ב.

$$g(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$

$$f(\lambda) = \lambda^k$$

ג.

$$f(-1) = g(-1); \quad (-1)^k = \alpha_0 - \alpha_1$$

$$f(-2) = g(-2); \quad (-2)^k = \alpha_0 - 2\alpha_1$$

$$\alpha_0 = 2(-1)^k - (-2)^k; \quad \alpha_1 = (-1)^k - (-2)^k$$

ד.

$$\begin{aligned} A^k = g(A) &= \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ -2\alpha_1 & \alpha_0 - 3\alpha_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2(-1)^k - (-2)^k & (-1)^k - (-2)^k \\ -2(-1)^k + 2(-2)^k & -(-1)^k + 2(-2)^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) דוגמה עם שרשים חוזרים.

נתונה המטריצה A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = e^{At} \quad \text{חשב:}$$

א. היות ו-A בתבנית גודון אזי $\lambda_1 = 1$ ($n_1 = 2$); $\lambda_2 = 2$

ב. $n = 3$, לכן

$$g(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2$$

$$f(\lambda) = e^{\lambda t} \quad \text{ג.}$$

$$f(1) = g(1); \quad e^t = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$$

$$f'(\lambda) \Big|_{\lambda=1} = g'(\lambda) \Big|_{\lambda=1}; \quad te^{\lambda t} \Big|_{\lambda=\lambda_1} = (\alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_1} = te^t = \alpha_1 + 2\alpha_2$$

$$f(2) = g(2); \quad e^{2t} = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2$$

במקרה זה לא כדאי לפתור את שלושת המשוואות הנ"ל עבור α_i .

.7

$$e^{At} = g(A) = \alpha_0 I_3 + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 & 2\alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 4\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + 2\alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

II. שיטת סילוסטר (Sylvester)

בשיטה זו נציג רק את דרך חישוב $f(A)$. במקום נתונה $A_{n \times n}$ ולה m עיץ נפרדים λ_i . מספר חזרות

λ_i

4.26 חישוב $f(A)$ כאשר ל- A n עיץ נפרדים.

$$(4.17) \quad f(A) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) Z(\lambda_i)$$

כאשר:

$$(4.18) \quad Z(\lambda_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (A - \lambda_j I) / \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_i - \lambda_j) \right)$$

4.27 חישוב $f(A)$ כאשר ל- A עיץ חוזרים.

$$(4.19) \quad f(A) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{(n_i - 1)!} \left\{ \frac{d^{n_i - 1}}{d\lambda^{n_i - 1}} \left[\frac{f(\lambda) \text{Adj}(\lambda I - A)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (\lambda - \lambda_j)} \right] \right\} \right)_{\lambda = \lambda_i}$$

1) שרשים נפרדים: חשב $f(A) = e^{At}$ עבור A שבדוגמה 1 (סעיף 4.2.5). $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

$$f(A) = f(\lambda_1)Z(\lambda_1) + f(\lambda_2)Z(\lambda_2)$$

$$Z(\lambda_1) = \frac{A - \lambda_2 I_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}{-1 - (-2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Z(\lambda_2) = \frac{A - \lambda_1 I_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{-2 - (-1)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

2) שרשים חוזרים

נמצא e^{At} עבור A שבדוגמה 3 בסעיף 4.2.5.

בדוגמה זו $\lambda_1 = 1, n_1 = 2; \lambda_2 = 2, n_2 = 1; m = 2$

$$\text{Adj}(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} (\lambda - 1)(\lambda - 2) & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & (\lambda - 1)(\lambda - 2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)^2 \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda) = e^{\lambda t}$$

מ- (4.19) נקבל לכן:

$$f(A) = \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{e^{\lambda t} \text{Adj}(\lambda I - A)}{\lambda - \lambda_2} \right]_{\lambda = \lambda_1} + \frac{e^{\lambda_2 t} \text{Adj}(\lambda_2 I - A)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$\frac{e^{\lambda t} \text{Adj}(\lambda_2 I - A)}{\lambda - 2} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}(\lambda - 1) & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t}(\lambda - 1) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{\lambda t}(\lambda - 1)^2}{\lambda - 2} \end{pmatrix}$$

$$\left. \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t}(\lambda - 1) \right|_{\lambda=\lambda_1} = [te^{\lambda t}(\lambda - 1) + e^{\lambda t}]_{\lambda=\lambda_1} = e^t$$

$$\left. \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t} \right|_{\lambda=\lambda_1} = te^{\lambda t} \Big|_{\lambda=\lambda_1} = te^t$$

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \frac{e^{\lambda t}(\lambda - 1)^2}{\lambda - 2} \right|_{\lambda=\lambda_1} = 0$$

לכן:

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \frac{e^{\lambda t} \text{Adj}(\lambda I - A)}{\lambda - 2} \right|_{\lambda=\lambda_1} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{e^{\lambda_2 t} \text{Adj}(\lambda_2 I - A)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{e^{2t}}{2 - 1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ומכאן:

$$f(A) = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

התוצאה זהה כמובן לזו שקבלנו באמצעות שיטת קילי-המילטון.

4.3 המטריצה e^{At}

בסעיף 4.1.4 הגדרנו את מטריצת האקספוננט ומנינו מספר מתכונותיה. עקב חשיבותה של מטריצת

האקספוננט נחזור על תכונותיה ונסיף תכונות נוספות.

4.3.1 המדרה:

$$(4.20) \quad e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots \dots$$

4.3.2 אם $A=0$ אזי מ-(4.20) נובע כי:

$$(4.21) \quad e^0 = I$$

4.3.3 היות ו- At ו- $(-At)$ קומוטטיביות הרי:

$$(4.22) \quad e^{At} \cdot e^{-At} = e^0 = I$$

ומכאן:

$$(4.23) \quad e^{-At} = (e^{At})^{-1}$$

4.3.4 מהנייל נובע כי:

$$(4.24) \quad \det(e^{At}) \neq 0$$

4.3.5

$$(4.25) \quad Ae^{At} = e^{At}A$$

את (4.25) קל להוכיח מהגדרת e^{At} שב-(4.20)

הערה: תכונה (4.25) היא מקרה פרטי של תכונה כללית יותר של פונקציות של אותה מטריצה: אם $f(A)$

ו- $g(A)$ הן פונקציות של A הרי:

$$(4.26) \quad f(A)g(A) = g(A)f(A)$$

4.3.6

$$(4.27) \quad \frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$$

כדי להוכיח את (4.27) נגזור את (4.20) לפי t :

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2!} + \dots = A(I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots) = Ae^{At}$$

4.3.7

$$(4.28) \quad e^{A(t_1 + t_2)} = e^{At_1} \cdot e^{At_2}$$

4.3.8 אם נבצע אינטגרציה של (4.20):

$$\int_0^t e^{A\tau} d\tau = \int_0^t (I + A\tau + \frac{1}{2!} A^2 \tau^2 + \dots) d\tau$$

נקבל:

$$\int_0^t e^{A\tau} d\tau = It + \frac{At^2}{2!} + \frac{A^2 t^3}{3!} + \dots$$

לכן:

$$(4.29) \quad A \int_0^t e^{A\tau} d\tau = e^{At} - I$$

ובאם A אינה סינגולרית

$$(4.30) \quad \int_0^t e^{A\tau} d\tau = (e^{At} - I)A^{-1}$$

פרק 5 : פתרון משוואות המצב בציר הזמן

א. מערכות רציפות

5.1 מערכת סטציונרית חפשית (פתרון הומוגני)

נתונה המערכת הסטציונרית החפשית:

$$(5.1a) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

עם תנאי ההתחלה:

$$(5.1b) \quad x(t_0)$$

5.1.1 פתרון (5.1) נתון בדומה למערכת סקלרית על ידי:

$$(5.2) \quad x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0)$$

5.1.2 ניתן לדא ש-(5.2) הוא פתרון של (5.1) על ידי גזירת (5.2) לפי t :

$$\dot{x}(t) = Ae^{A(t-t_0)} x(t_0) = Ax(t)$$

5.1.3 כדי להראות ש-(5.2) הינו פתרון יחיד נניח של (5.1) שני פתרונות שונים $x_1(t)$ ו- $x_2(t)$. הפרשם

$$z = x_1 - x_2 \text{ מקיים לכן:}$$

$$(5.3) \quad \dot{z} = Az \quad z(t_0) = x_1(t_0) - x_2(t_0) = 0$$

אבל פתרון (5.3) הוא $z(t) = 0$.

5.1.4 היות ו-(5.2) אינו תלוי ב- t וב- t_0 אלא בהפרש $t-t_0$ (תכונת הסטציונריות) ניתן לכן להזיז את ציר הזמן

כך ש- $t_0 = 0$. הפתרון בתנאים אלו יהיה:

$$(5.4) \quad x(t) = e^{At} x_0$$

כאשר:

$$x_0 \triangleq x(t=0)$$

5.1.5 מטריצת המעבר (Transition Matrix) - המטריצה e^{At} נקראת מטריצת המעבר של המערכת (5.1)

שכן היא מתארת את תנועת קצה וקטור המצב $x(t)$ במרחב המצב.

5.1.6 לצורך קבלת הפתרון (5.4) או (5.2) יש לחשב את e^{At} . את e^{At} ניתן לחשב באחת מהדרכים הבאות:

1. בשיטת קילי-המילטון (סעיף 4.2.4)
2. בשיטת סילוסטר (סעיפים 4.2.6 - 4.2.7)
3. באמצעות התמרת לפלס (ראה פרק 6)
4. על ידי לכסונה של A (או הבאתה לתבנית גזרדון) ושמוש בקשר:

$$(5.5) \quad e^{At} = \bar{M} e^{Jt} \bar{M}^{-1}$$

5.2 מערכת ססציונרית מאולצת (פתרון כללי)

5.2.1 נענה המערכת:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$(5.6) \quad y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

ותנאים $x(t_0)$, $u(t)$, $t \geq t_0$.

פתרון (5.6) נתון על ידי:

$$(5.7) \quad x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

5.2.2 היות וגם כאן תלוי הפתרון בהפרש $t-t_0$ נניח את ציר הזמן כך ש- $t_0 = 0$. הפתרון יהיה נתון על ידי:

$$(5.8) \quad x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

5.2.3 הפתרון (5.8) (וכמובן גם (5.7)) מקיים את המשוואה (5.6). זאת ניתן לבדוק על ידי גזירת (5.8) לפי t :

נכתוב (5.8) בצורה:

$$(5.9) \quad x(t) = e^{At} x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

נזור ענה את (5.9) לפי t :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ae^{At}x_0 + Ae^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau + e^{At}(e^{-At}Bu(t)) \frac{d}{dt}(t) \\ &= A(e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau) + Bu(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t)\end{aligned}$$

הערה: את האיבר הימני ב-(5.9) גזרנו לפי גזירת של מכפלה ובגזירת האינטגרל השתמשנו בכלל לייבניץ:

$$\frac{d}{dw} \left[\int_{v_1(w)}^{v_2(w)} f(x) dx \right] = f(v_2) \frac{dv_2}{dw} - f(v_1) \frac{dv_1}{dw}$$

5.2.4 ניתן להראות ש-(5.8) הוא פתרון יחיד של (5.6).

5.2.5 הפתרון (5.8) מהווה סופרפוזיציה של שני פתרונות:

האחד - עבור המערכת החופשית ($u(t) = 0$) הנקרא zero input response.

השני - עבור המערכת המאולצת עם תנאי התחלה 0 ($x_0 = 0$) הנקרא zero state response.

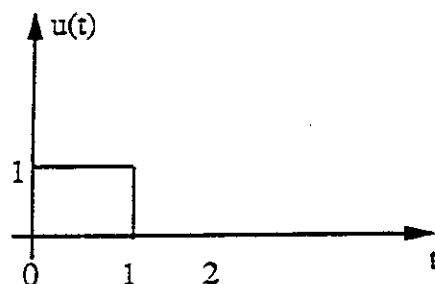
5.2.6 אם מציבים את הפתרון (5.8) במשוואת היציאה נקבל את הפתרון עבור וקטור היציאה :

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t) \quad (5.10)$$

5.2.7 דוגמה: נתונה מערכת SISO באמצעות המשוואה הדיפרנציאלית $\bar{y} = \dot{u} + u$.

א. ממש המערכת בצורה המלווה.

ב. מצא $x(t)$ ו- $y(t)$ עבור $t \geq 0$ אם נתון $x(0) = 0$ והכניסה $u(t)$ נתונה בציר.



פתרון:

פתרון:

א. ממש המערכת בצורה המלווה:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \ 1) x$$

ב. נחשב תחילה את e^{At} . את e^{At} ניתן כמובן לחשב לפי כל אחת מהדרכים שנלמדו בפרק 4.

$$e^{At} B = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{כי } A \text{ היא בתבנית-גזרן ידוע כי}$$

היות ו- $x(0) = 0$ יהיה פתרון משוואות המצב (לפי 5.9):

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

כיון ש- $u(t)$ אינה רציפה ב- t נציג שתי דרכים לפתרון.

דרך א: כאן נפתור תחילה עבור $0 \leq t \leq 1$ והיות ו- $u(t)=0$ עבור $t > 1$, נמצא את $x(1)$ מהנייל והמשך

הפתרון יהיה כפתרון מערכת חפשית החל מהזמן $t=1$:

עבור $0 < t \leq 1$ נקבל:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} t-\tau \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 \cdot d\tau = \begin{pmatrix} t\tau - \frac{\tau^2}{2} \\ \tau \end{pmatrix} \bigg|_0^t = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \end{pmatrix}$$

היות ופתרון זה תופס עבור $0 < t \leq 1$ נחשב את $x(1)$ על ידי הצבת $t=1$ ב- $x(t)$:

$$x(1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$u(t)=0$ עבור $t > 1$ לכן $x(t)$ עבור $t > 1$ יהיה נתון על ידי (ראה 5.2)

$$x(t) = e^{A(t-1)} x(1) = \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \geq 1$$

לכן סה"כ הפתרון:

$$x(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \end{pmatrix} & 0 \leq t \leq 1 \\ \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} & t \geq 1 \end{cases}$$

הצבת $x(t)$ במשוואת היציאה תביא ל:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} + t & 0 \leq t \leq 1 \\ t + \frac{1}{2} & t \geq 1 \end{cases}$$

דרך ב': את חלקו הראשון של הפתרון עבור $0 \leq t \leq 1$ נבצע כדרך א'. את הפתרון עבור $t \geq 1$ נמצא כדלהלן:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = \int_0^1 e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + \int_1^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

$$= \left(t\tau - \frac{\tau^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

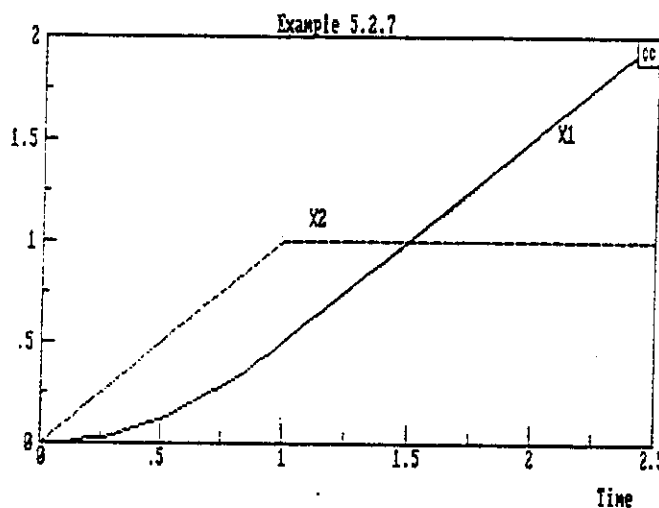
וזהו כמובן אותו הפתרון כדרך א'.

ההבדל בין שתי הדרכים הנ"ל הוא בכך שבדרך ב' לקחנו את זמן ההתחלה t_0 בשני השלבים כ- $t_0 = 0$ והשתמשנו בפתרון המאולץ (שכן $x_0 = 0$) - ראה סעיף 5.2.5. בדרך א' השתמשנו בתחום $0 \leq t \leq 1$

בפתרון המאולץ עם $t_0 = 0$ ו- $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ובתחום $t \geq 1$ השתמשנו בפתרון החופשי עם $t_0 = 1$ ו-

$$x(t_0 = 1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

התאור הגרפי של $x(t)$ כפונקציה של t נתון בציר:



5.3 אופני תנועה (מודים - modes) של מערכת

5.3.1 נתונה המערכת (5.1). נניח לצורך הפשטות של- A עיניים $(\lambda_i(A))$ נפרדים. M הינה המטריצה המודלית

של A . נסמן

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} r^1 \\ r^2 \\ \vdots \\ r^n \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

r^i הם הוקטורים העצמיים השמאליים של A . ($i = 1, \dots, n$)

אם נציב לפתרון (5.4) את (5.5) נקבל:

$$x(t) = Me^{At}M^{-1}x_0 = (v^1, v^2, \dots, v^n) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^1 \\ r^2 \\ \vdots \\ r^n \end{pmatrix} x_0$$

או:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} v^i \langle r^i, x_0 \rangle$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i e^{\lambda_i t} v^i \quad (5.12)$$

כאשר :

$$\mu_i \triangleq \langle r^i, x_0 \rangle \quad (5.13)$$

μ_i הינם סקלרים לכן $\mu_i v^i$ הינם וקטורים בכון v^i . ($i = 1, \dots, n$)

5.3.2 מסקנה - תגובת המערכת החופשית לפי (5.12) מורכבת מתנועות לאורך הוקטורים העצמיים v^i של A .

5.3.3 הגדרה: תנועה לאורך ריב נקראת בשם אופני תנועה או מוד (mode) של המערכת.

הביטוי $m_i(t) = e^{\lambda_i t} v^i$ הינו מוד. כל אלמנט של הוקטור $m_i(t)$ משתנה באותה צורה כפונקציה

של הזמן לפי $\mu_i \cdot e^{\lambda_i t}$ נקרא בשם מידת הערור של המוד ה- i .

5.3.4 סיכום: כאשר למערכת עיניים נפרדים $(\lambda_i \neq \lambda_j)$ אזי:

א. למערכת n מודים.

ב. כל מוד מעורב בשעור $\langle r^j, x_0 \rangle$. $\mu_j = \langle r^j, x_0 \rangle$. מידת הערור תלויה ב- x_0 .

ג. ערור של מוד אחד אינו תלוי בערור המודים האחרים.

ד. אם וקטור תנאי ההתחלה x_0 הינו בכיוון הריי v^j , למשל, דהיינו $x_0 = \alpha v^j$ (α קבוע) יעורר רק

המוד ה- j ($m_j = v^j e^{\lambda_j t}$) . מידת הערור תהיה $\mu_j = \alpha$ והפתרון יהיה:

$$(5.14) \quad x(t) = x_0 e^{\lambda_j t}$$

הוכחה:

אם $x_0 = \alpha v^j$ יהיה μ_j נתון על ידי:

$$(5.15) \quad \mu_j = \langle r^j, x_0 \rangle = \langle r^j, \alpha v^j \rangle = \alpha \langle r^j, v^j \rangle = \alpha$$

והיות:

$$(5.16) \quad \mu_i = \langle r^i, x_0 \rangle = \alpha \langle r^i, v^j \rangle = 0 \quad (i = 1, \dots, n, \quad i \neq j)$$

נקבל מהצבת (5.15) ו-(5.16) ב-(5.12):

$$x(t) = \mu_j v^j e^{\lambda_j t} = \alpha v^j e^{\lambda_j t} = x_0 e^{\lambda_j t}$$

□

5.3.5 המוד ה- i , m_i , הקשור לעיני λ_i יקרא מוד מהיר יחסית למוד ה- j , m_j , אם $|\lambda_i| > |\lambda_j|$.

5.3.6 הגדרה - מסלול (טריקטוריה) - מסלול שמתווה קצה וקטור המצב $x(t)$ במרחב המצב.

$$5.3.7 \quad \text{דוגמא: נתונה המערכת החופשית } \dot{x} = Ax \text{ עם } x_0 = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} \text{ ו- } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -4$$

-1

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad v^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$r^1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} ; \quad r^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

מידות הערוך μ_i תהינה לכן:

$$\mu_1 = \langle r^1, x_0 \rangle = \frac{4}{3} x_{1,0} + \frac{1}{3} x_{2,0}$$

$$\mu_2 = \langle r^2, x_0 \rangle = \frac{1}{3} x_{1,0} + \frac{1}{3} x_{2,0}$$

מכאן שהפתרון של המערכת יהיה:

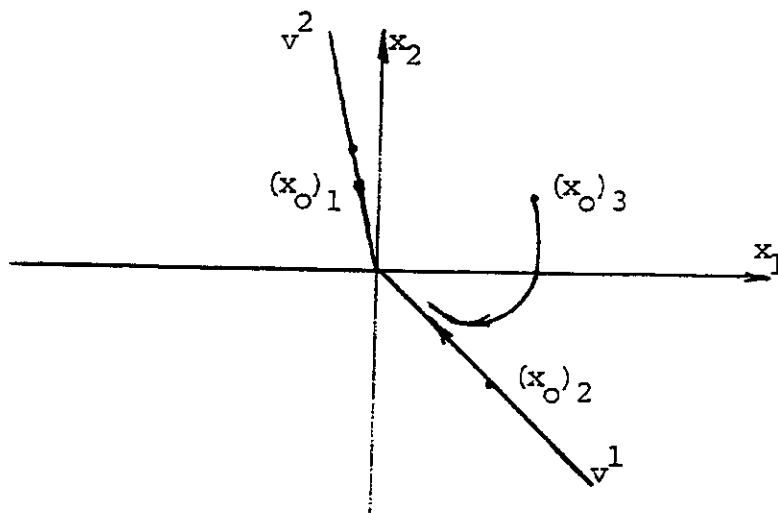
$$\begin{aligned} x(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i e^{\lambda_i t} v^i &= \left(\frac{4}{3} x_{1,0} + \frac{1}{3} x_{2,0} \right) e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{3} (x_{1,0} + x_{2,0}) e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.15)$$

או בצורה מפורשת:

$$x_1(t) = \left(\frac{4}{3} x_{1,0} + \frac{1}{3} x_{2,0} \right) e^{-t} - \frac{1}{3} (x_{1,0} + x_{2,0}) e^{-4t}$$

$$x_2(t) = - \left(\frac{4}{3} x_{1,0} + \frac{1}{3} x_{2,0} \right) e^{-t} + \frac{4}{3} (x_{1,0} + x_{2,0}) e^{-4t}$$

מסלולי הפתרון בדוגמה זו משלושה תנאי התחלה שונים $(x_0)_1$, $(x_0)_2$, ו- $(x_0)_3$ מוצגים בציור 5.1.



ציור 5.1

$(x_0)_1$ בכוחו של v^2 . אי לכך יעורר רק המוד $m_2 = v^2 e^{\lambda_2 t}$ ולפי (5.14) יהיה הפתרון נתון על ידי:

$$x(t) = (x_0)_1 e^{-4t}$$

$(x_0)_2$ בכוחו של v^1 לכן יעורר במקרה זה המוד m_1 והפתרון יהיה:

$$x(t) = (x_0)_2 e^{-t}$$

כאשר תנאי ההתחלה x_0 אינם מונחים לא על v^1 ולא על v^2 , כמו במקרה $(x_0)_3$, המסלול יהיה קומבינציה של שני המודים לפי (5.15). עבור t -ים קטנים יהיה כוון המסלול מקביל לכוון המוד המהיר (m_2 בדוגמה זו) ועבור t -ים גדולים יהיה כוון מקביל לכוון המוד האיטי (m_1) - ראה ציור. זאת היות ועבור t -ים קטנים השפעת e^{-4t} גדולה יותר מאשר השפעת e^{-t} ולהיפך עבור זמנים t גדולים.

5.3.8 מודים במערכת עם עיניים מדומים.

אם למערכת (5.1) עיני λ_1 הנתון על ידי $\lambda_1 = -\sigma + j\omega$ הרי עבור A ממשית יהיה λ_2 נתון על ידי

$$\lambda_2 = \lambda_1^* = -\sigma - j\omega \quad \text{הייעים המתאימים הם } v^1 \text{ ו- } v^2. \text{ יקוימו: } v^2 = v^{1*}.$$

$$\text{אם נסמן: } v^1 = \alpha + j\beta, \text{ יהיה } v^2 = \alpha - j\beta.$$

בפרק 3.14 ראינו כי אם נבצע למערכת (5.1) טרנספורמציה סימילרית מ- x ל- $\bar{x}$ באמצעות:

$$T_m = (\alpha, \beta)$$

תתקבל המערכת המותמרת בצורה:

$$\dot{\bar{x}} = \Lambda_m \bar{x} \quad (5.16)$$

כאשר:

$$\Lambda_m = T_m^{-1} A T_m = \begin{pmatrix} -\sigma & \omega \\ -\omega & -\sigma \end{pmatrix}$$

פתרון (5.16) יתן:

$$\bar{x}(t) = e^{\Lambda_m t} x_0 = e^{-\sigma t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} x_0 \quad (5.17)$$

אם נסמן את שורות T_m^{-1} על ידי:

$$T_m^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

ותתמיר (5.17) חזרה ל- x נקבל:

$$(5.18) \quad x(t) = T_m e^{\Lambda_m t} T_m^{-1} x_0 = e^{-\sigma t} (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} x_0$$

או:

$$(5.19) \quad x(t) = e^{-\sigma t} \{ \langle \gamma, x_0 \rangle [(\cos \omega t)\alpha - (\sin \omega t)\beta] + \langle \delta, x_0 \rangle [(\sin \omega t)\alpha + (\cos \omega t)\beta] \}$$

מ-(5.19) רואים בברור כי קיימים שני מודים.

האחד נתון על ידי:

$$m_1 = e^{-\sigma t} [(\cos \omega t)\alpha - (\sin \omega t)\beta]$$

והשני:

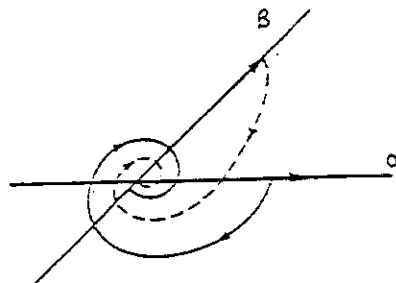
$$m_2 = e^{-\sigma t} [(\sin \omega t)\alpha + (\cos \omega t)\beta]$$

מידות הערוך של שני המודים נתונות על ידי:

$$\mu_1 = \langle \gamma, x_0 \rangle$$

$$\mu_2 = \langle \delta, x_0 \rangle$$

אם x_0 בכוונו של α יעורר m_1 בלבד ואם x_0 בכוונו של β יעורר המוד m_2 בלבד. בנגוד למקרה של עיניים ממשיים הטריקטוריות במקרה זה הם ספירלות אקספוננציאליות כאשר ההבדל בין שני המודים מתבטא באמפליטודה ובפאזה השונים של התנודות (ראה ציור 5.2).



ציור 5.2

5.3.9 גם את התגובה המאולצת של המערכת ניתן לבטא באמצעות המודים.

את הפתרון הכללי (5.8) ניתן לרשום בצורה:

$$(5.20) \quad x(t) = \sum_{i=1}^n \langle r^i, x_0 \rangle e^{\lambda_i t} v^i + \int_0^t \sum_{i=1}^n \langle r^i, Bu(\tau) \rangle e^{\lambda_i(t-\tau)} v^i d\tau$$

באם הכניסה $u(t)$ היא כך ש- $Bu(t)$ תמיד בכוון v^i יעורר רק המוד m_i על ידי הכניסה. באם למערכת כניסה אחת אזי אם B בכוון v^i יעורר רק המוד ה- i .

5.3.10 אם למערכת עייע-ים חוזרים בעלי אותו וקטור עצמי, אזי המודים המתאימים לעייע-ים אלו יהיו:

$$(5.21) \quad t^{k-1} e^{\lambda_i t} \quad k = 1, 2, \dots, n_i$$

כאשר n_i מספר החזרות של λ_i .

5.4 תגובת ההלם של מערכת

5.4.1 פונקציית הלם (impulse) - $\delta(t)$

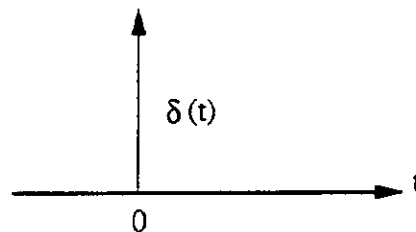
הפונקציה:

$$(5.22) \quad \delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{בלתי מוגדרת} & t = 0 \end{cases}$$

ו-

$$(5.23) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

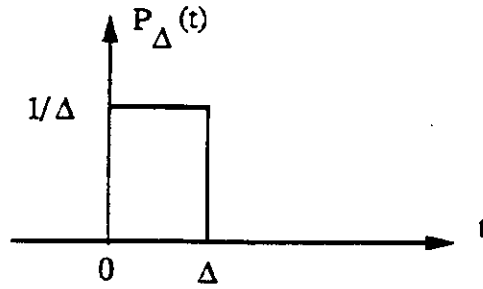
נקראת בשם פונקציית הלם בעצמת יחידה ותסומן גרפית כבציור 5.3.



ציור 5.3:

את פונקציית ההלם ניתן לקבל כגבול פונקציית הפולס הנתונה בציור 5.4:

$$(5.24) \quad P_{\Delta}(t) = \begin{cases} 1/\Delta & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0 & \begin{cases} t < 0 \\ t > \Delta \end{cases} \end{cases}$$



צור 5.4:

כאשר $\Delta \rightarrow 0$ נקבל:

$$(5.25) \quad \delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} P_{\Delta}(t)$$

$\delta(t)$ משמשת לתאור אירועים "רגעיים" ומאפשרת לתאר מתמטית תופעות המתרחשות בזמן קצר ביותר.

$\delta(t-t_1)$ הינו הלם בעצמת יחידה המתרחש בזמן $t=t_1$.

5.4.2 נתונה המערכת (5.6) עם $x_0 = x(t=0) = 0$ אם $u(t)=\delta(t)$ נקבל מ-(5.10):

$$g(t) = y(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \delta(\tau) d\tau + D \delta(t)$$

או:

$$(5.26) \quad g(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ CB + D\delta(t) & t = 0 \\ Ce^{At}B & t > 0 \end{cases}$$

המטריצה $g(t)$ נקראת מטריצת תגובת ההלם של המערכת (5.6). היא מתארת את תגובת ההלם של המערכת בזמן $t \geq 0$ לכניסת הלם בעצמת יחידה ב- $t=0$ כאשר $x_0 = 0$. (ראה גם הערה 5.4.5).

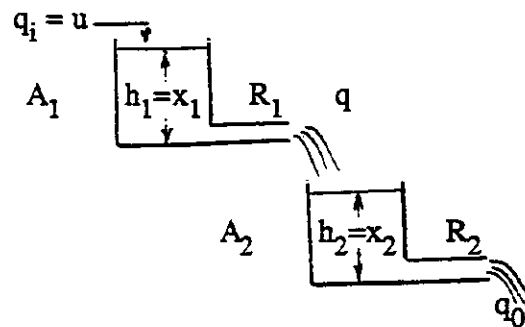
הערה: אם כניסת ההלם מתרחשת בזמן $t=t_1$ ($\delta(t-t_1)$) נקבל במקום (5.26) את:

$$(5.27) \quad g(t-t_1) = Ce^{A(t-t_1)}B + D\delta(t-t_1)$$

זוהי תגובת המערכת להלם בזמן $t=t_1$.

5.4.3 דוגמה: נתונה מערכת המיכלים שבציור 5.5.

נבחר $y \triangleq x$, $u \triangleq q_i$, $x \triangleq (h_1, h_2)^T$ עבור הערכים המספרים $A_1=A_2=1$, $R_1=1$, $R_2=1/2$. נקבל שהצגתה במרחב המצב תהיה:



ציור 5.5

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

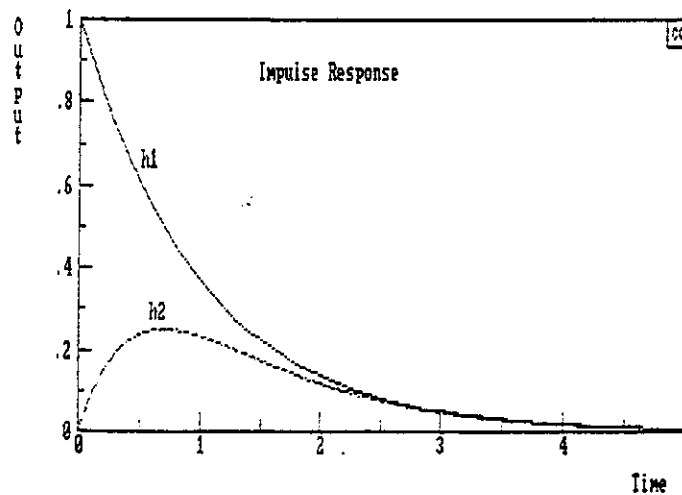
$$y = I_2 x$$

אם $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו- $q_i(t) = u(t) = \delta(t)$ נקבל שתגובת המערכת נתונה על ידי (5.26):

$$g(t) = Ce^{At}B = I_2 \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}$$

השתנות הגבהים בשני המיכלים כפונקציה של הזמן לכניסת ההלם בספיקה q_i נתונה בציור (5.6) (שים

לב כי ברגע 0^- היו שני המיכלים ריקים).



ציור 5.6

5.4.4 הערה: מהדוגמא הנ"ל ניתן לראות כי תגובת ההלם של מערכת המיכלים זהה לתגובה החפשית של

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ המיכלים מתנאי ההתחלה}$$

$$Ce^{At}B = Ce^{At}x_0 \quad \text{שכן:}$$

במקרה זה.

תכונה זו ניתן להכליל ולאמר שכניסת הלם "טוענת" את המערכת לתנאי התחלה.

5.4.5 הערה: במערכות MIMO (עם $y \in R^r$ ו- $u \in R^m$) הינה מטריצה ממימד $m \times r$. האיבר

$$g_{i,j}(t) \text{ במטריצה זו מציג את תגובת היציאה ה-} i \text{ להלם בכניסה ה-} j.$$

5.5 מציאת x_0

5.5.1 בדרך כלל בבעיות הפיזיקליות ידועים תנאי התחלה על היציאה $y(t)$ ונגזרותיה. על מנת לפתור את

משוואות המצב המתאימות יש לתרגם תנאים אלו ל- x_0 . נפתח להלן שיטה כללית עבור מערכות

$$\text{SISO עם } x \in R^n \text{ למציאת } x_0 \text{ מתוך ידיעת } y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0).$$

5.5.2 נתונה המערכת:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$(5.28) \quad y(t) = Cx(t)$$

נזירת משוואת היציאה $n-1$ פעמים נתון:

$$(5.29) \quad \dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t) + CBu(t)$$

$$(5.30) \quad \ddot{y}(t) = CA\dot{x}(t) + CB\dot{u}(t) = CA^2x(t) + CABu(t) + CB\dot{u}(t)$$

$\vdots$

$$y^{(n-1)}(t) = CA^{n-1}x(t) + CA^{n-2}Bu(t) + CA^{n-3}B\dot{u}(t) +$$

$$(5.31) \quad + \dots CBA^{n-2}B\ddot{u}(t)$$

נבדוק:

$$(5.32) \quad Y(t) = (y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))^T$$

$$(5.33) \quad U(t) = (u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(n-1)}(t))^T$$

$$(5.34) \quad O_{n \times n} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad T_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-2}B & CA^{n-3}B & \dots & CB & 0 \end{pmatrix}$$

באמצעות ההגדרות הנ"ל נכתוב את (5.29) - (5.31) בצורה:

$$(5.35) \quad Y(t) = OX(t) + TU(t)$$

הצבת $t = 0$ ב-(5.35) ופתרונה עבור $x(0)$ נתן:

$$(5.36) \quad x(0) = O^{-1}Y(0) - O^{-1}TU(0)$$

הערה: (5.36) פתח למקרה בו $D = 0$. אם $D \neq 0$ קל להראות כי נקבל

$$(5.36)', \quad x(0) = O^{-1}Y(0) - O^{-1}(T + ID)U(0)$$

5.3 הפתרון עבור $x(0)$ הנתון ב-(5.36) נכון במידה ו- O אינה סינגולרית. אם O סינגולרית לא ניתן למצוא את $x(0)$ במימוש הנתון. ממוש אותה מערכת בממוש אחר עשוי להביא ל- O שאינה סינגולרית. משמעותה הפיזיקלית של המטריצה O (הקרויה בתורת הבקרה מטריצת האובסרוויליות של הממוש) אינה נדונה בקורס זה. כדאי רק לציין כי ממוש המערכת בצורת המשערך מביא תמיד ל- O לא סינגולרית.

5.4 דוגמה א'

נתונה מערכת SISO באמצעות הקשר כניסה יציאה הבא:

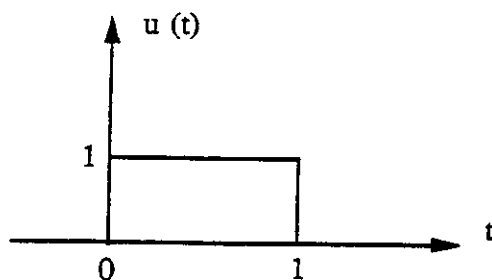
$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 5y = 2u(t)$$

נתונים: $y(0^-) = 0.2$; $\dot{y}(0^-) = -1$ ו- $u(t)$ נתון בציור 5.7.

משמעות ידיעת $y(0^-)$ ו- $\dot{y}(0^-)$ היא שידועים תנאי ההתחלה לפני הפעלת הכניסה.

א. ממש המערכת בצורה המלווה.

ב. מצא את $x(0)$.



ציור 5.7.

פתרון:

ממוש המערכת בצורה המלווה מביא ל-

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (2 \ 0) x$$

מ-(5.34) נקבל:

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad O^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$U(0^-) = \begin{pmatrix} u(0^-) \\ \dot{u}(0^-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ היות ו-} \quad \text{אין צורך לחשב את } T.$$

$Y(0^-)$ תהיה:

$$Y(0^-) = \begin{pmatrix} y(0^-) \\ \dot{y}(0^-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

נציב הנייל ב-(5.36) ונקבל:

$$x(0^-) = O^{-1} Y(0^-) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

5.55 דוגמה ב'

המערכת הפעם נתונה על ידי:

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 5y = 2(u + \dot{u})$$

תנאי ההתחלה והכניסה כדוגמה א'.

אם נממש המערכת בצורה המלווה נקבל:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (2 \ 2) x$$

הפעם O תהיה:

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}$$

ו- O^{-1} אינה קיימת. מכאן שלא ניתן במקרה זה למצוא את $x(0^-)$. לעומת זאת, אם נממש המערכת

בצורת המשערך:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

נקבל:

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

הפעם $\det O \neq 0$ ולכן עבור ממוש זה נוכל למצוא את $x(0)$ לפי (5.36):

$$x(0^-) = O^{-1} Y(0^-) = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

5.6 פתרון משוואות המצב - מערכת תלויה בזמן

לשלמות נציג כאן את פתרון משוואות המצב למערכות לעיגאדיות תלויות בזמן. אבל לא נעמיק בנושא זה

במסגרת קורס זה.

5.6.1 נתונה המערכת:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

$$(5.37) \quad y = C(t)x + D(t)u$$

משפט: אם $A(t)$ רציפה ו- $B(t)$ ו- $u(t)$ רציפות למקוטעין עבור כל t יהיה הפתרון של (5.37) נתון על

די:

$$(5.38) \quad x(t) = \phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$$

5.6.2 הערות:

1. מטריצת המעבר $\phi(t, t_0)$ הינה פתרון של:

$$\frac{d}{dt} \phi(t, t_0) = A(t) \phi(t, t_0)$$

$$(5.39) \quad \phi(t_0, t_0) = I$$

2. למטריצת המעבר $\phi(t, t_0)$ התכונות הבאות:

א. $\phi(t_2, t_1) \cdot \phi(t_1, t_0) = \phi(t_2, t_0)$ לכל t_0, t_1, t_2 .

ב. $\det \phi(t, t_0) \neq 0$ לכל t ו- t_0 .

ג. $\phi^{-1}(t, t_0) = \phi(t_0, t)$ לכל t ו- t_0 .

3. במערכות רציפות תלויות בזמן ניתן רק לעיתים רחוקות למצוא בטוי סגור ל- $\phi(t_0, t)$.

4. שים לב שבמערכת תלויה בזמן תלוי הפתרון במפורש ב- t_0 ולא ב- $t-t_0$ כמו במערכות סטציונריות.

5. ניתן להראות ש-(5.38) הוא פתרון של (5.37) על ידי גזירתו:

$$\dot{x} = A(t)\phi(t, t_0)x(t_0) + \underbrace{\int_{t_0}^t A(t)\phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \phi(t, t)B(t)u(t)}_{A(t)x(t)}$$

$$= A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

והצבת $t=t_0$ ב-(5.38) מראה שהוא מקיים את תנאי ההתחלה.

6. תגובת ההלם:

$$(5.40) \quad g(t, \tau) = C(t) \phi(t, \tau) B(t) + D(t) \delta(t-\tau)$$

$g(t, \tau)$ - היא תגובת המערכת בזמן t לכניסת הלם בזמן τ .

2. מערכות בדידות

5.7 מערכת סטציונרית

5.7.1 נתונה המערכת הסטציונרית:

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i)$$

$$(5.41) \quad y(i) = Cx(i) + Du(i)$$

עם תנאי ההתחלה $x(i_0)$.

פתרון (5.41), כאשר נתון $u(i)$ ($i \geq i_0$) הוא:

$$(5.42) \quad x(k) = A^{k-i_0}x(i_0) + \sum_{j=i_0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu(j) \quad k \geq i_0 + 1$$

ואם $i_0 = 0$ נקבל:

$$(5.43) \quad x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu(j)$$

הצבת (5.43) במשוואת היציאה נתנת את הפתרון עבור היציאה $y(k)$:

$$(5.44) \quad y(k) = CA^k x(0) + C \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu(j) + Du(k)$$

5.7.2 את (5.42) ניתן לקבל על ידי הצבה ישירה של (5.41) עבור $k, \dots, i_0+2, i_0+1$ כדלהלן:

$$x(i_0 + 1) = Ax(i_0) + Bu(i_0)$$

$$x(i_0 + 2) = Ax(i_0 + 1) + Bu(i_0 + 1) = A^2 x(i_0) + ABu(i_0) + Bu(i_0 + 1)$$

$$x(i_0 + 3) = Ax(i_0 + 2) + Bu(i_0 + 2) = A^3 x(i_0) + A^2 Bu(i_0) +$$

$$+ ABu(i_0 + 1) + Bu(i_0 + 2)$$

וכך הלאה עד $x(k)$ המתקבל כב-(5.42).

5.7.3 המטריצה $\phi(k) = A^k$ נקראת מטריצת המעבר של המערכת.

חשוב A^k מתבצע, כחשוב e^{At} , באחת מהשיטות הבאות:

א. שיטת קילי המילטון, ב. שיטת סילוסטר, ג. באמצעות התמרת z (ראה פרק 6); ד. על ידי לכסונה של A (או הבאתה לצורת גזרדן):

$$(5.45) \quad A^k = MJ^k M^{-1}$$

5.7.4 בדומה למערכות רציפות ניתן לכתוב הפתרון (5.43) באמצעות המודים:

$$(5.46) \quad x(k) = \sum_{j=1}^n [\mu_j \lambda_j^k + \sum_{i=0}^{k-1} \langle r^j, Bu(i) \rangle \lambda_j^{k-i-1}] v_j$$

כאשר v_j הם הוויקטורים הימניים של A (עמודות M), r^j הם הוויקטורים השמאליים של A (שורות

M^{-1}), μ_j היא מידת הערור של המוד j -י על ידי תנאי ההתחלה נתונה על ידי:

$$\mu_j = \langle r^j, x_0 \rangle$$

ו- $\langle r^j, Bu(i) \rangle$ היא מידת הערור של המוד j -ה על ידי הכניסה. בדומה למערכות רציפות מוגדר המוד j -ה על ידי:

$$m_j = \lambda^k v^j \quad (5.47)$$

5.7.5 דוגמה: נותנה משוואת ההפרשים:

$$y_{k+2} - y_{k+1} + \frac{1}{4} y_k = 2u_{k+2}$$

ממוש המערכת בצורה המלווה:

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k$$

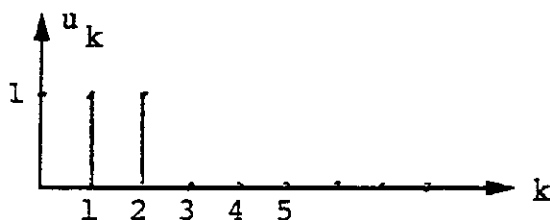
$$y_k = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} x_k + 2u_k$$

נתון $x_0 = 0$ ו-

$$u_k = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & 0 \leq k \leq 2 \\ 0 & k \geq 3 \end{cases}$$

u_k נתון בציור 5.8

יש למצוא את x_n ו- y_n עבור $n \geq 0$.



ציור 5.8

פתרון: היית ו- $x_0 = 0$ ו- $u_k = 0$ עבור $k \geq 3$ נקבל מ-(5.43):

$$x_n = \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} Bu_j = A^{n-1} Bu_0 + A^{n-2} Bu_1 + A^{n-3} Bu_2$$

כדי למצוא את x_n באופן מפורש יש לחשב $A^j B$. נעזר בשיטת קילי המילטון:

$$A^j = \alpha_0 I + \alpha_1 A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ -\frac{1}{4} \alpha_1 & \alpha_0 + \alpha_1 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$A^j B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 + \alpha_1 \end{pmatrix}$$

חשוב α_0, α_1 : (עייני-ים $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^j = \alpha_0 + \frac{1}{2} \alpha_1$$

$$j \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} = \alpha_1$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^j (1+j)$$

ו-

מכאן:

$$A^j B = \left(\frac{1}{2}\right)^j \begin{pmatrix} 2j \\ 1+j \end{pmatrix} \quad (j \geq 0)$$

הצבת הנזיל ב- x_n ותתן:

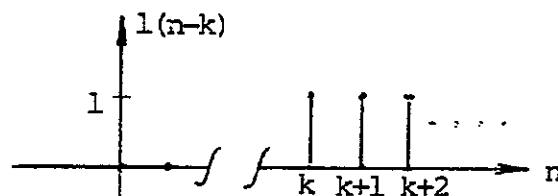
$$\begin{aligned} x_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \binom{2(n-1)}{n} 1(n-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \binom{2(n-2)}{n-1} 1(n-2) + \\ &+ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \binom{2(n-3)}{n-2} 1(n-3) \end{aligned}$$

(5.48)

כאשר $1(n-k)$ נקראת פונקצית מדרגה בגודל יחידה ומוגדרת על ידי (ראה גם ציור 5.9):

$$1(n-k) = \begin{cases} 0 & n < k \\ 1 & n \geq k \end{cases}$$

(5.49)



ציור 5.9

את x_n נוכל לכתוב באופן מפורש יותר אם נציב $n=1$, $n=2$, ו- $n \geq 3$ בפתרון הנזיל:

$$(5.50) \quad x_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & n = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & n = 1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & n = 2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \begin{bmatrix} (7n-17)/2 \\ (7n-10)/4 \end{bmatrix} & n \geq 3 \end{cases}$$

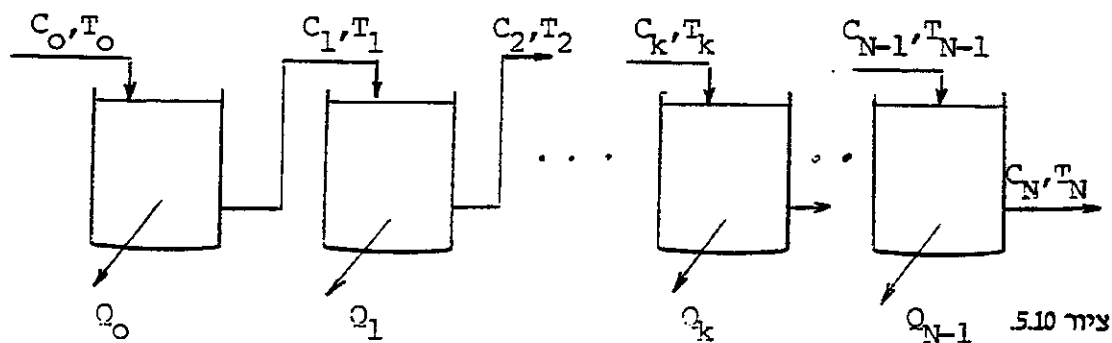
את x_n ב-(5.50) עבור $n \geq 3$ קבלנו על ידי סיכום האיברים ב-(5.48). הצבת x_n (5.48), במשוואות היציאה נתון:

$$y_n = \left(-\frac{1}{2} \quad 2\right) x_n + 2u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n+1) 1(n-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} n 1(n-2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} (n-1) 1(n-3) + 2u_n$$

ובמפורש:

$$y_n = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ 4 & n = 1 \\ 3\frac{1}{2} & n = 2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (7n-3) & n \geq 3 \end{cases}$$

5.7.6 דוגמה: בדוגמה זו נראה כי ניתן להשתמש בפתרון הכללי של משוואות המצב הבדידות לבעיות בהן המשתנה הבלתי תלוי אינו דוקא זמן בדיד. במקרה זה יהיה זה המקום הסידורי. נתונה מערכת של N ריאקטורים כימיים, (ראה ציור 5.10), כשבכל ריאקטור מתבצעת ריאקציה המשחררת חום.



במצב שווי משקל מאזן המסה והאנרגיה בכל מיכל נתון על ידי שתי המשוואות הבאות:

$$C_k - C_{k+1} - aC_{k+1} = 0 \quad a \neq 1 \quad \text{מאזן מסה:}$$

$$T_k - T_{k+1} + bC_{k+1} - dQ_k = 0 \quad \text{מאזן חום:}$$

כאשר:

C_k - הרכוז בריאקטור ה- k

T_k - טמפרטורת התמיסה בריאקטור ה- k

Q_k - קצב סלוק החום בריאקטור ה- $k+1$

a, b, d - פרמטרים קבועים התלויים בספיקה, נפח המיכלים ותכונות התמיסה והריאקציה.

א. בחר ב- C_k ו- T_k כמשתני מצב וב- dQ_k ככניסה, וכתוב באמצעות הניל את משוואות המצב.

ב. נתונים הערכים $a=2$, $b=3$, $d=5$ ביחידות מתאימות. מצא בעזרת המשוואות שמצאת בסעיף א' את C_N , T_N (הרכוז והטמפרטורה ביציאת המיכל ה- N) כפונקציה של $C_0, T_0, Q_1, \dots, Q_{N-1}$.

פתרון

א. נתון:

$$C_k - C_{k+1} - aC_{k+1} = 0$$

$$T_k - T_{k+1} + bC_{k+1} - dQ_k = 0$$

בחירת C, T כמשתני המצב x_1, x_2 בהתאמה, dQ_k ככניסה u_k תביא ל:

$$x_1(k+1) = \frac{1}{1+a} x_1(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + bx_1(k+1) - u(k) = \frac{b}{1+a} x_1(k) + x_2(k) - u(k)$$

או:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+a} & 0 \\ \frac{b}{1+a} & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(k)$$

ב. הפתרון הינו:

$$x(N) = A^N x(0) + \sum_{j=0}^{N-1} A^{N-j-1} B u(j)$$

היות ומימד A הינו (2×2) נוכל לרשום:

$$A^p = \alpha_1 A + \alpha_0 I$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = a_1$$

הערכים העצמיים של A הים:

$$a_1 = \frac{1}{1+a}$$

כאשר סמנו:

$$\left. \begin{array}{l} 1 = \alpha_1 + \alpha_0 \\ a_1^p = a_1 u_1 + \alpha_0 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha_1 = \frac{a_1^p - 1}{a_1 - 1} \quad \alpha_0 = \frac{a_1 - a_1^p}{a_1 - 1}$$

$$A^p = \frac{a_1^p - 1}{a_1 - 1} \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ ba_1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{a_1 - a_1^p}{a_1 - 1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^p & 0 \\ \frac{ba_1(a_1^p - 1)}{(a_1 - 1)} & 1 \end{bmatrix}$$

עבור כל p :

$$A^p B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ומכאן:

$$x(N) = \begin{bmatrix} a_1^N & 0 \\ \frac{ba_1(a_1^N - 1)}{a_1 - 1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ T_0 \end{bmatrix} + \sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} dQ(k)$$

ובאופן מפורש:

$$C(N) = a_1^N C_0 = \frac{1}{(1+a)^N} C_0$$

$$T(N) = \frac{ba_1(a_1^N - 1)}{a_1 - 1} C_0 + T_0 - d \sum_{j=1}^{N-1} Q_j =$$

$$= \frac{b[(a+1)^N - 1]}{a(a+1)^N} C_0 + T_0 - d \sum_{j=1}^{N-1} Q_j$$

5.7.8 תגובת הלם

הלם בדיד בעצמת יחידה המתרחש ברגע $k=i$ (הוא הזמן הבדיד הירי"י) ואשר יסומן $\delta(k-i)$ מוגדר על ידי:

$$(5.51) \quad \delta(k-i) = \begin{cases} 1 & k=i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

הלם ברגע $k=0$ יצוץ על ידי $\delta(k)$.

אם נציב $\delta(k-i)$ בפתרון (5.43) נקבל שמטריצת תגובת ההלם, $g(k-i)$, נתונה על ידי:

$$(5.52) \quad g(k-i) = \begin{cases} CA^{k-i-1}B & k \geq i+1 \\ D & k=i \\ 0 & k < i \end{cases}$$

נציין שוב ש- $g(k-i)$ הינה תגובת המערכת בזמן k לכניסת הלם בעצמת יחידה בזמן i .

5.8 פתרון משוואות המצב - מערכת תלויה בזמן

נציג בקצרה את הפתרון עבור משוואות מצב בדידות תלויות בזמן. במערכות אלו לא נעסוק יותר בקורס זה.

5.8.1 נתונה המערכת:

$$x(i+1) = A(i)x(i) + B(i)u(i)$$

$$(5.53) \quad y(i) = C(i)x(i) + D(i)u(i)$$

פתרון (5.53) עבור $x(i_0)$ ו- $u(i) \ (i \geq i_0)$ נתון על ידי:

$$(5.54) \quad x(k) = \phi(k, i_0)x(i_0) + \sum_{j=i_0}^k \phi(k, j+1)B(j)u(j) \quad k \geq i_0 + 1$$

5.8.2 הינה מטריצת המעבר הנתונה על ידי:

$$(5.55) \quad \phi(k, i_0) = A(k-1)A(k-2), \dots, A(i_0) \quad k \geq i_0 + 1$$

$$\phi(i_0, i_0) = I \quad -1$$

5.9 מציאת x_0

את אשר פתחנו בסעיף 5.5 עבור מערכות רציפות נפתח כאן עבור מערכות בדידות.

5.9.1 נתונה מערכת בדידה על ידי משוואת ההפרשים:

$$(5.56) \quad \sum_{i=0}^n a_i y(k+i) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i u(k+i)$$

עם תנאי התחלה $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$, והכניסה $u(i)$ ידועה עבור כל $i \geq 0$

5.9.2 ממוש המערכת במרחב המצב:

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i)$$

$$(5.57) \quad y(i) = Cx(i) \quad x \in R^n$$

כדי לקבל את $x(0)$ המתאים ננקוט בדרך דומה לזו שבסעיף 5.5. נכתוב:

$$y(0) = Cx(0)$$

$$y(1) = Cx(1) = CAx(0) + CBu(0)$$

$$y(2) = Cx(2) = CA^2x(0) + CABu(0) + CBu(1)$$

$\vdots$

$$(5.58) \quad y(n-1) = Cx(n-1) = CA^{n-1}x(0) + CA^{n-2}Bu(0) + \dots + CBu(n-1)$$

את (5.58) נציג בצורה:

$$(5.59) \quad \begin{pmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{pmatrix} = O x(0) + T \begin{pmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{pmatrix}$$

כאשר O נתונה על ידי:

$$O_{n \times n} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

$T_{n \times n}$ היא כב- (5.34).

פתרון (5.59) עבור $x(0)$ יתן:

$$(5.60) \quad x(0) = O^{-1} \begin{pmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{pmatrix} - O^{-1} T \begin{pmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{pmatrix}$$

הערה: אם $D \neq 0$ נקבל את (5.60) אלא שאת T יחליף $T+ID$ (ראה (5.36).

5.93 הערה 5.5.3 תופסת גם כאן. כלומר (5.60) נכון במידה ו-0 אינה סינגולרית. אם 0 סינגולרית אזי לא ניתן למצוא את $x(0)$ בממש הנתון. כאשר המערכת נתונה בצורת המשעך המטריצה 0 תמיד אינה סינגולרית.

5.10 מערכת בדידה אקוילנסית - מערכות דגומות

5.10.1 נתונה מערכת רציפה באמצעות המימוש:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$(5.61) \quad y = Cx + Du$$

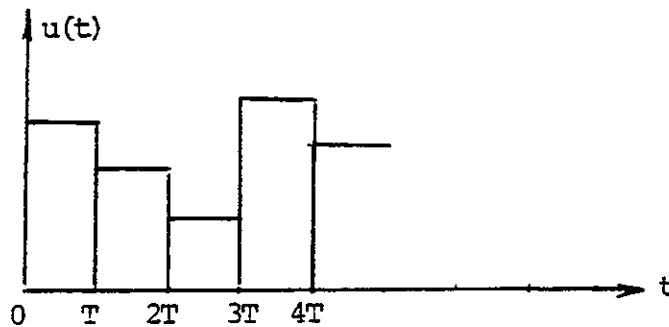
נניח כי הכניסה למערכת הרציפה, $u(t)$, רציפה למקוטעין כך ש-

$$(5.62) \quad u(t) = \text{constant} \quad nT \leq t < (n+1)T$$

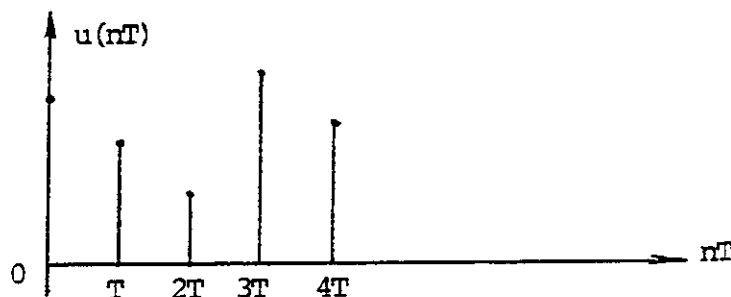
הכניסה (5.62) מכונה "כניסת מדרגות" ברוחב קבוע T (ראה ציור 5.11). ניתן למצוא מערכת בדידה:

$$x((n+1)T) = A_s x(nT) + B_s u(nT)$$

$$(5.63) \quad y(nT) = C_s x(nT) + D_s u(nT)$$



ציור 5.11



ציור 5.12

כך שכאשר טור הכניסות הבדידות $u(nT)$ שווה לערכי הכניסה הרציפה (כניסת מדרגות) ברגעים $t=nT$ ראה ציור 5.12, אזי היציאה הבדידה $y(nT)$ זהה ל- $y(t=nT)$, יציאת המערכת הרציפה ב- $t=nT$, וקטור המצב הבדיד $x(nT)$ שווה ל- $x(t=nT)$. מערכת בדידה המקימת התנאי הנ"ל תקרא מערכת בדידה אקוילנסית.

5.10.2 על מנת לקבל את הממוש הבדיד האקוילנטי (A_s, B_s, C_s, D_s) מתוך הממוש הרציף (A, B, C, D)

כותבים את הפתרון הרציף של (5.61) באינטרוול $nT \leq t < (n+1)T$ כאשר תנאי ההתחלה הוא $x(nT)$ ו- $u(t)$ מקיים את (5.62):

$$x(t) = e^{A(t-nT)}x(nT) + \int_{nT}^t e^{A(t-\tau)}Bu(nT)d\tau \quad (5.64)$$

נציב עתה $t = (n+1)T$ ב-(5.64) ונקבל:

$$x((n+1)T) = e^{AT}x(nT) + \left[\int_{nT}^{(n+1)T} e^{A[(n+1)T-\tau]} Bd\tau \right] u(nT) \quad (5.65)$$

השוואת (5.65) עם (5.63) מראה כי:

$$A_s = e^{AT} \quad (5.66)$$

$$B_s = \int_{nT}^{(n+1)T} e^{A[(n+1)T-\tau]} Bd\tau = \int_0^T e^{A\tau} Bd\tau \quad (5.67)$$

האנף הימני ב-(5.67) מתקבל על ידי החלפת משתנים.

אם A אנף סינגולרית ניתן לחשב באופן כללי את (5.67). B_s נתונה אז על ידי:

$$B_s = A^{-1}(e^{AT} - I)B \quad (5.68)$$

הצבת $t = nT$ במשוואת היציאה הרציפה (5.61) מביאה ל:

$$C_s = C \quad ; \quad D_s = D \quad (5.69)$$

הערה: יש לשים לב לעובדה ש- $\det(A_s) \neq 0$.

5.10.3 דוגמה: נתונה מערכת רציפה:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \quad 1)x + u$$

נתון כי $u(t)$ מקיים את (5.62). יש למצוא מחל בדיד אקוילנטי.

פתרון:

נשתמש בקשרים (5.66), (5.67) ו-(5.69) ונקבל:

$$A_s = e^{AT} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B_s = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau = \int_0^T \begin{pmatrix} T \\ 1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} T^2/2 \\ T \end{pmatrix}$$

$$C_s = C; \quad D_s = D$$

לכן המערכת הבדידה האקוילנטית תהיה:

$$x_{(n+1)T} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_{(n)T} + \begin{pmatrix} T^2/2 \\ T \end{pmatrix} u_{(n)T}$$

$$y_{(n)T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x_{(n)T} + u_{(n)T}$$

5.10.4 דוגמה: בדוגמה 5.10.3 הנח כי $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ וכי $u(t) = 1(t)$ (הפונקציה $1(t)$ היא שנוי מדרגה בגודל

יחידה המתרחש ב- $t=0$. כלומר $1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$. כניסה זו מקיימת את (5.62). נפתור

$x(t)$ במערכת הרציפה ואת $x(nT)$ במערכת הבדידה האקוילנטית ונראה כי $x(t=nT) = x_{(n)T}$ ו-
 $y(t=nT) = y_{(n)T}$. $x(t=nT)$ היא פתרון המערכת הרציפה בהצבת $t=nT$; $x(nT)$ היא פתרון
 המערכת הבדידה.

פתרון המערכת הרציפה:

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_0 + \int_0^t \begin{pmatrix} t-\tau \\ 1 \end{pmatrix} d\tau =$$

$$= x(t) = \begin{pmatrix} 1+t+t^2/2 \\ 1+t \end{pmatrix} \quad (t \geq 0);$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + u(t) = 3 + 2t + t^2/2 \quad (t \geq 0)$$

פתרון המערכת הבדידה:

$$x(nT) = (A_s)^n x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} (A_s)^{n-j-1} B_s u(nT)$$

היות ו-

$$(A_s)^m = \begin{pmatrix} 1 & mT \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נקבל:

$$x(nT) = \begin{pmatrix} 1 & nT \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & (n-j-1)T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^2/2 \\ T \end{pmatrix} \cdot 1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + nT + \sum_{j=0}^{n-1} (T^2/2 + (n-j-1)T^2 - jT^2) \\ 1 + \sum_{j=0}^{n-1} T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + nT + \frac{(nT)^2}{2} \\ 1 + nT \end{pmatrix}$$

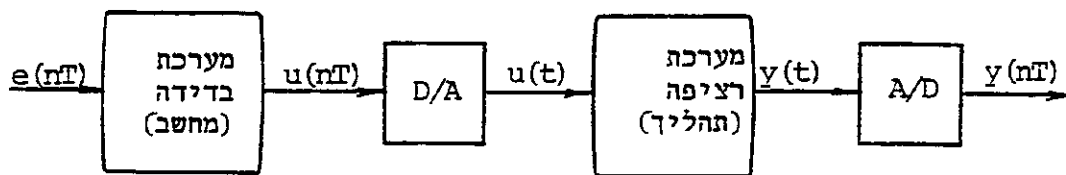
-1

$$y(nT) = (1 \quad 1) x(nT) + u(nT) = 3 + 2nT + \frac{(nT)^2}{2} \quad n \geq 0$$

הצבת $t=nT$ ב- $x(t)$ וב- $y(t)$ בפתרון הרציף נותנים את $x(nT)$ ו- $y(nT)$ בהתאמה בפתרון הבדידי.

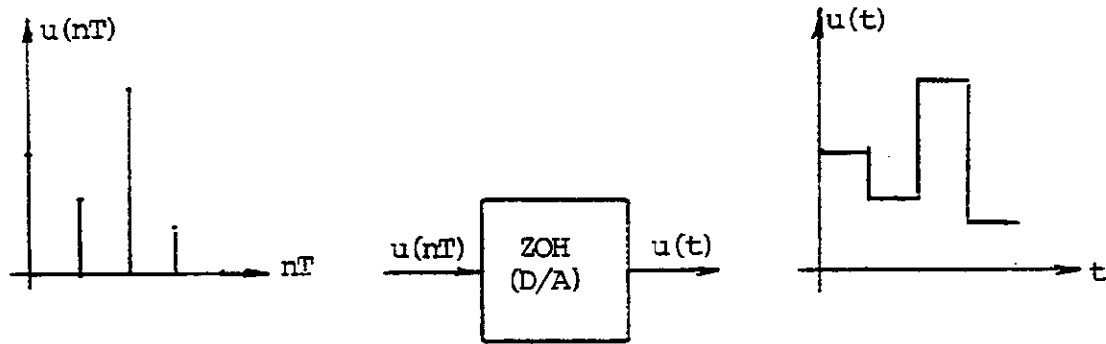
5.10.5 שמוש - מערכות דגימה (Sampled-Data System)

הצורך במערכות בדידות-אקוילנטיות בא ממערכות דגימה. מערכות דגימה הן מערכות המורכבות ממערכות רציפות ומערכות בדידות. דוגמה לכך הן מערכות בקרה בהן מחשב (מערכת בדידה) מבקר מערכת רציפה (התהליך). ראה ציור 5.13.



ציור 5.13

היות והמחשב הינו מערכת בדידה, אות הכניסה אליו, $e(nT)$, ואות היציאה ממנו $u(nT)$ - שניהם בדידים. התהליך בהיותו מערכת רציפה, אות הכניסה אליו, $u(t)$, ואות היציאה ממנו $y(t)$ הינם אותות רציפים. לא ניתן לחבר את אות היציאה הבדיד מהמחשב לכניסת התהליך ללא מתמר ההופך את האות הבדיד (הנקרא גם אות דיגיטלי) לאות רציף (הנקרא גם אות אנלוגי). מתמר ההופך אות דיגיטלי לאות אנלוגי נקרא מתמר D/A (Digital to Analog). המתמר D/A הפשוט ביותר נקרא מחזיק נתונים מסדר 0 (Zero Order Hold המסומן בקצור ZOH). פעולת ה-D/A מסוג ZOH מסתכמת בכך שהוא הופך סיגל בדיד הנכנס אליו לסיגל רציף בצורת מדרגות - ראה ציור 5.14.

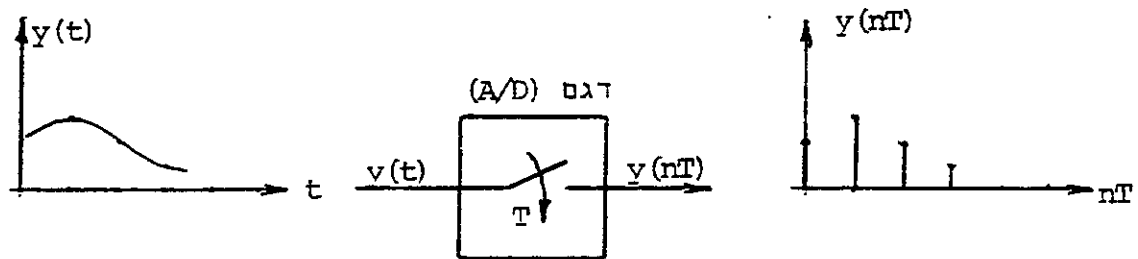


ציור 5.14

כלומר,

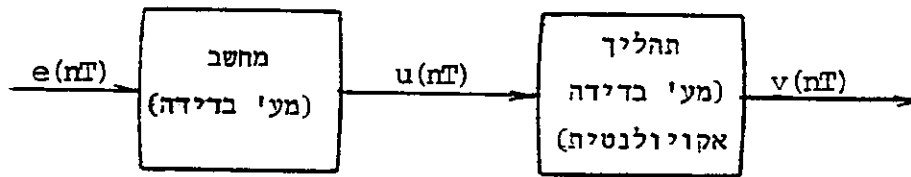
$$u(t) = u(nT) \quad nT \leq t < (n+1)T$$

על מנת שיציאת התהליך, $y(t)$, תוכל להיות מוחזת למחשב הבקרה לצורך עבוד, יש להפכה לאות בדיד. הפיכה זו מבוצעת על ידי מתמר A/D (Analog to Digital). מתמר A/D נקרא גם דגם (Sampler) ופעולתו מוראת בציור 5.15.



ציור 5.15

הדגם דוגם את $y(t)$ כל T יחידות זמן ומוציא סיגל בדיד $y(nT)$. T נקרא לכן אינטרבל הדגימה. ה-ZOH (D/A) מביא לידי כך שהמניסה הרציפה, $u(t)$, לתהליך תתנהג לפי (5.62). לכן אם ה-D/A וה-A/D מסונכרנים תיצג המערכת הבדידה האקויוולנטית אשר פתחנו בסעיפים הקודמים את התהליך הרציף ברגעי הדגימה nT . ניתן אז לנתח המערכת שבציור 5.13, המורכבת ממערכת בדידה ורציפה, על ידי המערכת שבציור 5.16 אשר כל מרכיביה בדידים. דבר זה מקל על נותחן ותכנון של מערכות דגימה.



ציור 5.16

5.10.6 שמש - פתרון נומרי

פתרון נומרי במחשב דיגיטלי של מערכת רציפה כרוך בהפיכתה למערכת בדידה. לכן ניתן להשתמש במערכת הבדידה האקוילונטית לצורך פתרון נומרי של מערכת רציפה. היות וקטור המצב והיציאה של המערכת הבדידה זהים ברגעי הדגימה לאלו של המערכת הרציפה אם כניסתה מקימת את (5.62), ניתן לקרב את $u(t)$ עם T מספיק קטן למדרגות ולפתור המערכת הבדידה האקוילונטית. T בשימוש זה יקרא אינטרבול האינטגרציה.

5.10.7 ניתן כמובן לקבל פתרונות נומריים למערכות רציפות גם בדרכים אחרות. אחת מאלו היא בה מקרבים

את $\dot{x}(t)$ ב-(5.61) על ידי:

$$(5.70) \quad \dot{x}(t) \sim \frac{x((n+1)T) - x(nT)}{T}$$

הצבת (5.70) ב-(5.61) מביאה ל-

$$(5.71) \quad \frac{x((n+1)T) - x(nT)}{T} = Ax(nT) + Bu(nT)$$

חלוף $x((n+1)T)$ ב-(5.71) נותנת:

$$(5.72) \quad x((n+1)T) = (I + AT)x(nT) + TBu(nT)$$

משוואה (5.72) הינה משוואת מצב בדידה המתארת בקרוב את משוואת המצב הרציפה. אם נצרך ל-(5.72) את משוואת היציאה (5.61) עבור $t = nT$ נקבל מודל בדיד מקורב למערכת הרציפה (5.61) אשר מאפשר פתורנה הנומרי. המודל הבדיד נתון לך על ידי:

$$x((n+1)T) = \bar{A}x(nT) + \bar{B}u(nT)$$

$$(5.73) \quad y(nT) = Cx(nT) + Du(nT)$$

כאשר:

$$(5.74) \quad \bar{A} = I + AT \quad ; \quad \bar{B} = TB$$

פרק 6 : פתרון משוואות המצב באמצעות התמרות

6.1 התמרת לפלס (Laplace Transform)

6.1.1 התמרת לפלס הינה העתקה ליניארית אנטגרלית של הפונקציה $f(t)$ למשור הקומפלקסי S באופן

הבא :

א. העתקה דו-צדדית

$$(6.1) \quad F_{\Pi}(s) = L_{\Pi}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

ב. העתקה חד-צדדית

$$(6.2) \quad F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

בהעתקה החד-צדדית משתמשים לבחינת תגובות מערכות עבור $t > 0$. זאת משום שאם יודעים את

הכניסה למערכת עבור $t \geq 0$ ואת תנאי ההתחלה ניתן להניח ש- $f(t) = 0$ עבור $t < 0$.

בהעתקה הדו-צדדית משתמשים באותם מקרים כשיש חשיבות ומשמעות גם ל- $f(t)$ עבור $t < 0$ כמו

למשל בבעיות סטטיסטיקות.

6.1.2 תנאי קיום ההתמרה

לא לכל פונקציה קימת התמרת לפלס. רק ל- $f(t)$ עבורם האינטגרלים ב-(6.1) ו-(6.2) מתכנסים יש

התמרות, וההתמרה קימת רק עבור ערכי s עבורם האינטגרלים מתכנסים (תחום ההתכנסות):

א. $f(t)$ רציפה למקוטעין בכל אנטרול זמן סופי.

ב. התמרה חד צדדית - באם קימים קבועים M_0 ו- α_0 כך ש-

$$|f(t)| < M_0 e^{\alpha_0 t}$$

אזי $F(s)$ קיים עבור כל s ב- $\text{Re}(s) > \alpha_0$ (תחום ההתכנסות).

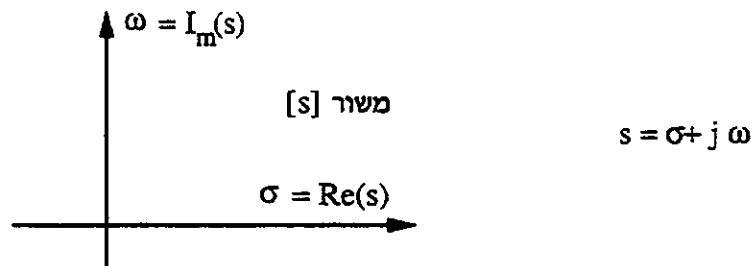
ג. התמרה דו צדדית - באם קימים קבועים $M_1, M_2, \alpha_1, \alpha_2$ כך ש- $\alpha_1 < \alpha_2$ ו-

$$|f(t)| < M_1 e^{\alpha_1 t}; \quad t > 0$$

$$|f(t)| < M_2 e^{\alpha_2 t}; \quad t < 0$$

אזי $F_{\Pi}(s)$ קיים עבור כל s ברצועה - $\alpha_1 < \text{Re}(s) < \alpha_2$ (תחום ההתכנסות).

6.1.3 s הוא משתנה קומפלקסי הנקרא על שם ההתמרה "משתנה לפלס".



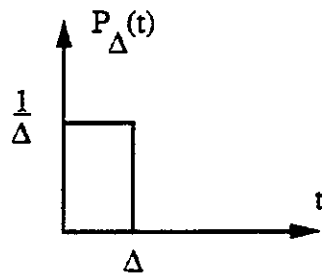
6.1.4 התמרת לפלס ההפוכה (Inverse Laplace Transform)

$$(6.3) \quad f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

(6.3) נכון להתמרה חד-צדדית ולזו-צדדית.

c חייב להיות בתחום ההתכנסות של (6.1) או (6.2).

6.1.5 דוגמאות לחישוב התמרות חד-צדדיות

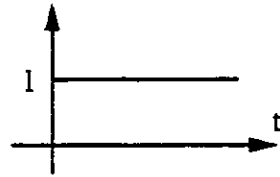


1) פונקצית הלם (impulse) $f(t) = \delta(t)$.

$$F(s) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_0^{\Delta} e^{-st} \cdot \frac{1}{\Delta} dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} e^{-st} dt$$

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-s\Delta}}{s\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{s\Delta} \left[s\Delta - \frac{(s\Delta)^2}{2} + \dots \right] = 1$$

$$(\text{Re}(s) > -\infty)$$



2 פונקצית מדרגה (step) $f(t) = 1(t)$.

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

. $(\text{Re}(s) > 0)$

3 פונקצית ריצה (ramp) $f(t) = t \cdot 1(t)$.

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$

4 באופן דומה

$$L[t^n \cdot 1(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

5 אקספוננט - $f(t) = e^{at} \cdot 1(t)$ - a קבוע ממשי או קומפלקסי.

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

. $(\text{Re}(s) > a)$

6 באופן דומה:

$$L[t^{n-1} e^{at}] = \frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$$

7 פונקציות טריגונומטריות $f(t) = \sin at$; $\cos at$; - a ממשי.

$$L[e^{jat}] = \frac{1}{s - ja} = \frac{s + ja}{s^2 + a^2} \quad \text{(לפי 5)}$$

$$e^{jat} = \cos at + j \sin at \quad \text{אך}$$

$$L[e^{jat}] = L[\cos at] + j L[\sin at] \quad \text{דוהיט:}$$

$$L[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}; \quad L[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \text{מכאן}$$

ותחום ההתכנסות: $\text{Re}(s) > 0$

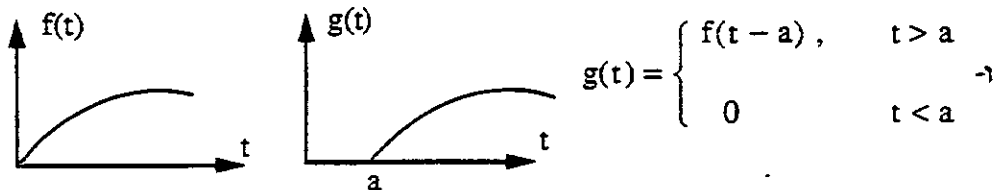
6.16 תכונות ומשפטי התמרת לפלס

$$L(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 L[f_1(t)] + c_2 L[f_2(t)] \quad \text{1. לעינאריות}$$

$$Lf(t) \stackrel{\Delta}{=} F(s) \quad \text{2. הזזה קומפלקסית - אם}$$

$$(6.3) \quad L(e^{at} f(t)) = F(s-a) \quad \text{אזי}$$

$$Lf(t) \stackrel{\Delta}{=} F(s) \quad \text{3. הזזה ממשית - אם}$$



a - ממשי וסופי (ראה ציור) אזי:

$$(6.4) \quad L[f(t-a)] = L[g(t)] = e^{-as} F(s)$$

הוכחה:

$$L[g(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt = \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt$$

על ידי שנוי המשתנים הבא: $v = t - a$, נקבל:

$$L[g(t)] = \int_0^{\infty} e^{-s(v+a)} f(v) dv = e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-sv} f(v) dv = e^{-as} F(s)$$

$$4. \text{ התמרת נגזרת ראשונה - באם } L[f(t)] \stackrel{\Delta}{=} F(s) \text{ ובאם } \frac{d}{dt} f(t) \text{ ברת-התמרה (סעיף 6.12), אזי -}$$

$$L\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = sF(s) - f(0^+)$$

כאשר $f(0^+)$ הוא הגבול של $f(t)$ כאשר $t \rightarrow 0^+$ דרך ערכים חיוביים של הזמן.

(הערה: נסמן $f(0^+) = f(0)$.)

הוכחה:

$$L\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} (f(t)) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt =$$

$$(6.5) \quad = sF(s) - f(0)$$

5 התמרת נגזרת מסדר n

$$L\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^i f^{(n-i-1)}(0)$$

$$= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) \dots$$

$$(6.6) \quad - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

כאשר :

$$f^{(p)} \triangleq \frac{d^p f}{dt^p}$$

למשל עבור $n=2$ נקבל מ-(6.6)

$$L(\ddot{f}) = s^2 F(s) - s f(0) - \dot{f}(0)$$

6 התמרת אינטגרציה בזמן

$$L[f(t)] \triangleq F(s) \quad \text{אם}$$

$$(6.7) \quad L\left[\int_0^t f(u) du\right] = \frac{f(s)}{s} \quad \text{אזי}$$

הוכחה:

נגדיר

$$g(t) \triangleq \int_0^t f(u) du$$

$$\dot{g}(t) = f(t) ; \quad g(0) = 0 \quad \text{לכן}$$

$$L(\dot{g}(t)) = sL(g(t)) - g(0) = F(s) \quad \text{ומכאן}$$

7. משפט הערך ההתחלתי והערך הסופי

התמרת לפלס מעתיקה את הפונקציה, $f(t)$, באם היא בר-התמרה (סעיף 6.1.2), לפונקציה $F(s)$ במשתנה הקומפלקסי s . אין כל משמעות בשאלה להיכן מעתיקה ההתמרה את הנקודה $f(t_1)$, כאשר t_1 זמן מסויים כלשהוא, שונה מ-0 ומ- ∞ . (הדבר דומה לתרגום מילה משפה לשפה. לכל המלה בשפה אי קיימת מלה מתאימה בשפה ב'. לא ניתן לתרגם מלה משפה לשפה על ידי תרגום אותיותיה). לכן כאשר ידועה $f(t)$ ומעוניינים ב- $F(s_1)$ יש להתמיר $L[f(t)]$ ולהציב $s = s_1$. ולהיפך כאשר נתונה $F(s)$ ומעוניינים ב- $f(t_1)$ יש למצוא את $L^{-1}[F(s)]$ ולהציב $t = t_1$. שני ערכים בלבד ניתן למצוא ללא ביצוע ההתמרות: ב- $t = 0$ וב- $t \rightarrow \infty$.

משפט הערך ההתחלתי:

באם $f(t)$ וגזרתה הראשונה בר-התמרה, באם $L[f(t)] \stackrel{\Delta}{=} F(s)$, ובאם הגבול $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ קיים, אזי:

$$(6.8) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

הוכחה: מ-(6.5) נקבל:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} (f(t)) dt = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) - f(0) = 0$$

משפט הערך הסופי:

באם $f(t)$ וגזרתה הראשונה בר-התמרה, ובאם הגבול $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ קיים, אזי:

$$(6.9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

הוכחה: מ-(6.5) מקבלים:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} (f(t)) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0)$$

הערה: באם ל- $sF(s)$ קטבים s_1 (- ערכי s עבורם $sF(s)$ מתבדרת, ראה פרק היציבות) כך ש- $\text{Re}(s_1) \geq 0$

(פרט ל- $s_1 = 0$) אין ערך סופי ולא ניתן להשתמש במשפט.

הערה: במקרים בהם נתון $f(0^-)$ ולא $f(0^+)$ מגדירים

$$F_-(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

הצורך בגיל קיים בבעיות פיזיקליות מסוימות בהן $f(0^-) \neq f(0^+)$ למשל כאשר $f(t)$ כוללת הלם, $\delta(t)$. במקרים אלו ידוע $f(0^-)$ בלבד.

ניתן להראות שבכל המשפטים וההתמרות ניתן להחליף את $f(0^+)$ ב- $f(0^-)$ ולקבל את $F_-(s)$ פרט למשפט הערך ההתחלתי. במשפט האחרון מקבלים תמיד את $f(0^+)$ דהיינו:

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF_{\pm}(s)$$

6.17 פתרון משוואות דיפרנציאליות ליניאריות עם מקדמים קבועים בעזרת התמרת לפלס.

דוגמא: נתונים המשוואה הדיפרנציאלית ותנאי ההתחלה:

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = t; \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

נתמיר המשוואה (כאשר $\Delta L[x(t)] = X(s)$).

$$\frac{s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)}{L[\ddot{x}(t)]} + \frac{3[sX(s) - x(0)]}{L[\dot{x}(t)]} + 2X(s) = 1/s^2$$

נפתור המשוואה האלגברית הניל עבור $X(s)$ ונקבל:

$$X(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 3s + 2)}$$

$X(s)$ הינו הפתרון המותמר של המשוואה הדיפרנציאלית. כדי למצוא את $x(t)$ ניתן היה להשתמש ב-

$L^{-1}[X(s)]$ לפי (6.3) אבל מעשי ונוח יותר לפרק לשברים חלקיים (ראה להלן) ולהשתמש בטבלאות

הכוללות התמרות של הפונקציות האלמנטריות. (טבלת התמרות נתונה בסעיף 6.6).

6.18 פרוק לשברים חלקיים

דוגמא א' - (שרשים נפרדים)

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2}$$

כדי למצוא את c_1 נכפול את המשוואה ב- $s+1$ ונקבל:

$$F(s) \cdot (s+1) = \frac{1}{s+2} = c_1 + \frac{c_2(s+1)}{s+2}$$

עושה נציב $s = -1$ ונקבל:

$$F(s)(s+1)|_{s=-1} = \frac{1}{s+2}|_{s=-1} = c_1 = 1$$

כלומר

$$c_1 = F(s) \cdot (s+1)|_{s=-1} = 1$$

באופן דומה

$$c_2 = F(s) \cdot (s+2)|_{s=2} = -1$$

לכן

$$F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-t} - e^{-2t}$$

דוגמה ב' (שרשים חוזרים):

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{c_{11}}{s+1} + \frac{c_{12}}{(s+1)^2} + \frac{c_2}{s+2}$$

לפולניום המכנה ב- $F(s)$ שורש כפול (חוזר) ב- $s = -1$.

את c_2 נמצא כמקודם.

$$c_2 = F(s) \cdot (s+2)|_{s=-2} = 1$$

את c_{12} נמצא באופן דומה,

$$c_{12} = F(s) \cdot (s+1)^2|_{s=-1} = 1$$

את c_{11} לא נוכל למצוא כמקודם. לכן נפעל בדרך הבאה:

$$c_{11} = \left[\frac{d}{ds}(F(s) \cdot (s+1)^2)\right]|_{s=-1} = \frac{-1}{(s+2)^2}|_{s=-1} = -1$$

מכאן

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

-)

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}$$

כללית:

בהתמרות לפלס של משוואות דיפרנציאליות ליניאריות עם מקדמים קבועים מקבלים:

$$Y(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{\sum_0^n b_i s^i}{\sum_0^n a_i s^i}$$

בדרך כלל $b_n = 0$ (דרגת המונה קטנה מדרגת המכנה).

אם $b_n \neq 0$, יש תחילה לחלק את פולינום המונה בפולינום המכנה ומתקבל (עבור $a_n = 1$):

$$Y(s) = b_n + \frac{\sum_0^{n-1} b'_i s^i}{\sum_0^n a_i s^i} \quad (a_n = 1)$$

נפרק את המכנה לגורמים ונקבל:

$$Y(s) = \frac{\sum_0^n b_i s^i}{\prod_1^r (s + p_i)^{n_i}} = b_n + \frac{\sum_0^{n-1} b'_i s^i}{(s + p_1)^{n_1} (s + p_2)^{n_2} \dots (s + p_r)^{n_r}}$$

כלומר לפולינום המכנה r שרשים שונים $-p_i$ וכל $-p_i$ חוזר n_i פעמים.

הפרק לשברים חלקיים יהיה לכן:

$$\begin{aligned} Y(s) = b_n + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(s + p_i)^k} &= b_n + \frac{C_{11}}{s + p_1} + \frac{C_{12}}{(s + p_1)^2} + \dots + \frac{C_{1n_1}}{(s + p_1)^{n_1}} + \\ &+ \frac{C_{21}}{s + p_2} + \dots + \frac{C_{2n_2}}{(s + p_2)^{n_2}} + \dots + \frac{C_{rn_r}}{(s + p_r)^{n_r}} \end{aligned} \quad (6.10)$$

כאשר

$$C_{ik} = \frac{1}{(n_i - k)!} \left[\frac{d^{n_i - k}}{ds^{n_i - k}} \{ (s + p_i)^{n_i} Y(s) \} \right]_{s = -p_i} \quad (6.11)$$

נשתמש בטבלאות ונקבל:

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = b_n \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-p_i t} \quad (6.12)$$

6.19 התמרת לפלס של וקטור או מטריצה

אם $f(t)$ הינו וקטור פונקציות:

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

וכל $f_i(t)$ ברת-התמרה ומקיימת:

$$\begin{aligned} f_i(t) &= 0 & t \leq 0 \\ |f_i(t)| &< Me^{\alpha t} & t > 0 \end{aligned} \quad -1$$

אזי לכל $f_i(t)$ קיימת התמרת לפלס $F_i(s)$ המתכנסת ב- $\alpha > \text{Re}(s)$, והתמרת $f(t)$ תהיה לכן:

$$L[f(t)] = F(s) = \begin{pmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \\ \vdots \\ F_n(s) \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

בדומה, אם $f(t)$ היא מטריצה $m \times r$ של פונקציות $f_{ij}(t)$ המקיימות התנאים לעיל אזי אם:

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & \dots & f_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{r1}(t) & & f_{rm}(t) \end{pmatrix}$$

נקבל:

$$L[f(t)] = F(s) = \begin{pmatrix} F_{11}(s) & \dots & F_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ F_{r1}(s) & \dots & F_{rm}(s) \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

6.110 דוגמאות

א. נתון כי $L[f(t)] = F(s)$ מצא את

$$L\left[\int_{t-\alpha}^t f(u)du\right]$$

כאשר α קבוע וחיוני.

פתרון:

נסמן:

$$\int_0^t f(u) du = g(t)$$

לכן לפי (6.7):

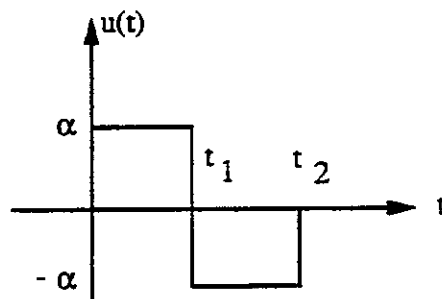
$$L[g(t)] = \frac{F(s)}{s} \triangleq G(s)$$

$$\int_{t-\alpha}^t f(u) du = \int_0^t f(u) du - \int_0^{t-\alpha} f(u) du = g(t) - g(t-\alpha)$$

ומכאן:

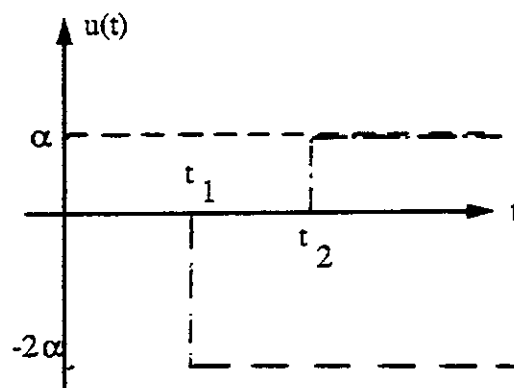
$$L\left[\int_{t-\alpha}^t f(u) du\right] = G(s) - e^{-s\alpha}G(s) = \frac{F(s)}{s} (1 - e^{-s\alpha})$$

ב. מצא את התמרת לפלס של הפונקציה $u(t)$ המוראית בציר.



פתרון:

את הפונקציה $u(t)$ ניתן לפצל לשלש פונקציות מדרגה כבציר הבא:



מכאן:

$$u(t) = \alpha \cdot 1(t) - 2\alpha \cdot 1(t-t_1) + \alpha \cdot 1(t-t_2)$$

ובשימוש בסעיף 6.15 ו-(6.4) נקבל:

$$u(s) = \frac{\alpha}{s} - 2 \frac{\alpha}{s} e^{-st_1} + \frac{\alpha}{s} e^{-st_2} = \frac{\alpha}{s} (1 - 2e^{-st_1} + e^{-st_2})$$

הערה: ניתן גם למצוא את $u(s)$ ישירות מהגדרת התמרת לפלס:

$$u(s) = \int_0^{t_1} \alpha e^{-st} dt - \int_{t_1}^{t_2} \alpha e^{-st} dt$$

ג. נתונות שתי הפונקציות הבאות:

$$1) f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{at} & t \geq 0 \end{cases} \quad 2) f(t) = \begin{cases} -e^{at} & t \leq 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

$$a > 0$$

מצא את התמרת לפלס הדו-צדדית של שתי פונקציות אלו.

פתרון:

פונקציה 1.

$$F_{II}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{s-a} ; \quad \operatorname{Re}(s) > a$$

פונקציה 2.

$$F_{II}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{at} e^{-st}) dt = - \int_{-\infty}^0 e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{s-a} ; \quad \operatorname{Re}(s) < a$$

לכאורה לשתי פונקציות שונות אותה התמרה. ההבדל, כמובן, נעוץ בתחומי התכנסות ההתמרות. לכן על

מעת לזהות את הפונקציה שהתמרתה הדו-צדדית היא $\frac{1}{s-a}$ יש לדעת את תחום ההתכנסות.

6.2 פתרון משוואות המצב באמצעות התמרת לפלס (מערכות רציפות)

6.2.1 נתונה המערכת הסטיונרית באמצעות הממוש:

$$(6.16) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$(6.17) \quad y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

בהתאם ל-6.18 נגדיר את התמרות הוקטורים $x(t)$, $u(t)$ ו- $y(t)$ כ:

$$X(s) \triangleq L[x(t)], \quad U(s) \triangleq L[u(t)], \quad Y(s) \triangleq L[y(t)]$$

נתמיר את (6.16) ו-(6.17) ונקבל:

$$(6.18) \quad sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$(6.19) \quad Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

מ-(6.18) נקבל:

$$(6.20) \quad X(s) = [sI - A]^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s)$$

ומ-(6.19) בהצבת (6.20) נקבל:

$$(6.21) \quad Y(s) = C(sI - A)^{-1} x(0) + (C(sI - A)^{-1} B + D)U(s)$$

משוואות (6.20) ו-(6.21) הן הפתרון המתמך של משוואות המצב והיציאה.

את $x(t)$ ואת $y(t)$ ניתן למצוא על ידי :

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] ; y(t) = L^{-1}[Y(s)]$$

6.22 שיטה נוספת לחישוב מטריצת המעבר $\phi(t) = e^{At}$.

ההתמרה ההפוכה של (6.20) נתן:

$$(6.22) \quad x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} x(0) + L^{-1}\{(sI - A)^{-1} BU(s)\}$$

מהשוואת (6.22) עם הפתרון שקבלנו בציר הזמן :

$$(6.23) \quad x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

מתקבל ש:

$$(6.24) \quad e^{At} = L^{-1} [(sI - A)^{-1}]$$

דוגמא: מצא e^{At} עבור :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{pmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{pmatrix}}{s^2 + 3s + 2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+1} & \frac{2}{s+2} - \frac{2}{s+1} \\ -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

הביטויים באגף הימני של השוויון האחרון מתקבלים מפרק ארבעת אברי המטריצה לשברים חלקיים.

$$e^{At} = L[(sI - A)^{-1}] = \begin{pmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-t} & 2(e^{-2t} - e^{-t}) \\ -e^{-2t} + e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{pmatrix}$$

623 מציאת התגובה לכניסה (פתרון מאולץ)

מהשוואת (6.21) עם (6.23) ושימוש ב-(6.17) נקבל:

$$(6.25) \quad y(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) + D u(t) = L^{-1} \{ [C(sI - A)^{-1} B + D] U(s) \}$$

דוגמא: נתונה המערכת:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} x$$

מצא $y(t)$ עבור כניסת מדרגה יחידתית $(u(s) = 1/s)$ $(x_0 = 0)$

פתרון:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s+5 & 1 \\ -4 & s \end{pmatrix}}{\det(sI - A)} = \frac{\text{Adj}(sI - A)}{(s+1)(s+4)}$$

$$C \text{ Adj}(sI - A) B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+5 & 1 \\ -4 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$C(sI - A)^{-1} B U(s) = \frac{2}{(s+1)(s+4)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1/2}{s} - \frac{2/3}{s+1} + \frac{1/6}{s+4}$$

$$y(t) = L^{-1} \{ C(sI - A)^{-1} B U(s) \} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-4t} \right) 1(t)$$

624 דוגמאות

א. (בוחן אמצע סמסטר - חורף תשמ"ג)

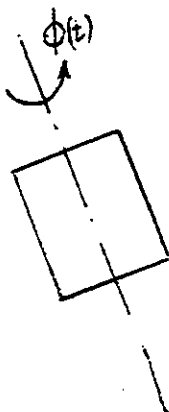
חללית בעלת מומנט אינרציה J סובבת סביב ציר הסימטריה שלה.

המקום הזוויתי של החללית בזמן t נתון על ידי $\phi(t)$

(ראה ציור). באמצעות סילוני גז ניתן להפעיל על

החללית מומנט סבוב $\mu(t)$. מומנט זה משמש כמשתנה כניסה.

החוכך קטן וניתן להזנחה. משתנה היציאה הוא המקום הזוויתי.



I. בחר את המקום הזויתי $\phi(t)$ ואת מהירותה הזוויתית של החללית של $\dot{\phi}(t)$ כמשתני מצב. הראה שמשוואות המצב ומשוואת היציאה של המערכת נתונות על ידי:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} \mu(t) \quad \beta = 1/J$$

$$y(t) = (1 \ 0) x(t)$$

II. חשב את מטריצת המעבר ואת תגובת ההלם של המערכת.

III. הנח שבזמן $t = 0$ נמצאת החללית במנוחה, כלומר $x_0 = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

מעוניינים לשנות את המקום הזויתי מזוית ϕ_0 לזוית ϕ_2 בפרק זמן t_2 שלאחריו תמצא החללית במנוחה.

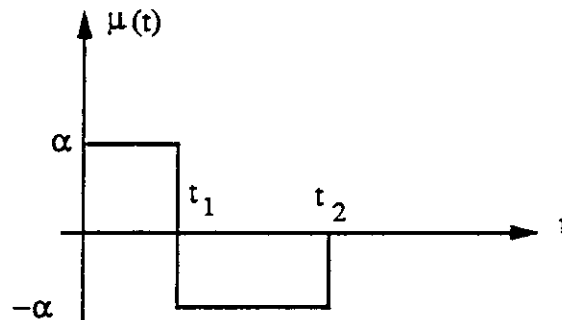
(כלומר $x(t_2) = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ 0 \end{pmatrix}$). ניתן להפעיל שני סילוני גז המפעילים מומנטים בכוונים הפוכים זה לזה כך

שמשתנה הכניסה $\mu(t)$ עשוי לקבל אך ורק שלושה ערכים: α , 0 , $-\alpha$ (α - קבוע). אם מפעילים את

הסילונים כמתואר בצירוף חשב את הזמנים t_1 ו- t_2 כך שהחללית תשנה את הזוית מ- ϕ_0 ל- ϕ_2 ותשאר

במצב זה.

בטא תשובתך באמצעות ϕ_0 , ϕ_2 ו- β .



פתרון :

I. משוואת התנועה:

$$J \ddot{\phi} = \mu$$

ממוש :

$$\left. \begin{matrix} x_1 = \phi \\ x_2 = \dot{\phi} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{\phi} = \dot{x}_2 = \frac{1}{J} \mu \end{matrix}$$

ומכאן:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} \mu$$

$$y = x_1 = (1 \ 0) x$$

$$\phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$

.II

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{pmatrix}; \quad (sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

ומכאן -

$$\Phi(t) = L^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תגובת ההלם :

$$g(t) = Ce^{At}B = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \beta t$$

.III. הכניסה $u(t)$ זהה לנתון בדוגמא ב' סעיף 6.19, כלומר :

$$u(s) = \frac{\alpha}{s} (1 - 2e^{-s t_1} + e^{-s t_2})$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x(t_2) = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נציב הנ"ל ב-(6.20) ונקבל:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x_0 + (sI - A)^{-1} B u(s) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\phi_0}{s} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha\beta}{s^2} (1 - 2e^{-t_1 s} + e^{-t_2 s}) \begin{pmatrix} \frac{1}{s} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\beta \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} - (t-t_1)^2 \cdot 1(t-t_1) + \frac{1}{2}(t-t_2)^2 \cdot 1(t-t_2) \\ t - 2(t-t_1) \cdot 1(t-t_1) + (t-t_2) \cdot 1(t-t_2) \end{pmatrix}$$

ולכן

$$x(t_2) = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0 + \alpha\beta \left(\frac{t_2^2}{2} + (t_2 - t_1)^2 \right) \\ \alpha\beta(t_2 - 2(t_2 - t_1)) \end{pmatrix}$$

מהשוויון האחרון מקבלים שתי משוואות בשני נעלמים, t_1 ו- t_2 :

$$t_2 - 2(t_2 - t_1) = 0 \Rightarrow t_2 = 2t_1$$

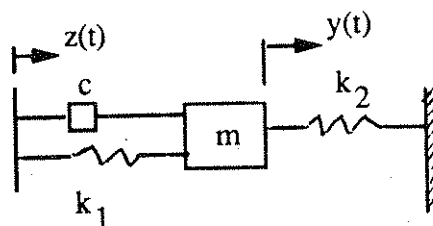
$$\phi_2 = \phi_0 + \alpha\beta \left(\frac{t_2^2}{2} + (t_2 - t_1)^2 \right)$$

בהצבת $t_1 = t_2/2$ במשוואה האחרונה וחלוץ t_2 נקבל:

$$t_2 = \frac{2\sqrt{\phi_2 - \phi_0}}{\sqrt{\alpha\beta}} ; \quad t_1 = t_2/2 = \sqrt{\frac{\phi_2 - \phi_0}{\alpha\beta}}$$

∴ נתונה המערכת המכנית שבציור. $z(t)$ הינו מיקום הפלטה חסרת משקל ומוגדר ככניסה למערכת.

$y(t)$ הינו המיקום של המסה m ומוגדר כיציאה מהמערכת.



$$m = 1, \quad k_1 = k_2 = 5, \quad c = 2$$

1. כתוב ממוש במרחב המצב למערכת הנ"ל ומצא את $y(t)$ עבור $t > 0$ אם נתון :

$$z(t) = t \cdot 1(t), \quad \dot{y}(0) = -1, \quad y(0) = 2.5$$

2. פתור את הנ"ל ישירות באמצעות התמרת לפלס של המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את דינמיקת

המערכת.

פתרון:

משוואת התנועה:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + (k_1 + k_2)y(t) = c\dot{z}(t) + k_1z(t)$$

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 10y(t) = 2\dot{z}(t) + 5z(t)$$

עבור $u \triangleq z(t)$ מתקבל הממוש הבא בצורה המלווה:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [5 \quad 2] x(t)$$

נחשב את $x(0)$ מתוך תנאי ההתחלה על y .

$$y(0) = Cx(0)$$

$$\dot{y}(0) = C\dot{x}(0) = CAx(0) + CBu(0)$$

$u(0) = 0$ ומתקבלות שתי המשוואות הבאות :

$$2.5 = 5x_{10} + 2x_{20}$$

$$-1 = -20x_{10} + x_{20}$$

כאשר :

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$$

מפתרון משוואות אלו מתקבל $x(0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

ניתן גם לחשב את $x(0)$ בשיטה שפיתחנו בפרק 5 (ראו (5.36)) :

$$x(0) = O^{-1}Y(0) - O^{-1}TU(0); \quad O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -20 & 1 \end{pmatrix}; \quad O^{-1} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 20 & 5 \end{pmatrix}$$

במקרה זה היות ו- $U(0)=0$ נקבל $TU(0)=0$ ולכן :

$$x(o) = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 20 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נציב התוצאות הנ"ל עם $U(s) = \frac{1}{s^2}$ למשוואה (6.21) ונקבל:

$$\begin{aligned} Y(s) &= [5 \ 2] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 10 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix} + [5 \ 2] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 10 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s^2} = \\ &= \frac{2.5s + 4}{s^2 + 2s + 10} + \frac{2s + 5}{(s^2 + 2s + 10)s^2} \end{aligned}$$

לאחר פרוק הבטוי האחרון לשברים חלקיים וסדור המכנה בצורה מתאימה מתקבל:

$$Y(s) = \frac{0.5}{s^2} + \frac{0.1}{s} + \frac{2.4(s+1)}{(s+1)^2 + 3^2} + \frac{0.9}{(s+1)^2 + 3^2}$$

ובהתמרה הפוכה:

$$y(t) = 0.5t + 0.1 + 2.4e^{-t}\cos 3t + 0.3e^{-t}\sin 3t \quad t \geq 0$$

2. התמרת המשוואה הדיפרנציאלית היא:

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - sy(o) - \dot{y}(o) + 2sY(s) - 2y(o) + 10Y(s) = \\ = 2sZ(s) - 2z(o) + 5Z(s) \end{aligned}$$

ומכאן בהצבת $Z(s) = 1/s^2$ מתקבל:

$$Y(s) = \frac{2.5s + 4}{s^2 + 2s + 10} + \frac{2s + 5}{(s^2 + 2s + 10)s^2}$$

זהו כמובן אותו בטוי כפי שהתקבל בשיטה הקודמת והמשך הפתרון הוא זהה.

6.3 התמרת Z (Z-Transform)

6.3.1 התמרת Z הינה העתקה ליניארית של פונקציה בדידה $f(k)$ ($k = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$)

למשור הקומפלקסי z באופן הבא:

א. התמרה דו-צדדית:

$$(6.26) \quad F(z) = Z[f(k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

ב. התמרה חד-צדדית:

$$(6.27) \quad F(z) = Z[f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

אם נתונה הפונקציה הבדידה $f(kT)$ תהיינה התמרות z מוגדרות לפי :

$$F(z) = Z[f(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \quad (6.27) \quad (II) \quad (II)$$

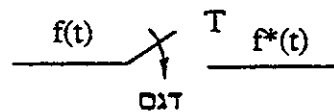
רק לפונקציות בדידות עבורם הסכומים ב-(6.26) וב-(6.27) מתכנסים יש התמרת z .

ערכי z עבורם הסכומים מתכנסים נקראים תחום התכנסות ההתמרה.

עבור (6.26) התחום בדרך כלל נתון על ידי $r < |z| < R$, ועבור (6.27) התחום בדרך כלל נתון על ידי $|z| > r$.

6.32 התמרת Z של פונקציות רציפות דגומות

תאור סכימטי של פעולת הדגימה, בפרקי זמן קבועים, של פונקציה רציפה $f(t)$ נתון בציור.



ביציאה מהדגם מתקבל טור של פולסים (או מספרים) אשר ערכיו הם: $\dots f(2T), f(T), f(0), f(-T), \dots$ וכי, כאשר T הוא אינטרוול הדגימה.

הפונקציה הדגומה המופיעה ביציאה מהדגם מסומנת בציור ב- $f^*(t)$, ולה ערכים בדידים במידה ומשך הדגימה קטן מאד יחסית לאינטרוול הדגימה. את פעולת הדגם בתנאים אלו ניתן לתאר מתמטית כטור אינסופי של הלמים בעצמת יחידה. הלמים אלו מופיעים בזמני הדגימה. לכן:

$$f^*(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) = \dots + f(-T) \delta(t + T) + f(0) \delta(t) + f(T) \delta(t - T) + \dots \quad (6.28)$$

אם נשתמש בהתמרת לפלס של פונקצית הלם ובמשפט ההזזה תתקבלנה התמרות לפלס הדו-צדדית והחד-צדדית של (6.28),

$$F_{II}^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-nTs} \quad (6.29)$$

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTs} \quad (6.30)$$

אם נציב $z = e^{+Ts}$ ב-(76.29) וב-(6.30) נקבל את (6.27).

מסקנה: ניתן לקבל את התמרת Z של פונקציה דגומה על ידי הצבת:

$$e^{Ts} = z$$

(6.31)

או:

$$s = \frac{1}{T} \ln z$$

בהתמרת לפלס של $f^*(t)$.

6.3.3 שיטות לקבלת התמרת Z

א. מתוך ההגדרה (שמוש ב- (6.26), (6.27), או (6.29), (6.30)).

ב. על ידי משפט השארית:

$$F(z) = \sum_{\text{residue}} [F(s) \frac{1}{1 - e^{Ts} z^{-1}}]$$

בקטבים של $F(s)$

(6.32)

כאשר $F(s)$ הינה התמרת לפלס של $f(t)$.

לא נרחיב במסגרת קורס זה את הטיפול בשיטה זו.

וכמובן:

ג. בעזרת טבלאות התמרת Z , (טבלת התמרות נתונה בסעיף 6.6).

6.3.4 דוגמאות בשיטה א' (התמרות חד צדדיות)

בשיטה זו ניתן לקבל התמרות של פונקציות פשוטות. מציבים את הפונקציה הבדידה $f(k)$ בהגדרת

ההתמרה (6.26) או (6.27) ומנסים למצוא ביטוי סגור להתמרה.

א. פונקצית הלם בדידה בעצמת p ($f(k) = p\delta(k)$).

$$f(k) = \begin{cases} p & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

נציב ב- (6.27) ונקבל:

$$F(z) = \sum_0^{\infty} f(k) z^{-k} = p$$

ב. פונקצית מדרגה $f(k) = 1 \quad k = 0, 1, 2, \dots$



$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z^{-1}| < 1$$

ג. פונקצית אקספוננט $f(k) = e^{-ak}$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak} z^{-k} = 1 + e^{-a} z^{-1} + (e^{-a} z^{-1})^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-a} z^{-1}} \quad |e^{-a} z^{-1}| < 1$$

$$|z| > |e^{-a}|$$

הערה: אלו דגמנו את $f(t) = e^{-at}$ באינטרולים של T היינו מקבלים:

$$f(nT) = e^{-anT} \quad n = 0, 1, \dots$$

לכן התמרת Z של $f(nT)$ תהיה:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \cdot |z| > |e^{-aT}|$$

ד. פונקציות טריגונומטריות $f(t) = e^{+j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$

$$f(nT) = e^{+nj\omega T} = \cos(n\omega T) + j \sin(n\omega T) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{+nj\omega T} z^{-n} = 1 + e^{j\omega T} z^{-1} + (e^{j\omega T} z^{-1})^2 + \dots =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{j\omega T}} =$$

$$= \frac{z}{(z - \cos \omega T) - j \sin \omega T} \times \frac{z - \cos \omega T + j \sin \omega T}{(z - \cos \omega T) + j \sin \omega T} =$$

$$= \frac{z(z - \cos \omega T) + jz \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

לכן:

$$Z(\cos(n\omega T)) = \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

$$Z(\sin(n\omega T)) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

$$f(k) = \alpha^k \quad \text{ה.}$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k z^{-k} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha} \quad (|z| > \alpha)$$

6.3.5 התמרת Z ההפוכה, (Inverse Z Transform)

הבעיה: נתון $F(z)$

יש למצוא $f(n)$ או $f(nT)$.

שלוש דרכים לביצוע ההתמרה ההפוכה:

- א. פתוח לטור חזקות.
- ב. פתוח לשברים חלקיים ושמוש בטבלאות.
- ג. אינטגרל האנורסיה.

א. פתוח לטור חזקות.

אם :

$$(6.33) \quad F(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \dots}$$

נחלק ונקבל:

$$(6.34) \quad F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots$$

וכיון שלפי (6.27)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = f(0) + f(1) z^{-1} + f(2) z^{-2} + \dots$$

יוצא שהמקדם של z^{-k} הוא $f(k)$.

דוגמא:

$$F(z) = \frac{2z}{(z-2)(z-1)^2} = \frac{2z^{-2}}{1-4z^{-1}+5z^{-2}-2z^{-3}} =$$

$$= 2z^{-2} + 8z^{-3} + 22z^{-4} + \dots$$

ומכאן:

$$f(0) = f(1) = 0$$

$$f(2) = 2; \quad f(3) = 8; \quad f(4) = 22$$

חסרון השיטה שאינה נותנת ביטוי כללי ל- $f(k)$.

ב. פתוח לשברים חלקיים.

מפרקים את $\frac{F(z)}{z}$ לשברים חלקיים ומבצעים ההתמרה ההפוכה לפי טבלאות.

דוגמא:

$$F(z) = \frac{2z}{(z-2)(z-1)^2}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{2}{(z-2)(z-1)^2} = \frac{2}{z-2} - \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{2}{z-1}$$

לכן

$$F(z) = \frac{2z}{z-2} - \frac{2z}{(z-1)^2} - \frac{2z}{z-1}$$

ומכאן:

$$f(nT) = 2 \cdot 2^n - 2 \cdot n - 2 \cdot 1^n \quad n \geq 0$$

ג. שמוש באינטגרל האנאליטי.

ניתן להוכיח ש-

$$(6.35) \quad f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) z^{n-1} dz$$

כאשר המסלול הסגור בתוך אזור ההתכנסות של $F(z)$.

לא נרחיב הספול בשיטה זו בקורס זה.

6.3.6 משפט התמרת Z

א. ליניאריות - באם $Z[f_1(nT)] \triangleq F_1(z)$ ו- $Z[f_2(nT)] \triangleq F_2(z)$ אזי :

$$(6.36) \quad Z[\alpha f_1(nT) + \beta f_2(nT)] = \alpha F_1(z) + \beta F_2(z)$$

ב. הזזה ממשית - באם $Z[f(kT)] \triangleq F(z)$ אזי :

$$(6.37) \quad Z[f(kT - nT)] = z^{-n} F(z) + \sum_{k=0}^{n-1} f(kT - nT) z^{-k} \quad (n > 0)$$

$$(6.38) \quad Z[f(kT + nT)] = z^n F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{n-k} \quad (n > 0)$$

הוכחה:

לפי הגדרה (6.27):

$$Z[f(kT - nT)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT - nT) z^{-k} = z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT - nT) z^{-(k-n)} =$$

$$= z^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} f(kT - nT) z^{-(k-n)} + \sum_{k=0}^{n-1} f(kT - nT) z^{-k}$$

$$= z^{-n} F(z) + \sum_{k=0}^{n-1} f(kT - nT) z^{-k}$$

$$Z[f(kT + nT)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT + nT) z^{-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} f(kT + nT) z^{-(k+n)} =$$

$$= z^n [F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{-k}]$$

הערות:

1. אם נתון כח $f(kT) = 0$ עבור $k < 0$ תצטמצם (6.37) ל-

$$(6.37)' \quad Z[f(kT - nT)] = z^{-n} F(z)$$

2. הפעלת (6.37) במקרים $n=1$ ו- $n=2$ נתן

$$n=1 \quad Z[f(kT-T)] = z^{-1} F(z) + f(-T)$$

$$n=2 \quad Z[f(kT-2T)] = z^{-2} F(z) + f(-2T) + f(-T) z^{-1}$$

ובדומה (6.38) נתן:

$$n = 1 \quad Z[f(kT+T)] = zF(z) - f(0)z$$

$$n = 2 \quad Z[f(kT+2T)] = z^2F(z) - f(0)z^2 - f(T)z$$

ג. משפט הערך ההתחלתי: אם $Z[f(nT)] \stackrel{\Delta}{=} F(z)$ ובאם $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ קיים אזי:

$$(6.39) \quad \lim_{n \rightarrow 0} f(nT) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

ד. משפט הערך הסופי: אם $Z[f(nT)] \stackrel{\Delta}{=} F(z)$ ובאם הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} f(nT)$ קיים אזי:

$$(6.40) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z)$$

הערה: הגבול $\lim_{nT \rightarrow \infty} f(nT)$ לא קיים באם ל- $F(z)$ קטבים (ראה פרק היציבות) מחוץ או על מעגל היחידה במשור z (פרט לקוטב אחד ב- $z=1$).

ה. משפט ההזזה הקומפלקסית: אם $Z[f(nT)] \stackrel{\Delta}{=} F(z)$

אזי:

$$(6.41) \quad Z[e^{\pm anT} f(nT)] = F(z^{\mp nT})$$

6.3.7 התמרת Z של וקטור או מטריצת פונקציות בדידות

בדומה לסעיף 6.1.8, אם $f(nT)$ הינה מטריצת פונקציות $f_{ij}(nT)$ ולכל $f_{ij}(nT)$ קיימת התמרת Z כך ש-

$$Z[f_{ij}(nT)] \stackrel{\Delta}{=} F_{ij}(z)$$

אזי:

$$(6.42) \quad Z[f(nT)] = Z \begin{pmatrix} f_{11}(nT), \dots, f_{1m}(nT) \\ \vdots \\ f_{r1}(nT), \dots, f_{rm}(nT) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}(z), \dots, F_{1m}(z) \\ \vdots \\ F_{r1}(z), \dots, F_{rm}(z) \end{pmatrix} = F(z)$$

6.3.8 פתרון משוואות הפרשים ליניאריות סטציונריות באמצעות התמרת Z

נתונה משוואת הפרשים הבאה:

$$(6.43) \quad y(k) - 3y(k-1) + 2y(k-2) = 2u(k-1) - 2u(k-2)$$

כאשר:

$$u(k) = \begin{cases} k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad y(k) = \begin{cases} 1 & k = -1 \\ 2 & k = -2 \\ 0 & k < -2 \end{cases}$$

מצא $y(k)$ עבור $k \geq 0$.

פתרון :

$$Z(u(k)) = Z(k) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

התמרת (6.43) לפי משפט ההזזה, (6.37), נתן :

$$Z\{y(k) - 3y(k-1) + 2y(k-2)\} = Z\{2u(k-1) - 2u(k-2)\}$$

$$Y(z) - 3[z^{-1}Y(z) + y(-1)] + 2[z^{-2}Y(z) + y(-2) + y(-1)z^{-1}] = 2z^{-1}u(z) - 2z^{-2}u(z)$$

או:

$$Y(z) \{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}\} - 3y(-1) + y(-2) + 2y(-1)z^{-1} = 2u(z)(z^{-1} - z^{-2})$$

ומכאן (בהצבת תנאי התחלה וכניסה)

$$Y(z) = -\frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} + \frac{2z^{-1}(1 - z^{-1})}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} \cdot \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

ולאחר צמצומים

$$Y(z) = -\frac{z(z+2)}{(z-1)(z-2)} + \frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}$$

פרק לשברים חלקיים וכינוס

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{2z}{(z-1)^2} - \frac{2z}{z-2}$$

לכן

$$y(k) = 1 - 2 \cdot 2^k - 2k \quad k \geq 0$$

6.4 פתרון משוואות המצב הבדידות באמצעות התמרת Z

6.4.1 נתונה המערכת הסטציונרית הבדידה:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \quad x(0)$$

נגדיר:

$$\begin{aligned} X(z) &\triangleq Z[x(k)] \\ U(z) &\triangleq Z[u(k)] \\ Y(z) &\triangleq Z[y(k)] \end{aligned} \quad (6.45)$$

נתמיר את (6.44) ונקבל:

$$zX(z) - zx(0) = AX(z) + BU(z) \quad (6.46)$$

$$Y(z) = CX(z) + DU(z) \quad (6.47)$$

מחלף $X(z)$ ב-(6.46) נקבל:

$$X(z) = (zI - A)^{-1} zx(0) + (zI - A)^{-1} BU(z) \quad (6.48)$$

-1

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1} zx(0) + [C(zI - A)^{-1}B + D] U(z) \quad (6.49)$$

משוואות (6.48) ו-(6.49) הן הפתרון המותמר של (6.44).

מדיעות $X(z)$ או $Y(z)$ ניתן על ידי התמרה הפוכה לקבל $x(k)$ ו- $y(k)$ בהתאמה.

6.4.2 שיטה נוספת לחישוב מטריצת המעבר $\phi(k) = A^k$

ההתמרה ההפוכה של (6.48) נתן:

$$x(k) = Z^{-1}[(zI - A)^{-1}z]x(0) + Z^{-1}[(zI - A)^{-1}BU(z)] \quad (6.50)$$

בפתרון בתחום הזמן קבלנו :

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu(j) \quad (6.51)$$

לכן:

$$A^k = Z^{-1}[(zI - A)^{-1}z] \quad (6.52)$$

דוגמא: מצא A^k עבור

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$zI - A = \begin{pmatrix} z & -1 \\ 6 & z+5 \end{pmatrix}$$

$$(zI - A)^{-1}z = \begin{pmatrix} z(z+5) & z \\ -6z & z^2 \end{pmatrix} \frac{1}{(z+2)(z+3)} = \begin{pmatrix} \frac{3z}{z+2} - \frac{2z}{z+3} & \frac{z}{z+2} - \frac{z}{z+3} \\ -6(\frac{z}{z+2} - \frac{z}{z+3}) & \frac{-2z}{z+2} + \frac{3z}{z+3} \end{pmatrix}$$

ומכאן:

$$A^k = \begin{pmatrix} 3(-2)^k - 2(-3)^k & (-2)^k - (-3)^k \\ -6((-2)^k - (-3)^k) & -2(-2)^k + 3(-3)^k \end{pmatrix}$$

דוגמא: מצא A^n עבור

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(zI - A)^{-1}z = \begin{pmatrix} z & -1 \\ 0 & z \end{pmatrix}^{-1}z = \begin{pmatrix} 1 & z^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = Z^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \delta(n) & \delta(n-1) \\ 0 & \delta(n) \end{bmatrix}$$

$$A^0 = I$$

הצבת $n=0$ נתן

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הצבת $n=1$ נתן

$$A^n = 0$$

עבור $n \geq 2$ נקבל

מטריצה כזו המקימת $A^n = 0$ עבור n כלשהוא ($n > 1$) נקראת נילפוטנטית.

6.4.3 מציאת פתרון מאולץ באמצעות התמרת Z

מהשוואת (6.50) עם (6.51) נקבל:

$$Z^{-1}[(zI - A)^{-1}BU(z)] = \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1}Bu(j)$$

(6.53)

דוגמא: נתונה מערכת על ידי משוואת הפרשים:

$$y(k+2) + 5y(k+1) + 6y(k) = u(k)$$

כאשר:

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

מצא $y(k)$ עבור $k \geq 0$ אם נתון:

פתרון: ממוש בצורה המלווה נתון:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (1 \ 0) x(k).$$

$$\left. \begin{aligned} y(k) &= x_1(k) \\ y(k+1) &= x_1(k+1) = x_2(k) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1(0) &= 0 \\ x_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1} BU(z)$$

מ-(6.49) נקבל:

$$\begin{aligned} C(zI - A)^{-1} B &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} z+5 & 1 \\ -6 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{(1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}}{(z+2)(z+3)} = \\ &= \frac{1}{(z+2)(z+3)} \end{aligned}$$

היות ו-

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

יהיה:

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)(z+3)}$$

פרק לשברים חלקיים:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1/12}{z-1} + \frac{-1/3}{z+2} + \frac{1/4}{z+3}$$

התמרה הפוכה:

$$y(k) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3}(-2)^k + \frac{1}{4}(-3)^k \quad k \geq 0$$

6.4.4 דוגמא

בניסוי מסויים נלקחות שתי סדרות בדיקות של מדידות $u_1(k)$ ו- $u_2(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). מתוך סדרות אלו מחשבים את ערכי הסדרה $y(k)$. לצורך ביצוע החישוב בזמן אמיתי נבנה אלגוריתם (שגרת מחשב) המשתמש בשתי סדרות של משתני עזר $x_1(k)$ ו- $x_2(k)$ הבא:

$$x_1(k+1) = 1.5x_1(k) - 1.4x_2(k) + 2u_1(k) + u_2(k)$$

$$x_2(k+1) = 0.5x_1(k) - 0.2x_2(k) + u_1(k) - u_2(k)$$

$$y(k) = x_1(k) - x_2(k)$$

א. כתוב את האלגוריתם הנ"ל במתכונת משוואות מצב (6.44).

ב. כתוב את הקשר בין $Y(z)$ ובין $U(z)$,

$$U(z) \triangleq Z \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix}$$

במתכונת של משואה (6.49).

ג. אם נתון כי $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $u_1(k) = 0$ ו- $u_2(k) = 1$ עבור $k \geq 0$ מצא את $y(k)$ לכל $k \geq 0$.

ד. מצא אלגוריתם אחר המשתמש במשתני עזר (מצב) אחרים $x'_1(k)$ ו- $x'_2(k)$ אשר מביא לאותו קשר

בין הסדרות $u_1(k)$, $u_2(k)$ לסדרה $y(k)$.

פתרון:

א. נגדיר:

$$x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

ו-

$$u(k) = \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix}$$

ונקבל:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1.5 & -1.4 \\ 0.5 & -0.2 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} U(k)$$

$$y(k) = (1 \quad -1) x(k)$$

ב. הקשר בין $Y(z)$ ו- $U(z)$ עבור ממוש במרחב המצב נתון על ידי:

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1} B U(z) = G(z)U(z)$$

$$G(z) = (1 \quad -1) \begin{pmatrix} z + 0.2 & -1.4 \\ 0.5 & z - 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{(z - 0.5 \quad 2z - 0.4)}{(z - 0.5)(z - 0.8)} =$$

$$\frac{z^2 - 1.3z + 0.4}{z^2 - 1.3z + 0.4} = \left(\frac{1}{z - 0.8} \quad \frac{2z - 0.4}{(z - 0.5)(z - 0.8)} \right)$$

ג. היות ו-

$$U(z) = Z \begin{pmatrix} 0 \\ 1(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z / (z - 1) \end{pmatrix}$$

נקבל :

$$Y(z) = G(z) U(z) = \left(\frac{1}{z - 0.8} \quad \frac{2z - 0.4}{(z - 0.5)(z - 0.8)} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{(2z - 0.4)z}{(z - 0.5)(z - 0.8)(z - 1)}$$

נפרק לשברים חלקיים ונקבל:

$$Y(z) = \frac{16z}{z - 1} + \frac{4z}{z - 0.5} - \frac{20z}{z - 0.8}$$

ומהתמרה הפוכה מתקבל:

$$y(k) = 16 + 4 \cdot 0.5^k - 20 \cdot 0.8^k \quad k \geq 0$$

ד. כל טרנספורמציה סימילרית של משתני המצב אינה משנה את הקשר כניסה-יציאה. נבחר x' המקיים

$$x = T x' \quad \text{כאשר } T_{2 \times 2} \text{ היא מטריצה כלשהיא לא סינגולרית.}$$

המערכת החדשה תהיה :

$$x'(k+1) = T^{-1} A T x'(k) + T^{-1} B u(k)$$

$$y(k) = C T x'(k)$$

כדוגמא נבחר $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ומשוואות המצב החדשות הן:

$$x'(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} x'(k) + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0] x'(k)$$

6.5 התמרת פוריה - (Fourier Transform)

6.5.1 המדרה: התמרת פוריה של הפונקציה $f(t)$ מוגדרת לפי:

$$F(f(t)) = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt \quad (6.54)$$

ובהתאמה, ההתמרה ההפוכה :

$$F^{-1}(F(j\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (6.55)$$

6.5.2 הערות

א. התנאים לקיום התמרת פוריה בדומה להתמרת לפלס הם:

I. $f(t)$ רציפה למקוטעין.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad \text{II}$$

תנאי II הינו תנאי חמור ולכן להרבה פונקציות, שלהן התמרת לפלס, אין התמרת פוריה.

ב. לפונקציות שאינן פריודיות אותן התמרות פוריה ולפלס דו-צדדית באם תחום ההתכנסות של

האחרונה כולל את $\text{Re}(s) = 0$. במקרה זה, על מנת לקבל התמרת פוריה מציבים בהתמרת לפלס

הדו-צדדית $s = j\omega$. (שים לב כי אם מציבים את השוויון האחרון ב-(6.1) מקבלים את (6.54)).

ג. בדומה להתמרות לפלס, התמרת פוריה היא חד ערכית. דהיינו, אין שתי פונקציות בזמן שלהן אותה התמרה.

דוגמא: מצא התמרת פוריה לשתי הפונקציות שבדוגמא ג' בסעיף 6.1.9 . פתרון : תחום ההתכנסות

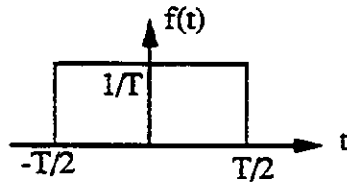
של התמרת לפלס הדו-צדדית של הפונקציה הראשונה אינו כולל את $\text{Re}(s) = 0$ ולכן לפונקציה 1

אין התמרת פוריה. התנאי הנ"ל מתקיים עבור פונקציה 2. לכן:

ד. $|F(j\omega)|$ נקראת גם הספקטרום התדירותי של האות $f(t)$ ומתארת את ה"תוכן" התדירותי של האות כפונקציה של התדירות ω .

6.5.3 דוגמאות

א. התמרת פורייה של פולס מלבני (כמוראה בציור)

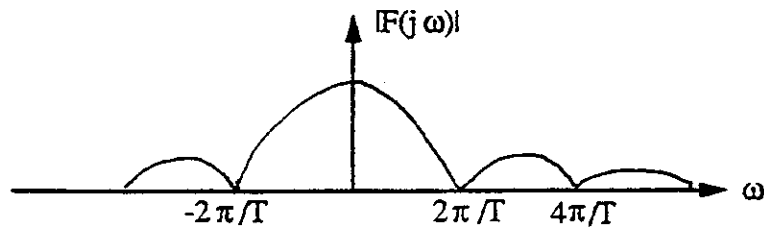


$$f(t) = \begin{cases} 1/T & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

לפי ההגדרה ב-(6.54) נקבל:

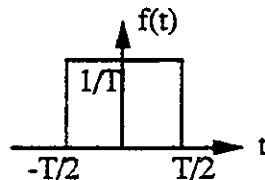
$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{T} e^{-j\omega t} dt = \frac{\sin \omega T / 2}{\omega T / 2}$$

הספקטרום התדירותי של הפולס נתון בציור.



ב. התמרת פורייה של פונקציית הלם - $\delta(t)$.

ניתן לכתוב:

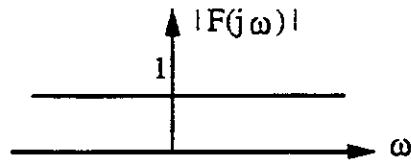


$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} f(t)$$

לכן לפי דוגמא א' נקבל:

$$F(j\omega) = F(\delta(t)) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\sin \omega T / 2}{\omega T / 2} = 1$$

הספקטרום התדירותי של פונקציית הלם נתון בציור ומשמעותו שלאות הלם אותה אמפליטודה בכל התדירויות.



ג. $F^{-1}[\delta(\omega - \omega_0)] = ?$; ω_0 תדירות קבועה.

לפי (6.55) נקבל:

$$F^{-1}(\delta(\omega - \omega_0)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

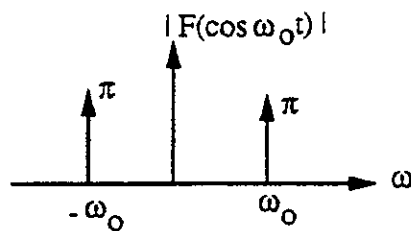
ומכאן :

ד. התמרת פוריה של פונקציה מחזורית:

$$F(\cos \omega_0 t) = F\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\} = \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

וכצפוי הספקטרום התדירותי של פונקציה מחזורית $\cos \omega_0 t$ במקרה זה) כולל אמפליטודות בתדירות

$\pm \omega_0$ בלבד (ראה ציור).



6.6 טבלת התמורות לפלס Z-1 (חד צדדיות).

$f(t)$	$F(s)$	$f(kT)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	$\delta(kT) \begin{cases} = 1 & t = 0 \\ = 0 & t \neq 0 \end{cases}$	1
$1(t)$ קפיצת מדרגה	$\frac{1}{s}$	$1(k)$	$\frac{z}{z-1}$
t	$1/s^2$	kT	$Tz/(z-1)^2$
$\frac{1}{2}t^2$	$1/s^3$	$\frac{1}{2}(kT)^2$	$\frac{T^2}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{Te^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$
$\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$\sin(k\beta T)$	$\frac{z \sin(\beta T)}{z^2 - 2z \cos(\beta T) + 1}$
$\cos(\beta t)$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$	$\cos(k\beta T)$	$\frac{z^2 - z \cos(\beta T)}{z^2 - 2z \cos(\beta T) + 1}$
$e^{-at} \sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-akT} \sin(k\beta T)$	$\frac{e^{-aT}z \sin(\beta T)}{z^2 - 2e^{-aT}z \cos(\beta T) + e^{-2aT}}$
a^t	$\frac{1}{s - \ln a}$	a^{kT}	$\frac{z}{z-a^T}$
$f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	$f(kT-nT)$ $f(kT+nT)$	$z^{-n}F(z) + \sum_{k=0}^{n-1} f(kT-nT)z^{-k}$ $z^n[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k}]$
$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	$\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT)$	$\lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})F(z)$
$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	$\lim_{k \rightarrow 0} f(kT)$	$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$

פרק 7 : אינטגרל (סכום) הקונבולציה

מטריצות תמסורת

7.1 מבוא

עד כה תארנו את הקשרים בין היציאות והכניסות של מערכת באמצעות משוואות דיפרנציאליות (משוואות הפרש), או אקוילנטיית, באמצעות משוואות מצב. ניתן לתאר את הקשרים בין היציאות והכניסות בצורות אחרות. בפרק זה נדון בקשרים (בין כניסות ליציאות) הבאים :

א. בציור הזמן - אינטגרל הקונבולציה (מערכות רציפות)

סכום הקונבולציה (מערכות בדידות).

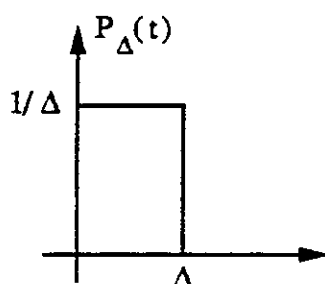
ב. במשור הקומפלקסי - מטריצות תמסורת.

7.2 אינטגרל הקונבולציה (מערכות רציפות)

7.2.1 פונקציית הלם (אימפולס) - $\delta(t)$.

את פונקציית ההלם הגדרנו ב-5.4.1. ראינו גם כי ניתן לקבלה כגבול פונקציית הפולס הנתונה שוב בציור

7.1 כאשר $\Delta \rightarrow 0$:

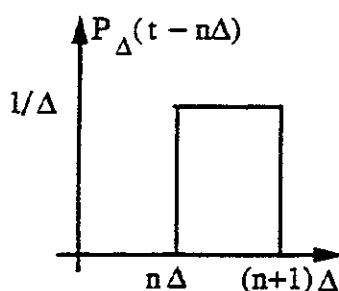


$$(7.1) \quad \delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} P_{\Delta}(t)$$

ציור 7.1

אם נזיז את פונקציית הפולס כך שתחל ב- $t = n\Delta$ נקבל את $P_{\Delta}(t - n\Delta)$ המוראית בציור 7.2. אם

$\Delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, תגדיר $\tau = n\Delta$ נקבל :

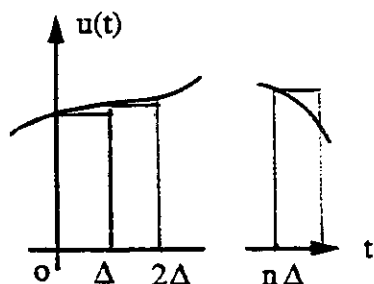


$$(7.2) \quad \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} P_{\Delta}(t - n\Delta) = \delta(t - \tau)$$

ציור 7.2

7.2.2 הצגת אות (פונקציה) באמצעות הלמים

את האות $u(t)$ ניתן לקרב, קרוב מדויק, (ראה ציור 7.3), בדרך הבאה :



$$(7.3) \quad u(t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta) p_{\Delta}(t - n\Delta) \Delta$$

ציור 7.3

כאשר:

$$(7.4) \quad p_{\Delta}(t - n\Delta) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & n\Delta \leq t < (n+1)\Delta \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

אם נסמן $\tau = n\Delta$ תקח $\Delta \rightarrow 0$ ו- $n \rightarrow \infty$, ונשתמש ב-(7.2) נקבל כי (7.3) נתון:

$$(7.5) \quad u(t) = \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta) p_{\Delta}(t - n\Delta) \Delta = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad -\infty < t < \infty$$

את (7.5) ניתן לפרש כפרק הפונקציה $u(t)$ לרכיבים $u(\tau)\delta(t-\tau)$, דהיינו פרוק באמצעות הלמים בעצמות $u(\tau)$.

7.2.3 אינטגרל הסתבולציה

נסמן ב- $g(t, \tau)$ את תגובת המערכת הליניארית בזמן t לכניסת אימפולס יחידה בזמן τ , $\delta(t-\tau)$. מתכונת הליניאריות נקבל שתגובתה לכניסת אימפולס $\delta(t-n\Delta)$ בעצמת $u(n\Delta)\Delta$ תהיה:

$$g(t, n\Delta) u(n\Delta) \Delta$$

$$\sum_n g(t, n\Delta) u(n\Delta) \Delta \quad \text{ולכן התגובה ל-} \sum_n u(n\Delta) \delta(t - n\Delta) \Delta \quad \text{תהיה:}$$

וכאשר $\tau = n\Delta$, $n \rightarrow \infty$, $\Delta \rightarrow 0$ נקבל שהתגובה $y(t)$ בזמן t סתנה על ידי:

$$(7.6) \quad y(t) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \sum_n g(t, n\Delta) u(n\Delta) \Delta = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau) u(\tau) d\tau$$

משוואה (7.6) מציגה קשר בין יציאת המערכת בזמן t , $y(t)$, לבניסה $u(\cdot)$. קשר זה נקרא אינטגרל הקונבולציה. הקשר הנ"ל דן אך ורק בהשפעת הבניסה על היציאה ואינו לוקח בחשבון תנאי התחלה.

הערה: הקשר ב-(7.6) פותח למקרה הסקלרי (SISO) אך תופס גם במקרה הווקטורי. אם $y \in R^r$, $u \in R^m$

תהיה $g(t, \tau) \in R^{r \times m}$ מטריצה

7.2.4 מקרים פרטיים של (7.6)

א. במערכת סטציונרית מתקיים לכל α :

$$(7.7) \quad g(t, \tau) = g(t + \alpha, \tau + \alpha)$$

$$(7.8) \quad g(t, \tau) = g(t - \tau, 0) = g(t - \tau) \quad \text{ולכן:}$$

עם (7.8) תתקבל (7.6) כ-

$$(7.9) \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad -\infty < t < \infty$$

ב. במערכת סיבתית (קוואלית) אין התגובה לבניסה מקדימה את הבניסה. במקרה זה תתקבל (7.9) כ:

$$(7.10) \quad y(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

אם בנוסף לסטציונריות ולסיבתיות, הבניסה $u(t) = 0$ עבור $t < 0$ נקבל:

$$(7.11) \quad y(t) = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

7.3 סכום הקונבולציה (מערכות בדידות)

בפרק הקודם הוראה שניתן לתאר פנקציה בדידה $u(n)$ על ידי טור הלמים משוקלל, דהיינו:

$$(7.12) \quad u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) \delta(n - k)$$

בדומה למערכות רציפות נסמן את תגובת המערכת הליניארית הבדידה ברגע n לבניסת הלם יחידתית ברגע k על ידי $g(n, k)$.

בהנחת הליניאריות, תהיה תגובת המערכת להלם בעצמת $u(k)$: $g(n, k)u(k)$ ותגובתה לטור הלמים משוקלל הנתון על ידי (7.12) תהיה לכן:

$$(7.13) \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n, k) u(k)$$

הקשר כניסה-יציאה ב-(7.13) נקרא בשם **סכום הקונבולוציה**. קשר זה עוסק אך ורק בתגובה המאולצת (ללא תנאי התחלה).

עבור מערכת סטציונרית נקבל :

$$(7.14) \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n-k)u(k)$$

עבור מערכת סטציונרית וסיבתית נקבל :

$$(7.15) \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^n g(n-k)u(k)$$

ואם גם $u(k) = 0$ עבור $k < 0$ יתקבל :

$$(7.16) \quad y(n) = \sum_{k=0}^n g(n-k)u(k)$$

7.4 מטריצות תמסורת (מערכות סטציונריות)

7.4.1 מערכות רציפות

את אינטגרל הקונבולוציה (7.11) נתמיר בהתמרת לפלס :

$$(7.17) \quad \begin{aligned} Y(s) &= \int_0^{\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(t-\tau)u(\tau)d\tau e^{-st}dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} g(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt \right] u(\tau)e^{-s\tau}d\tau \end{aligned}$$

נגדיר $v = t-\tau$ ונפרד האינטגרלים שב-(7.17)

$$(7.18) \quad \begin{aligned} Y(s) &= \int_{-\tau}^{\infty} g(v)e^{-sv}dv \int_0^{\infty} u(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} g(v)e^{-sv}dv \int_0^{\infty} u(\tau)e^{-s\tau}d\tau \end{aligned}$$

האינטגרל השני ב-(7.18) אינו אלא $U(s) = L[u(t)]$. את האינטגרל הראשון נסמן כ- $G(s)$. נתון על ידי :

$$(7.19) \quad G(s) \triangleq \int_0^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

ואינו אלא התמרת לפלס של תגובת ההלם של המערכת. $G(s)$ נקראת בשם **מטריצת התמסורת** של המערכת והיא הקושרת בין וקטורי הכניסה והיציאה המותמרים לפי :

$$(7.20) \quad Y(s) = G(s) U(s)$$

ממדי מטריצות התמסורת הם $(r \times m)$, כאשר r - מס' היציאות, ו- m - מס' הכניסות.

הערה: במערכת SISO - $G(s)$ הינה פונקציית תמסורת ואת משוואה (7.20) ניתן לכתוב במקרה זה בדרך הבאה:

$$(7.21) \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

דהיינו: פונקציית התמסורת היא היחס בין היציאה המותמרת לבין הכניסה המותמרת עבור תנאי התחלה אפס.

7.4.2 מערכות בדידות

את סכום הקונבולוציה שב-(7.16) נתמיר התמרת z לפי הגדרה:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g(n-k)u(k)z^{-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g(n-k)z^{-(n-k)}u(k)z^{-k} \end{aligned} \quad (7.22)$$

נסמן: $n-k = p$, ונקבל:

$$(7.23) \quad Y(z) = \sum_{p=-k}^{\infty} g(p)z^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}$$

היות ועבור מערכת סיבתית תהיה תגובת ההלם: $g(p) = 0$, $p < 0$, תהיה (7.23) נתונה על ידי:

$$(7.24) \quad Y(z) = \sum_{p=0}^{\infty} g(p)z^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}$$

אם נגדיר:

$$(7.25) \quad G(z) = \sum_{p=0}^{\infty} g(p)z^{-p}$$

ונזכר כי:

$$U(z) = Z[u(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}$$

נקבל מ-(7.24)

$$(7.26) \quad Y(z) = G(z)U(z)$$

$G(z)$ נקראת בשם מטריצת התמסורת הבדידה (או הפולסית) של המערכת. ממדיה הם $r \times m$, והיא אינה אלא התמרת Z של תגובת ההלם של המערכת הבדידה.

7.5 קבלת מטריצת תמסורת ממימוש נתון

7.5.1 מערכות רציפות

אם משווים את הפתרון המתמור של משוואות המצב, (6.20), עם (7.20), (וזוכרים כי מטריצת תמסורת מוגדרת עבור $x(0) = 0$) מקבלים :

$$(7.27) \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

היות ו- $G(s) = L[g(t)]$, כאשר $g(t)$ הינה תגובת ההלם של המערכת, תתן התמרת לפלס ההפוכה של (7.27) :

$$(7.28) \quad g(t) = L^{-1}[G(s)] = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

דוגמא 1 : נתונה מערכת באמצעות הממש :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

מצא את מטריצת התמסורת של המערכת.

פתרון : לפי (7.27) נקבל :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

דוגמא 2 : מצא את תגובת ההלם של המערכת שבדוגמא 1.

פתרון : דרך א'.

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{-t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1} \left(\frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s+2}} \cdot \frac{2}{s+1} \right) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{-t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

דרך ב':

$$g(t) = Ce^{At}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{-t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

הערה: אם מערכת SISO נתונה על ידי משואה דיפרנציאלית הקושרת בין הכניסה u לבין היציאה y :

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^m b_i u^{(i)}$$

ניתן לכתוב ישירות ממשואה זו את פונקציית התמסורת של המערכת. אם נתמיר המשוואה באמצעות התמרת לפלס (עם תנאי התחלה 0) נקבל:

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i s^i \right) Y(s) = \left(\sum_{i=0}^m b_i s^i \right) U(s)$$

ולכן

$$G(s) = Y(s) / U(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

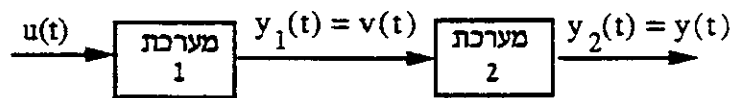
7.5.2 מערכות בדידות

מהשוואת משוואות (7.26) ו-(6.48) מקבלים, בדומה לסעיף הקודם,

$$(7.29) \quad G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

7.6 חבור טורי של שתי מערכות (ללא השפעה הזדית)

נתונות שתי מערכות (1 ו-2) המחוברות בטור כך שיציאת מערכת 1 משמשת ככניסה למערכת 2 (ראה ציור 7.4). המערכות נתונות באמצעות ממושיהן או באמצעות מטריצות התמסורת שלהן. המטרה היא להחליף את החבור הטורי במערכת אחת, אקויוולנטית, שכניסתה היא $u(t)$ ויציאתה $y(t)$ (ציור 7.5). בסעיף 7.6.1 נדון בממוש המערכת השקולה, ובסעיף 7.6.2 נדון במטריצת התמסורת שלה. בסעיף 7.6.3 נוכיח את הזהות בין שתי התוצאות.



ציור 7.4



ציור 7.5

7.6.1 ממש אקויוולנטי

נתונות שתי המערכות באמצעות ממושיהן :

$$(7.30) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \text{b)} \quad & y_1 = C_1 x_1 + D_1 u \end{aligned}$$

$$(7.31) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 v \\ \text{b)} \quad & y_2 = C_2 x_2 + D_2 v \end{aligned}$$

כאשר:

$$x_i \in \mathbb{R}^{n_i}; \quad A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}; \quad B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}; \quad C_i \in \mathbb{R}^{r_i \times n_i}; \quad D_i \in \mathbb{R}^{r_i \times m_i};$$

$$i = 1, 2$$

$$u \in \mathbb{R}^{m_1}; \quad v \in \mathbb{R}^{r_1 = m_2}; \quad y = y_2 \in \mathbb{R}^{r_2}; \quad y_1 \in \mathbb{R}^{r_1}$$

ו- $r_1 = m_2$ (ולכן $v \equiv y_1$).

נציב $v = y_1$ (מ- (7.30) ב- (7.31) ונקבל :

$$(7.30a) \quad \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u$$

$$(7.31a) \quad \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 (C_1 x_1 + D_1 u) = B_2 C_1 x_1 + A_2 x_2 + B_2 D_1 u$$

$$(7.31b) \quad y = y_2 = C_2 x_2 + D_2 (C_1 x_1 + D_1 u) = D_2 C_1 x_1 + C_2 x_2 + D_2 D_1 u$$

נבדיר וקטור מצב מורחב $x \in \mathbb{R}^{(n_1 + n_2)}$ על ידי :

$$(7.32) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ובאמצעותו נכתוב את (7.30a), (7.31a) ו-(7.31b):

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} n_1 & n_2 \\ \begin{pmatrix} A_1 & | & 0 \\ \hline B_2 C_1 & | & A_2 \end{pmatrix} \end{matrix} X + \begin{matrix} m_1 \\ \begin{pmatrix} B_1 \\ \hline B_2 D_1 \end{pmatrix} \end{matrix} u \quad (7.33)$$

$$y = \begin{matrix} n_1 & n_2 & m_1 \\ (D_2 C_1 & | & C_2) \end{matrix} x + (D_2 D_1) u$$

אם המערכת השקולה שבציור 7.5 תנואר על ידי הממוש :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

(7.34)

$$y = Cx + Du$$

הרי מהשוואת (7.34) עם (7.33) נקבל :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & | & 0 \\ \hline B_2 C_1 & | & A_2 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \hline B_2 D_1 \end{pmatrix} ; \quad C = (D_2 C_1 \quad | \quad C_2) ; \quad D = D_2 D_1 \quad (7.35)$$

הקשרים הנ"ל מאפשרים לכתוב את ממוש המערכת השקולה (7.34), ישירות מתוך ממוש שתי המערכות. הערה: החיבור הטורי המיוצג בציור 7.4 נקרא לעיתים חבר טורי ללא השפעה הדדית (ללא אינטראקציה), דהיינו : אין דינמיקת מערכת 2 משפיעה על דינמיקת מערכת 1. דבר זה בא לידי בטוי בכך שאין וקטור המצב x_2 (כולו או חלקו) מופיע במשוואות המצב של מערכת 1 (ראה גם סעיפים 7.8 ו-7.9).

7.6.2 מטריצת התמסורת שקולה

אם מטריצות התמסורת של מערכות 1 ו-2 נתונות על ידי $G_1(s)$ ו- $G_2(s)$ בהתאמה ו-

$$V(s) = G_1(s) U(s) \quad (7.36)$$

$$Y(s) = G_2(s) V(s) \quad (7.37)$$

הרי על ידי הצבת (7.36) ב-(7.37) נקבל :

$$Y(s) = G_2(s) G_1(s) U(s) \quad (7.38)$$

ומכאן ש- $G(s)$, מטריצת התמסורת של המערכת השקולה נתונה על ידי :

$$G(s) = G_2(s) G_1(s) \quad (7.39)$$

מסקנה - מטריצת התמסורת של שתי מערכות המחוברות בטור שווה למכפלת מטריצות התמסורת שלהן

(בסדר הכתוב).

7.6.3 הזזות בין שני התיאורים

הקשרים בין ממושי המערכות 1 ו-2 לבין מטריצות התמסורת המתאימות נותנים על ידי :

$$(7.40) \quad G_i(s) = C_i(sI - A_i)^{-1}B_i + D_i \quad i = 1, 2$$

$$(7.41) \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

נראה כי תוצאות החבור באמצעות הממושים, (5-7.34), זהה לתוצאת החבור באמצעות מטריצות התמסורת, (7.39).

נציב את (7.35) ל-(7.41) ונקבל :

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = \\ &= (D_2C_1 \mid C_2) \left(\begin{array}{c|c} sI_{n_1} - A_1 & 0 \\ \hline -B_2C_1 & sI_{n_2} - A_2 \end{array} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ \hline B_2D_1 \end{pmatrix} + D_2D_1 = \\ &= (D_2C_1 \mid C_2) \left(\begin{array}{c|c} (sI_{n_1} - A_1)^{-1} & 0 \\ \hline (sI_{n_2} - A_2)^{-1}B_2C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1} & (sI_{n_2} - A_2)^{-1} \end{array} \right) \cdot \\ &\cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ \hline B_2D_1 \end{pmatrix} + D_2D_1 = [C_2(sI_{n_2} - A_2)^{-1}B_2 + D_2][C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 + D_1] = \\ &= G_2(s)G_1(s) \end{aligned}$$

(7.42)

הערה: למציאת $(sI - A)^{-1}$ השתמשנו בקשר ידוע באלגברה ליניארית עבור מטריצות מחולקות: אם A^{-1}

ו- B^{-1} קיימים אזי :

$$(7.44) \quad \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{array} \right)$$

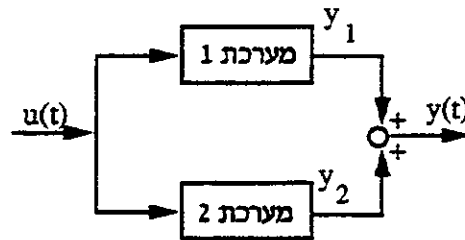
7.7 חבור מערכות במקביל

נתונות שתי מערכות המחוברות כבציר 7.6. לשתי המערכות אותה כניסה u ויציאותיהן מסתכמות ונותנות

את היציאה y . על מנת שהחיבור כמתואר בצירוף יהיה אפשרי על $m_1 = m_2$ ו- $r_1 = r_2$.

המערכות נתונות באמצעות המימושים (7.30) ו- (7.31) ובאמצעות מטריצות התמסורת $G_1(s)$ ו- $G_2(s)$.

המטרה היא למצוא ממוש ומטריצת תמסורת של המערכת השקולה (צירוף 7.7).



צירוף 7.6



צירוף 7.7

7.7.1 ממוש שקול

מערכת 1 ומערכת 2 מיוצגות על ידי ממושיהן (7.30) ו- (7.31) בהתאמה, כאשר $\Delta u \equiv v$, נגדי וקטור

מצב מורחב כב- (7.32). צרוף (7.30a) עם (7.31a) יתן לכן:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} n_1 & n_2 \\ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \end{matrix} x + \begin{matrix} m \\ \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \end{matrix} u \quad (7.44)$$

כאשר סימנו $m = m_1 = m_2$.

נציב עתה את (7.30b) ואת (7.31b) ב- $y = y_1 + y_2$:

$$y = y_1 + y_2 = C_1 x_1 + C_2 x_2 + D_1 u + D_2 u = (C_1 \ C_2) x + (D_1 + D_2) u \quad (7.45)$$

מ- (7.44) ו- (7.45) נקבל כי מטריצות הממוש של המערכת השקולה נתונות על ידי:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}; \quad C = (C_1 \ C_2); \quad D = D_1 + D_2 \quad (7.46)$$

7.7.2 מטריצת תמסורת שקולה

היציאות המותמרות בשתי המערכות הן :

$$Y_1(s) = G_1(s) \cdot U(s)$$

$$Y_2(s) = G_2(s) \cdot U(s)$$

נציב המיל ל-

$$(7.47) \quad Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = (G_1(s) + G_2(s))U(s) = G(s) \cdot U(s)$$

ומכאן :

$$(7.48) \quad G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

7.7.3 אם מציבים את (7.46) ב-(7.41) מקבלים :

$$G(s) = (C_1 \quad C_2) \left(\begin{array}{c|c} (sI_{n_1} - A_1)^{-1} & 0 \\ \hline 0 & (sI_{n_2} - A_2)^{-1} \end{array} \right) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} + D_1 + D_2$$

או

$$G(s) = (C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + D_1) + (C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 + D_2) = G_1(s) + G_2(s)$$

השוויון האחרון מוכיח כי התוצאות בסעיפים 7.7.1 ו-7.7.2 אקוילנטיות.

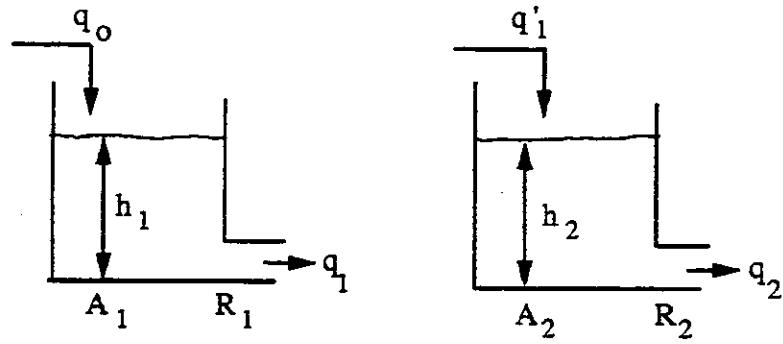
7.8 דוגמאות לחבור טורי עם ובלי השפעה הדדית

7.8.1 דוגמה 1

נתונים שני מיכלים כמתואר בציור 7.8.

שטחי החתך, A_1 , A_2 קבועים וכן ההתנגדויות R_1 ו- R_2 קבועות.

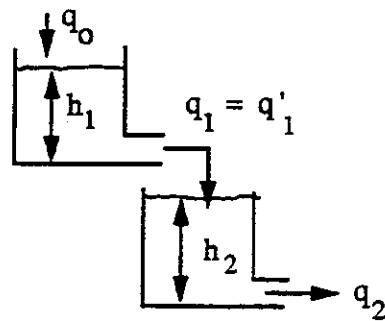
$$א. מצא את $G_1(s) = \frac{q_1(s)}{q_0(s)}$ ואת $G_2(s) = \frac{q_2(s)}{q_1'(s)}$.$$



ציור 7.8

ב. המיכלים מחוברים (ללא אינטראקציה) כמתואר בציור 7.9

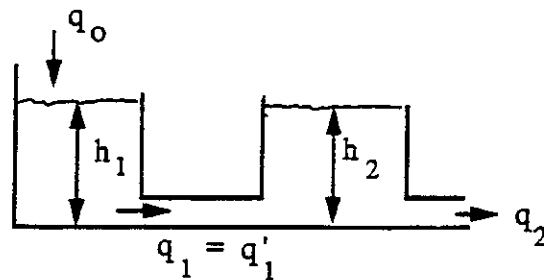
מצא $G(s) = \frac{q_2(s)}{q_o(s)}$ והראה כי במקרה זה $G(s) = G_1(s) G_2(s)$.



ציור 7.9

ג. המיכלים מחוברים עם אינטראקציה כמתואר בציור 7.10.

מצא את $G(s) = \frac{q_2(s)}{q_o(s)}$ והראה כי במקרה זה $G(s) \neq G_1(s) G_2(s)$.



ציור 7.10

פתרון:

א. משוואות המצב עבור המיכל הראשון הן :

$$\dot{h}_1 = -\frac{1}{A_1 R_1} \cdot h_1 + \frac{1}{A_1} q_o$$

$$q_1 = \frac{1}{R_1} \cdot h_1$$

מתוך כך פונקציית התמסורת היא :

$$G_1(s) = \frac{q_1(s)}{q_o(s)} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{A_1 R_1}} \cdot \frac{1}{A_1} = \frac{1}{A_1 R_1 s + 1} = \frac{1}{\tau_1 s + 1} \quad (\tau_1 \triangleq A_1 R_1)$$

בצורה דומה :

$$G_2(s) = \frac{q_2(s)}{q_1(s)} = \frac{1}{A_2 R_2 s + 1} = \frac{1}{\tau_2 s + 1} \quad (\tau_2 \triangleq A_2 R_2)$$

ב. עבור המערכת שבציור 7.9 נגדיר :

$$y \triangleq q_2, \quad u \triangleq q_o, \quad x \triangleq \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

ואז משוואות המצב הן :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_1} & 0 \\ \frac{1}{A_2 R_1} & -\frac{1}{\tau_2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} x$$

ופונקציית התמסורת היא :

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s + \frac{1}{\tau_2} & 0 \\ \frac{1}{A_2 R_1} & s + \frac{1}{\tau_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \end{aligned}$$

ורואים כי במקרה זה :

$$G(s) = G_2(s) G_1(s)$$

וניתן להשתמש בתוצאות סעיף 7.6.

ג. x , u ו- y הינם כפי שהוגדרו בסעיף ב'. משוואות המצב עבור המערכת שבסעיף ג' הן :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{A_1 R_1} & \frac{1}{A_1 R_1} \\ \frac{1}{A_2 R_1} & -(\frac{1}{A_2 R_1} + \frac{1}{A_2 R_2}) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = [0 \quad \frac{1}{R_2}] x$$

מכאן ,

$$G(s) = [0 \quad \frac{1}{R_2}] \begin{pmatrix} s + \frac{1}{A_2 R_2} + \frac{1}{\tau_2} & \frac{1}{\tau_1} \\ \frac{1}{A_2 R_1} & s + \frac{1}{\tau_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

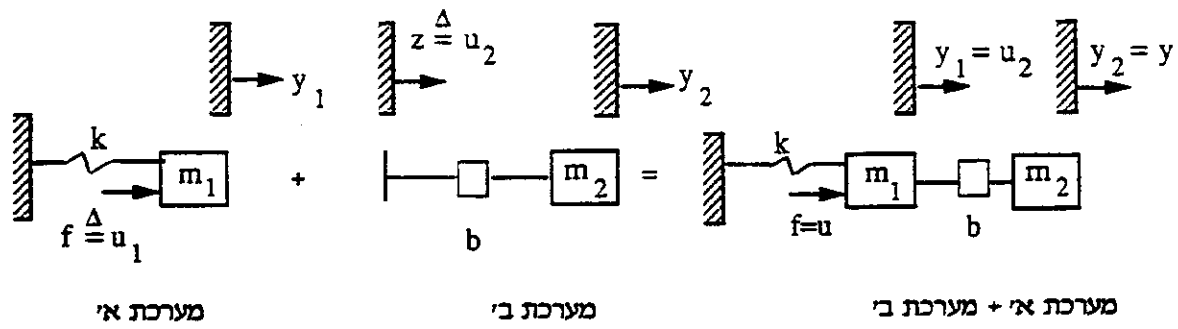
$$\frac{1}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_2 + A_1 R_2 + \tau_1)s + 1}$$

$$= \frac{1}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_2 + A_1 R_2 + \tau_1)s + 1}$$

כדי להראות שביטוי זה שונה מהמכפלה $G_2(s) G_1(s)$ ניתן לרשום את $G(s)$ כך :

$$G(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + A_1 R_2 s} \neq G_2(s) G_1(s)$$

במקרה זה המיכלים מחוברים טורית אך עם השפעה הדדית ולא ניתן לקבל את המערכת השקולה של חבור שתי המערכות באמצעות הפתוח בסעיף 7.6, ודיאגרמת הבלוקים שבציור 7.4 אינה מיצגת את חבורם של שני המיכלים.



ציור 7.11

נתונות שתי המערכות המכניות א' ו-ב' (ראה ציור 7.11). במערכת א' הכניסה היא הכח f (u_1) והיציאה היא y_1 - המיקום הרגעי של המסה m_1 . במערכת ב' הכניסה היא z (u_2), המיקום הרגעי של המרסן, ויציאתה היא y_2 - המיקום הרגעי של m_2 .

א. מצא את $G_1(s) = \frac{y_1(s)}{f(s)}$ ו- $G_2(s) = \frac{y_2(s)}{z(s)}$.

ב. (ראה ציור 7.11) מחברים את שתי המערכות כך שיציאת מערכת א' (y_1) היא הכניסה למערכת ב'.

א. מצא את $G(s) = \frac{y_2(s)}{f(s)}$ (זכור: $z=y_1$). האם $G(s) = G_2(s) \cdot G_1(s)$?

פתרון:

א. מציאת G_1 :
מכאן $m_1 \ddot{y}_1 + ky_1 = f$

$$G_1(s) = \frac{y_1(s)}{f(s)} = \frac{1}{m_1 s^2 + k}$$

מציאת G_2 :
מכאן $m_2 \ddot{y}_2 + b(\dot{y}_2 - \dot{z}) = 0$

$$G_2(s) = \frac{y_2(s)}{z(s)} = \frac{bs}{m_2 s^2 + bs} = \frac{b}{m_2 s + b}$$

ב. דינמיקת המערכת המשולבת נתונה על ידי :

$$(7.50) \quad m_1 \ddot{y}_1 + k y_1 + b(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = f$$

$$(7.51) \quad m_2 \ddot{y}_2 + b(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = 0$$

היות ובדינמיקת מערכת א' (7.50) מופיע y_2 (ו/או נגזרותיו) פרוש הדבר שהתבור הוא עם השפעה הדדית ולכן

$G \neq G_2 \cdot G_1$. נראה זאת. התמרת לפלס של (7.50) ו-(7.51) :

$$(m_1 s^2 + b s + k) Y_1(s) - b s Y_2(s) = f(s)$$

$$(m_2 s^2 + b s) Y_2(s) = b s Y_1(s)$$

נחלץ $Y_1(s)$ מהמשוואה השנייה ונציב במשוואה הראשונה ונקבל :

$$G(s) = \frac{Y_2(s)}{f(s)} = \frac{b}{(m_1 s^2 + k)(m_2 s + b) + b m_2 s^2} \neq G_2(s) G_1(s) =$$

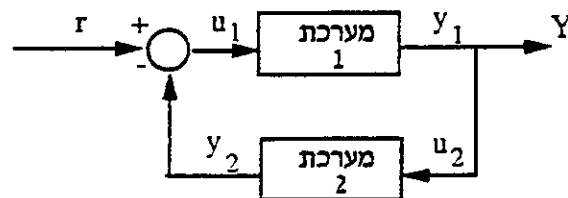
$$= \frac{b}{(m_1 s^2 + k)(m_2 s + b)}$$

7.9 חבור משוואי

נתונות שתי מערכות 1 ו-2 המחוברות כך שיציאת המערכת 1, y_1 , מהווה כניסה למערכת 2 (דהיינו $u_2 = y_1$)

ויציאת מערכת 2 y_2 יחד עם הכניסה החיצונית r יוצרים הכניסה u_1 למערכת 1 לפי (ראה ציור 7.12) :

$$u_1 = r - y_2$$



ציור 7.12

שתי המערכות 1 ו-2 נתונות באמצעות מטריצות התמסורת $G_1(s)$ ו- $G_2(s)$ בהתאמה. על מנת שניתן יהיה

לחבר את שתי המערכות כמתואר בציור 7.12 ברור כי אם ממדי G_1 הם $m \times p$ הרי ממדי G_2 הם $m \times m$.

כלומר $r, u_1, y_2 \in R^m$ ו- $y_1, u_2 \in R^p$.

נסתפק כאן במציאת מטריצת התמסורת השקולה בין r ל- y .

מהציר ברור כי

$$(7.52) \quad y = y_1 = G_1 u_1 = G_1(r - y_2)$$

$$(7.53) \quad y_2 = G_2 u_2 = G_2 y \quad -1$$

ולכן אם נציב y_2 ב-(7.52) נקבל :

$$(7.54) \quad y = \underbrace{(I_p + G_1 G_2)^{-1} G_1}_{\text{שקול } G} r = G r$$

הערות :

1. ניתן להראות כי :

$$(7.55) \quad G = (I_p + G_1 G_2)^{-1} G_1 = G_1 (I_m + G_2 G_1)^{-1}$$

2. במערכות SISO (בהן $m = p = 1$) ניתן כמובן לכתוב את G שקול בצורה :

$$(7.56) \quad G = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2}$$

7.10 פונקציות תמסורת ותגובות של מערכות SISO מסדר ראשון ושני

בפרק 1 הצגנו מודלים מתמטיים של מערכות פיזיקליות פשוטות. ראינו כי מספר נכבד של מערכות פיזיקליות פשוטות הינן מערכות מסדר ראשון ושני (ראה סעיף 1.4.2.4). נקבל כאן את פונקציות התמסורת שלהן ואת תגובותיהן האפניות.

7.10.1 מערכות מסדר ראשון

אם $y(t)$ ו- $u(t)$ הן היציאה והכניסה בהתאמה של המערכת הרי המשוואה הדפרנציאלית של מערכת טיפוסית מסדר 1 (הנקראת גם פיגור מסדר 1) נתונה על ידי (1.43).

$$(1.43) \quad \frac{a_1}{a_0} \dot{y}(t) + y(t) = \frac{b_0}{a_0} u(t)$$

מכאן שפונקציית התמסורת של מערכת כזו נתונה על ידי

$$(7.57) \quad G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0 / a_0}{\frac{a_1}{a_0} s + 1}$$

אם נסמן $k \triangleq \frac{b_0}{a_0}$, $\tau \triangleq \frac{a_1}{a_0}$, תכתב (7.57) בצורה :

$$(7.58) \quad G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$

משוואה (7.58) היא פונקציית התמסורת של חמש המערכות הפיזיקליות מסדר I שהצגנו בפרק 1.4.2.1. τ נקרא בשם קבוע הזמן של המערכת ו- k נקרא בשם ההגבר הסטטי של המערכת. בכל המערכות הפיזיקליות שתארנו בפרק 1 $\tau > 0$. קימות מערכות בהן $\tau < 0$ (מערכות לא יציבות - ראה פרק 8). בהן לא נטפל כאן.

אם הכניסה למערכת היא שינוי מדרגה בגודל a $u(t) = a \cdot 1(t)$ נקבל שתגובתה לכניסה זו נתונה על ידי :

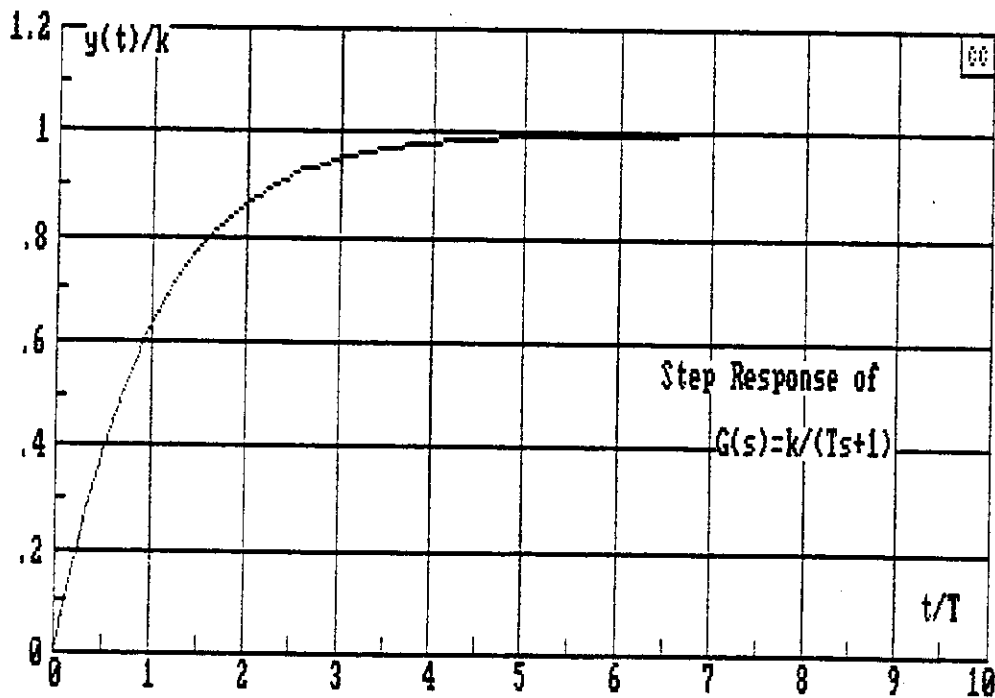
$$y(s) = \frac{a}{s} \cdot \frac{k}{\tau s + 1}$$

ולכן

$$(7.59) \quad y(t) = ak(1 - e^{-t/\tau})$$

מ-(7.59) ניתן להסיק המסקנות הבאות : א. $y(t)$, תגובת המערכת לשינוי מדרגה הינה מונוטונית עולה. כלומר $y(t+\alpha) > y(t)$ עבור $\alpha > 0$. ב. $y(0) = 0$ ו- $y(\infty) = ak$. ג. ככל ש- τ (קבוע הזמן) גדול יותר כן התגובה $y(t)$ איטית יותר. ד. ככל ש- k גדול יותר, $y(\infty)$ גדול יותר עבור אותו a . ההגבר הסטטי k מוגדר כיחס $y(\infty)/a$.

התגובה למדרגה, $y(t)$, שב-(7.59) של מערכת מסדר I נתונה בציור 7.13.



ציור 7.13.

7.10.2 מערכות מסדר שני

בפרק 1.4.2 הוצגו מערכות פיזיקליות פשוטות מסדר שני. משפחה נכבדת של מערכות אלו מיוצגת על ידי המשוואה הדפרנציאלית (1.44) עם $b_2 = b_1 = 0$:

$$(7.60) \quad a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u$$

פונקציית התמסורת המתאימה למערכת (7.60) תהיה לכן:

$$(7.61) \quad G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0 / a_2}{s^2 + \frac{a_1}{a_2} s + \frac{a_0}{a_2}}$$

את פונקציית התמסורת (7.61) נוהגים להציג בצורה:

$$(7.62) \quad G(s) = \frac{k \omega_n^2}{s^2 + 2 \omega_n \xi s + \omega_n^2}$$

כאשר הקשרים בין המקדמים שב- (7.61) ובין אלו שב- (7.62) הם:

$$k = \frac{b_0}{a_0}, \quad \xi = \frac{1}{2} \frac{a_1}{\sqrt{a_0 a_2}}, \quad \omega_n^2 = \frac{a_0}{a_2}$$

ω_n נקראת התדירות הטבעית של המערכת, ξ נקרא יחס הרוסון ו- k ההגבר הסטטי. משמעותם הפיזיקלית של מונחים אלו תובהר בהמשך.

תגובתה המותמרת של המערכת ב- (7.62) לכניסת מדרגה ($u(t) = a_1(t)$) נתונה על ידי:

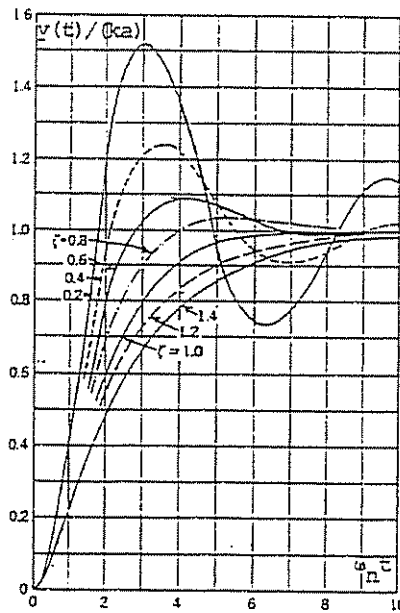
$$y(s) = \frac{a}{s} \cdot \frac{k \omega_n^2}{s^2 + 2 \omega_n \xi s + \omega_n^2}$$

ו- $y(t)$ נתון

$$\frac{y(t)}{ka} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin[\sqrt{1-\xi^2} \omega_n t + \tan^{-1}(\sqrt{1-\xi^2} / \xi)] & \xi < 1 \\ 1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t} & \xi = 1 \\ 1 - e^{-\xi \omega_n t} \left(\cosh \sqrt{\xi^2 - 1} \omega_n t + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \sinh \sqrt{\xi^2 - 1} \omega_n t \right) & \xi > 1 \end{cases}$$

(7.63)

תגובות אלו עבור ערכי ξ שונים נתונות בצירור 7.14.



ציור 7.14

אנו רואים כי אופי התגובה תלוי ביחס הרסון ξ :

כאשר $\xi < 1$ התגובה מתנדנדת אך מתרסנת עם הזמן והמערכת נקראת מערכת תת-מרוסנת.

כאשר $\xi > 1$ התגובה אינה מתנדנדת והמערכת נקראת על-מרוסנת.

כאשר $\xi = 1$ אין נדנד והמערכת נקראת מערכת עם רסון קריטי.

כדאי לשים לב שכאשר $\xi = 0$ או $a_1 = 0$ ב-(7.60) (המערכת אינה מרוסנת) התגובה תתנדנד בתדירות ω_n

ובאמפליטודה קבועה.

בתורת המערכות משתמשים במספר מושגים להגדיר תגובות מערכות תת-מרוסנות לכניסת מדרגה :

א. תגובת יתר - (overshoot) לכניסת מדרגה

$$(7.64) \quad \text{תגובת יתר} = \frac{y(t)_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} = e^{-\pi\xi / \sqrt{1-\xi^2}} \equiv 1 - \frac{\xi}{0.6}$$

ב. זמן עליה (rise time) - הזמן הדרוש לתגובה לעבור מ-10% עד 90% מערכה הסופי. זמן זה נתון בקרוב על

די :

$$(7.65) \quad \equiv 2.5 / \omega_n$$

ג. זמן רגיעה (settling time) - הזמן הלוך לתגובה להכנס ל-1% מערכה הסופי אחרי כניסת מדרגה.

זמן זה נתון בקרוב על די :

$$(7.66) \quad \equiv 4.6 / \xi\omega_n$$

ד. מחזור תנודות מרוסנות - T_m

$$(7.67) \quad T_m = 2\pi / (\omega_n \sqrt{1 - \xi^2})$$

ולכן תדירות התנודות המרוסנות ω_m נתונה על ידי:

$$(7.68) \quad \omega_m = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

כאשר $\xi = 0$ נקבל $\omega_m = \omega_n$ כלומר מערכת ללא רסון תתנודד בתדירותה הטבעית.

פרק 8 : יציבות מערכות

בפרק זה נעסוק באחד ממושגי המפתח במערכות דינמיות - מושג היציבות. נטפל במערכות סטצינריות בלבד.

8.1 מערכות רציפות

8.1.1 קוטב, אפס ומשוואה אופינית - מערכת SISO

יהיה הקשר כניסה - יציאה במערכת SISO נתון באמצעות פונקציית תמסורת רציונלית $G(s)$, שהיא מנה של שני פולינומים :

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad (8.1)$$

מבלי לאבד מהכלליות נניח $a_n = 1$ תכתוב את (8.1) בצורה מפורקת :

$$G(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (8.2)$$

הגדרות : פולינום המכנה של פונקציית התמסורת נקרא בשם הפולינום האופיני של המערכת (אשר מתוארת על ידי $G(s)$) ויסומן על ידי $\Delta(s)$:

$$\Delta(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i = \prod_{i=1}^n (s - p_i) \quad (8.3)$$

המשוואה : $\Delta(s) = 0$ נקראת בשם - המשוואה האופינית של המערכת (8.1).

אפסים (zeroes) - שרשי פולינום המונה שבפונקציית התמסורת, $s = +z_i$, נקראים האפסים של המערכת.

קטבים (poles) - שרשי המשוואה האופינית, $s = +p_i$, נקראים הקטבים של המערכת.

דוגמא 1 : נתונה פונקציית התמסורת הבאה :

$$G(s) = \frac{2s^2 - 2s - 4}{s^3 + 5s^2 + 8s + 6} = \frac{2(s+1)(s-2)}{(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$$

קטבי המערכת הם :

$$p_1 = -3; p_2 = -1-j; p_3 = -1+j$$

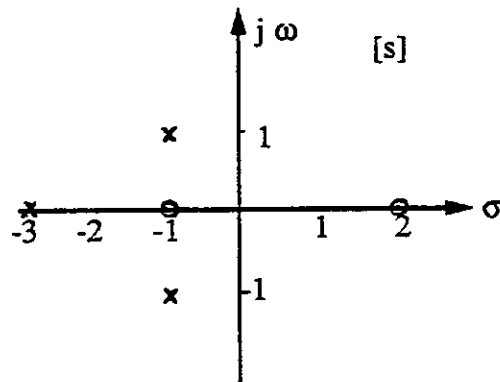
אפסי המערכת הם :

$$z_1 = -1; z_2 = 2$$

8.1.2 המשור הקומפלקסי [S]

s, משתנה לפלס, הינו משתנה קומפלקסי.

נסמן :



$$\begin{aligned} \text{Re}(s) &= \sigma \\ \text{Im}(s) &= \omega \end{aligned} \quad (8.4)$$

ציור 8.1

נגדיר (ראה ציור 8.1) :

RHP - (right half plane) - המחצית הימנית של המשור הקומפלקסי [s],

LHP - (left half plane) - המחצית השמאלית של המשור הקומפלקסי [s].

RHP - ORHP - הפתוח (שאינו כולל את הציר $j\omega$) : $\text{Re}(s) > 0$

RHP - CRHP - הסגור (כולל את הציר $j\omega$) : $\text{Re}(s) \geq 0$

ובהתאמה :

LHP - OLHP - הפתוח : $\text{Re}(s) < 0$

LHP - CLHP - הסגור : $\text{Re}(s) \leq 0$

את הקטבים והאפסים של מערכת ניתן למקם סכמטית במשור [s]. נסמן קטבים על ידי x ואפסים על ידי o.

הקטבים והאפסים, למשל, של $G(s)$ שבדוגמא 1 מסומנים בציור 8.1.

הערה : כאשר מערכת SISO נתונה באמצעות ממש במרחב המצב :

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx + du \quad (8.5)$$

תהיה פונקצית התמסורת המתאימה :

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b + d = \frac{c \text{Adj}(sI - A)b}{\det(sI - A)} + d = \frac{\psi(s)}{\Delta(s)} \quad (8.6)$$

לכן המשוואה האופינית תהיה :

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = 0 \quad (8.7)$$

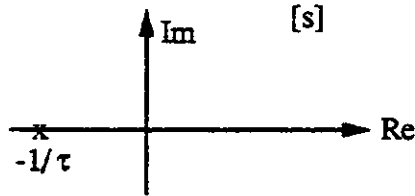
קטבי המערכת יהיו לכן העייע של המטריצה A

ואפסי המערכת יהיו השרשים של $\psi(s) = 0$.

תערה: בסעיף 7.10 הצגנו תגובת אפניזית של מערכות מסדר ראשון ושני.

הקוטב של מערכת מסדר ראשון (7.53), נתון על ידי $s = -1/\tau$. קוטב זה נמצא תמיד על הציר הממשי השלילי

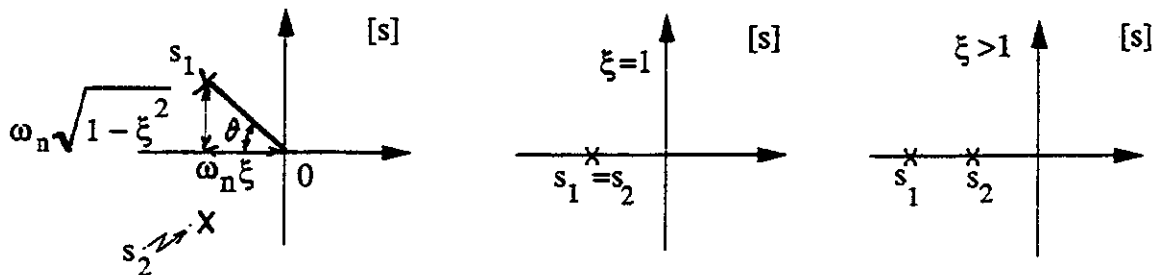
במישור s (ראה ציור 8.2).



ציור 8.2

במערכות מסדר שני (7.57) תלוי מקום שני הקטבים במנת הרוסון ξ :

$$s_{1,2} = \begin{cases} -\omega_n[\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2}] & \xi < 1 \\ -\omega_n & \xi = 1 \\ -\omega_n[\xi \pm \sqrt{\xi^2-1}] & \xi > 1 \end{cases}$$



ציור 8.3

עבור $\xi < 1$ (מערכת תת-מרוסנת) מתקבלים שני קטבים קומפלקסיים צמודים כאשר $\text{Re}(s_i) = -\omega_n \xi$ ו-

$$\text{Im}(s_i) = \pm \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \quad (\text{ראה ציור 8.3}).$$

מכאן אנו למדים ש:

$$|OS_1| = |OS_2| = \omega_n \quad \text{א.}$$

$$\cos \theta = \xi \quad (\text{או } \xi = \cos^{-1} \theta) \quad \text{ב.}$$

דהיינו ככל ש- ξ קטן יותר הזווית θ גדולה יותר ולהפך, ככל שהמערכת מרוסנת יותר כך הזווית θ קטנה יותר.

8.1.3 מערכת MIMO

להגדרת קטבים ואפסים במערכות MIMO נדרש רקע נוסף בתורת מטריצות פולינומאליות, שהוא מעבר להיקף הקורס הנוכחי. נסתפק לכן בהגדרות חלקיות.

באם מערכת MIMO נתונה על ידי מטריצת התמסורת, $G(s)$ (מסדר $m \times r$) נגיד :

משואה אפנית $\Delta(s)$: המכנה המשותף הקטן ביותר של כל מכני המינורים של $G(s)$.

קטבים : שרשי המשואה האופנית $(\Delta(s) = 0)$

אפסים : שרשי פולינום האפסים אשר הוא המחלק המשותף הגדול ביותר של מוני כל המינורים מסדר הדרגה

הנורמלית של $G(s)$ (כאשר כל מכני המינורים הם $\Delta(s)$)

הערה: כאשר $G(s)$ מטריצה רבועית (מסי' כניסות = מסי' יציאות : $m = r$) יהיו האפסים של $G(s)$ שרשי

הפולינום $\psi(s)$ כאשר :

$$(8.8) \quad \det G(s) = \frac{\psi(s)}{\Delta(s)}$$

שים לב שהמכנה של $\det G(s)$ ב-(8.8) חייב להיות $\Delta(s)$.

דוגמא 2 : מטריצת תמסורת של מערכת בעלת שתי כניסות ושני יציאות נתונה על ידי :

$$(8.9) \quad G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

המכנה המשותף הקטן ביותר של כל מכני המינורים מסדר 1 ב- $G(s)$ יהיה :

$$(8.10) \quad (s+1)(s+2)$$

המינור מסדר 2 של $G(s)$ יהיה $\det G(s)$ הנתון על ידי :

$$(8.11) \quad \det G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{2}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{\psi(s)}{\alpha(s)}$$

המכנה המשותף הקטן ביותר בין (8.10) ו- $\alpha(s)$ שב-(8.11) הוא $\alpha(s)$ לכן תהיה המשי האופנית :

$$\Delta(s) = (s+1)^2(s+2) = 0$$

למערכת שלושה קטבים :

$$p_1 = p_2 = -1 ; \quad p_3 = -2$$

$$z_1 = -3$$

ואפס אחד (השורש של $\psi(s) = 0$) :

דוגמא 3 : נתון $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} -s(s+1) & -(s+2)^2 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}$$

מצא קטביה ואפסיה של $G(s)$.

קטבים :

מכנה משותף של מינורים מסדר ראשון : $(s+2)(s+3)$

מכנה מינור מסדר שניים : $(s+3)^2$ לפי :

$$\det G(s) = \frac{16(s+2)^2}{(s+2)^2(s+3)^2} = \frac{16}{(s+3)^2}$$

מכאן :

$$\Delta(s) = (s+2)(s+3)^2$$

$$s_1 = s_2 = -3 ; s_3 = -2$$

למערכת שלושה קטבים :

אפסים :

הדרגה הנורמלית של $G(s)$ היא 2. לכן קיים מינור אחד מסדר שניים והוא $\det G(s)$. מכאן :

$$\det G(s) = \frac{\psi(s)}{\Delta(s)} = \frac{16}{(s+3)^2} \cdot \frac{s+2}{s+2}$$

למערכת אפס אחד ב- $s = -2$.

שים לב כי במערכות MIMO יתכן שלמערכת יהיו קוטב ואפס באותו מקום בלי שיעצמצמו.

8.14 יציבות אסימפטוטית חיצונית

הגדרה : מערכת ליניארית סטציונרית הנתונה באמצעות פונקציה (או מטריצת) תמסורת כב- (8.1) תקרא :

יציבה אסימפטוטית חיצונית אם ורק אם תגובתה לכניסת הלט דועכת לאפס עם הזמן באופן אקספוננציאלי.

בפרק 6 ראינו כי תגובת ההלט של מערכת נתונה על ידי $L^{-1}[G(s)]$ וכי היא כוללת סכום משוקלל של ביטויים מהצורה :

$$t^{k-1} e^{p_i t} \quad (8.12)$$

כאשר p_i הוא קוטב ו- k מספר חזרותיו, מכאן :

משפט : מערכת ליניארית סטציונרית יציבה אסימפטוטית חיצונית אם ורק אם :

$$(8.13) \quad \operatorname{Re}(p_i) < 0 \quad i = 1, \dots, n$$

או אקוילנטית : אם ורק אם כל קטבי המערכת, p_i , נמצאים ב-OLHP של $[s]$.

דוגמא 4 : למערכת

$$G(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$p_1 = -1, \quad p_2 = -2 \quad \text{שני קטבים :}$$

הנמצאים ב-OLHP - המערכת יציבה אסימפטוטית חיצונית .

הערות:

1. ניתן להראות שמערכת יציבה אסימפטוטית חיצונית מקימת התכונות הבאות :
א. אם הכניסה חסומה, $|u(t)| < M_u < \infty$, אזי היציאה חסומה, $|y(t)| < M_y < \infty$. תכונה זו קרויה

יציבות BIBO (Bounded input bounded output).

ב. באם לכניסה אנרגיה סופית :

$$\int_0^{\infty} (u(t))^2 dt < K_u < \infty$$

אזי גם ליציאה אנרגיה סופית :

$$\int_0^{\infty} (y(t))^2 dt < K_y < \infty$$

2. יש לשים לב לעובדה שיציבות חיצונית נקבעת אך ורק לפי מקום הקטבים במשור $[s]$. באם אחד (או יותר) הקטבים נמצא ב-ORHP המערכת אינה יציבה אסימפטוטית חיצונית.

8.15 יציבות אסימפטוטית פנימית

יציבות אסימפטוטית פנימית מתייחסת לממוש המערכת.

הגדרה : המערכת אשר ממושה הוא :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$(8.14) \quad y = Cx + Du$$

תהיה יציבה אסימפטוטית פנימית אם ורק אם הפתרון של המערכת החפשית :

$$(8.15) \quad \dot{x} = Ax; \quad x(t_0) = x_0; \quad t \geq t_0$$

דועך ל-0 עם הזמן עבור כל x_0 .

פתרון (8.15), המבוטא באמצעות המודים (ראה פרק 4), כלל סכום משוקלל של ביטויים מהצורה $t^{k-1} e^{\lambda_i t}$ כאשר λ_i הוא ערך עצמי של A ו- k מספר חזרותיו. כדי לקיים את ההגדרה הנ"ל נדרש לכן :

משפט: המערכת (8.14) תהיה יציבה אסימפטוטית פנימית אם ורק אם :

$$(8.16) \quad \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

או אקוילנטית : אם ורק אם כל הערכים העצמיים של A נמצאים ב-OLHP של $[s]$.

דוגמא 5 : נתון הממוש :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0; \quad \lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -1$$

היות ו- $\lambda_i(A) < 0$ ($i = 1, 2$) המערכת יציבה אסימפטוטית פנימית.

הערה : בפרק 3 ראינו כי מימושים מינימליים שונים של אותה מערכת קשורים באמצעות טרנספורמציות סימילריות. לכל המימושים לכן אותם ערכים עצמיים. מכאן ברור שהיציבות הפנימית אינה תלויה בממוש הספציפי.

8.16 הקשר בין יציבות פנימית וחיצונית

מערכת עשויה להיות יציבה חיצונית ולא יציבה פנימית. מקרה כזה יתרחש אם, למשל, מוד לא יציב (הקשור לערך עצמי הנמצא ב-RHP) אינו מופיע ביציאה.

דוגמא 6 : נתון הממוש :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

לפי המשפט ב-8.15 מערכת זו אינה יציבה פנימית (ע"ע : $\lambda = 5$). למרות זאת תגובת ההלם של המערכת

הנתונה על ידי :

$$g(t) = Ce^{At}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-2t}$$

תדעך לאפס עם הזמן, ולפי 8.14 העה יציבה חיצונית.

דוגמא 7 : פונקצית התמסורת של המערכת בדוגמא 6 הינה :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s-5}{(s-5)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

מהדוגמא הנ"ל רואים שהסיבה להבדל בין היציבות החיצונית והפנימית נובעת מהצטמצמותו של הקוטב (הערך העצמי) הלא יציב ($p=5$) בתהליך יצירת פונקצית התמסורת. כתוצאה מכך אין לקוטב זה השפעה על היציבות החיצונית.

מסקנה : באם בתהליך קבלת פונקצית (או מטריצת) תמסורת ממוש נתון אין מתבטלים קטבים עם אפסים אזי מערכת יציבה חיצונית תהיה יציבה פנימית. (שים לב, כי מערכת יציבה פנימית תמיד יציבה חיצונית גם אם חלים ביטולים).

הערה: אם אין ביטולים יהיה הפולינום האופני $\Delta(s)$ (מכנה $G(s)$) זהה ל:

$$(8.17) \quad \Delta(s) = \det(sI - A)$$

8.17 קריטריון אלגברי ליציבות (קריטריון ראוט, Routh)

במקרים בהם הפולינום האפני $\Delta(s)$ (או $\det(sI - A)$) הינו פולינום מסדר גבוה לא ניתן, או קשה, לפתור את המשוואה האופנית ולמצוא מפורשות את קטבי המערכת. מטרת הקריטריונים האלגבריים היא לקבוע באם הקטבים (או העיניים) נמצאים או לא נמצאים, ב-RHP מבלי לפתור את המשוואה האופנית. נטפל במשוואה אפנית :

$$(8.18) \quad \Delta(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

מבלי לאבד מהכלליות נניח : $a_n = 1$. היות והמקדמים a_i הינם ממשיים אזי לכל שורש מדומה של (8.18) יהיה גם השורש הצמוד לו.

משפט : תנאי הכרחי (אך לא מספיק) לכך שכל שרשי (8.18) יהיו ב-OLHP הוא :

$$(8.19) \quad a_i > 0 \quad \forall i$$

הוכחה : אם ל-(8.18) שורשים ממשיים $s = -\alpha_k$ ושורשים מדומים $s = -\beta_i \pm j\gamma_i$, כולם ב-OLHP (דהיינו $\alpha_k > 0$ ו- $\beta_i > 0$) נוכל לכתוב :

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= \prod_k (s + \alpha_k) \prod_i (s + \beta_i + j\gamma_i)(s + \beta_i - j\gamma_i) = \\ &= \prod_k (s + \alpha_k) \prod_i (s^2 + 2\beta_i s + \beta_i^2 + \gamma_i^2)\end{aligned}\quad (8.20)$$

היות וכל המקדמים באגף הימני של (8.20) חיוביים נקבל ש-(8.19) מתקיים.

הערה : מההוכחה ברור כי תנאי (8.19) הוא גם תנאי מספיק ליציבות עבור $n \leq 2$.

טבלת Routh:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	$\dots$	} מתוך המשוואה האופינית
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	$\dots$	
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	$\dots$		
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
s^1	q_1	0				
s^0	h_1	0				

עמודת
ראש

בטבלת ראש $n+1$ שורות כאשר n הוא סדר $\Delta(s)$. שתי השורות הראשונות מורכבות ממקדמי $\Delta(s)$. את המקדמים $b_i, c_i, \dots$ מחשבים כדלהלן:

$$b_1 = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} ; \quad b_2 = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \quad (8.21)$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1} ; \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1} \quad (8.22)$$

משפט : למשוואה האופינית (8.18) יהיו שרשים אך ורק ב-OLHP אם ורק אם כל האברים שבעמודת ראש הינם חיוביים לחלוטין.

משפט : אם כל האברים בעמודת ראש שונים מאפס, אזי מספר חילופי הסימן בסדרת המספרים המהווים את עמודת ראש שווה למספר השרשים של ב-ORHP.

הערה : ניתן לחלק שורה שלמה בטבלה במספר חיובי מבלי לפגוע במסקנות.

$$\Delta(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4 \quad \text{דוגמא 8 :}$$

נבנה את טבלת ראוט :

s^4	1	1	4
s^3	2	1	0

s^2	-1	4	0
s^1	6	0	
s^0	4		

מסקנות : יש שני חלופי סימן בעמודת ראוט לכן

שני שורשים ב-RHP והמערכת אינה יציבה.

הערות:

1. כדי למצוא את מספר השורשים של $\Delta(s)$ ב-LHP נציב $s = -x$ ב- $\Delta(s)$, נקבל פולינום חדש ב- x ועליו נפעיל את הקריטריון.

2. כדי למצוא את מספר השורשים מימין לקו $s = -a$ ($a > 0$) נציב ב- $\Delta(s)$ $s = x - a$ ונפעיל את הקריטריון על הפולינום ב- x .

מקרים סינגולריים

במקרים מסוימים יופיע 0 בעמודת ראוט, או שורה שלמה בטבלה תתאפס. במקרים אלו המערכת אינה יציבה. אם מעונינים ללמד על מיקום השורשים ניתן להמשיך ולבנות את טבלת ראוט בדרך הבאה :

מקרה א': אפס בעמודה - מציבים מספר חיובי קטן, $\varepsilon > 0$, במקום ה-0 וממשיכים למציאת מספר חלופי הסימן.

$$\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 3s + 2 \quad \text{דוגמא 9 :}$$

טבלת ראוט מוצגת להלן. כל השורה השנייה חולקה ב-2. את ה-0 בעמודת ראוט בשורה השלישית מחליפים ב- ε . מהחשוב מקבלים :

s^5	1	4	3
s^4	2_1	8_4	2_1
s^3	0_ϵ	2	0
s^2	a	1	0
s^1	b	0	
s^0	1		

$$a = 4 - 2/\epsilon$$

$$b = 2 - \frac{\epsilon}{4 - 2/\epsilon}$$

עבור ϵ חיובי קטן: $a < 0$ ו- $b > 0$.

מסקנה: שני חילופי סימן - שני שרשים ב-RHP - המערכת אינה יציבה אסימפטוטית.

מקרה ב': שורה שלמה מתאפסת - התאפסות שורה מלמדת כי למשוואה האופינית שורשים הממוקמים באופן רדיאלי סימטרי ביחס לראשית במשור $[s]$. שורשים אלו עשויים להיות ממשיים, מדומים או מרוכבים. אם שורשים אלו חוזרים m פעמים יופיעו בטבלת ראט m שורות של אפסים. כדי להמשיך ולבנות את הטבלה, בונים פולינום עזר $\psi(s)$ ממקדמי השורה הקודמת לזו שהתאפסה. בפולינום זה החזקה הגבוהה ביותר של s היא "דרגת השורה" הקודמת, (ראה דוגמא 10), וחזקת הפולינום יורדת ב-2.

משמאל לימין. את השורה שהתאפסה מחליפים במקדמי הפולינום $\frac{d\psi(s)}{ds}$ וממשיכים כמקודם.

$$\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 4s + 8 \quad \text{דוגמא 10:}$$

בדוגמא זו מתאפסת השורה (s^3) השלישית.

הפולינום $\psi(s)$ יהיה לכן:

$$\psi(s) = s^4 + 5s^2 + 4$$

s^5	1	5	4
s^4	2_1	10_5	8_4
s^3	0	0	0
s^3	4	10	0
s^2	5/2	4	
s^1	18/5	0	
s^0	4		

שורה חדשה

$$\frac{d\psi(s)}{ds} = 4s^3 + 10s$$

ממקדמי $\frac{d\psi(s)}{ds}$ מרכיבים את השורה החדשה (s^3) .

מהתאפסות השורה השלישית המקורית ברור שהמערכת אינה יציבה אסימפטוטית.
היות ולאחר החלפת השורה השלישית אין חילופי סימן, אין אמנם שורשים ב-ORHP אבל יש שורשים על הציר המדומה, $j\omega$.

הערות:

- ניתן להראות שפולינום העזר $\psi(s)$ הינו גורם של הפולינום האופייני $\Delta(s)$. פרש הדבר ששורשי $\psi(s)$ הם גם שורשי $\Delta(s)$. ל- $\psi(s)$ שבדוגמא 10 ארבעת השורשים הבאים:

$$p_1 = j; \quad p_2 = -j; \quad p_3 = 2j; \quad p_4 = -2j$$
 וכל זוג ממקום אמנם באופן רדיאלי סימטרי ביחס לראשית.
 2. שורה בעלת איבר יחיד שתתאפס תיכלל במקרה ב'.

8.2 מערכות בדידות

8.2.1 קוטב, אפס ופולינום אופייני

הגדרות הקוטב, האפס והפולינום האופייני זהות לאלו שבמערכות רציפות. כך למשל, אם מערכת בדידה מיוצגת על ידי פונקציית התמסורת:

$$G(z) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{a_n \prod_{i=1}^n (z - p_i)} \quad (8.23)$$

יהי $\Delta(z)$:

$$\Delta(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i = a_n \prod_{i=1}^n (z - p_i) \quad (8.24)$$

הפולינום האופייני ו-

$$\Delta(z) = 0$$

המשוואה האופיינית. כמו כן:

$G(z)$ - הינם האפסים של $z = z_i$; $i = 1, \dots, m$

$G(z)$ - הינם הקטבים של $z = p_i$; $i = 1, \dots, n$

הערה: ההגדרות שניתנו בסעיף 8.1.3 תופסות גם במערכות בדידות אם מחליפים את s ב- z .

8.2.2 יציבות חיצונית ויציבות פנימית

כללית, מתאימות הגדרות של יציבות אסימפטוטית חיצונית ופנימית שניתנו למערכות רציפות גם למערכות בדידות עם שינויים ברורים. כפי שטראה להלן, גם משפטי היציבות מתאימים למערכות בדידות אם מחליפים בהם את ה-OLHP במשור [s] בפנים מעגל היחידה במשור [z]. (Open unit disk OUD).

יציבות חיצונית

תגובת ההלם $g(k)$ של מערכת המתוארת על ידי (8.23) הינה :

$$g(k) = Z^{-1} G(z)$$

והיא מכילה ביטויים מהצורה ,

$$k^q (p_i)^k$$

מכאן :

משפט (היציבות האסימפטוטית החיצונית) : מערכת בדידה, ליניארית וסטציונרית, הנתונה על ידי $G(z)$

(8.23), יציבה אסימפטוטית חיצונית אם ורק אם כל קטביה מקיימים :

$$(8.25) \quad |p_i| < 1 \quad i = 1, \dots, n$$

או אקוילנטית : אם ורק אם כל קטביה נמצאים בתוך מעגל היחידה הפתוח (ב- OUD) במשור הקומפלקסי [z].

יציבות פנימית

תהיה המערכת הבדידה נתונה על ידי המימוש :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x \in R^n$$

$$(8.26) \quad y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

בפתרון המערכת החפשית :

$$(8.27) \quad x(k+1) = Ax(k)$$

באמצעות המחדים, מופיעים ביטויים מהצורה :

$$(8.28) \quad k^q \lambda_i^k$$

משפט (היציבות האסימפטוטית הפנימית) : המערכת הבדידה המוצגת על ידי הממוש (8.26) יציבה אסימפטוטית פנימית אם ורק אם :

$$(8.29) \quad |\lambda_i(A)| < 1 \quad i = 1, \dots, n$$

או : אם ורק אם כל הערכים העצמיים, $\lambda_i(A)$, של מטריצת המערכת, A , מצויים בתוך ה- UD במשור הקומפלקסי $[z]$.

הערה : הקשרים בין יציבות פנימית וחיצונית במערכות בדידות זהים לאלו שבמערכות רציפות (ראה 8.1.6).

דוגמא 11 : מערכת בדידה נתונה באמצעות משוואת ההפרשים :

$$y_{k+2} - 2.5 y_{k+1} + y_k = u_{k+1} - 2u_k$$

האם המערכת יציבה אסימפטוטית חיצונית ? פנימית ?

את פונקציית התמסורת של המערכת נמצא על ידי התמרת z של משוואת ההפרשים ונקבל :

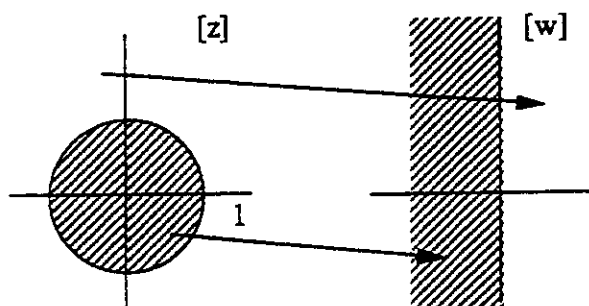
$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{z-2}{(z-2)(z-1/2)} = \frac{1}{z-1/2}$$

מכאן שהמערכת יציבה אסימפטוטית חיצונית (קוטב אחד בתוך ה- UD) ואיננה יציבה פנימית (עיני נוסף מחוץ ל- UD).

8.2.3 שמש בקריטריון ראוט לבדיקת יציבותו של מערכות בדידות

כיון שהקריטריון הנייל מאפשר קביעת הימצאותם של שורשי פולינום ב- LHP וב- RHP , לא ניתן להשתמש בו ישירות למערכות בדידות, דהיינו, לקביעת המצאותם של שורשים בתוך מעגל היחידה או מחוצה לו. ניתן בכל זאת להשתמש בקריטריון ראוט למערכות בדידות אם מבצעים העתקה של $\Delta(z)$ ל- $\Delta(w)$, ממשור z למשור w , באמצעות ההעתקה הביליניארית.

ההעתקה מעבירה את פנים מעגל היחידה במשור z ל- $OLHP$ של משור w (ראה ציור 8.2).



ציור 8.2

ההעתקה הביליניארית המומימיה לצרכנו נתונה על ידי הקשר הבא :

$$(8.30) \quad z = \frac{1+w}{1-w}$$

במקום כל z במשוואה האפיינית $\Delta(z) = 0$, נציב את (8.30) ונקבל :

$$\Delta(z) = \frac{\bar{\Delta}(w)}{(1-w)^n} = 0 \quad (8.31)$$

כל שורש של $\Delta(z) = 0$ הנמצא בתוך מעגל היחידה יותק לשורש של $\bar{\Delta}(w)$ ב-LHP במשור w , וכל שורש של $\Delta(z)$ מחוץ למעגל היחידה יותק לשורש של $\bar{\Delta}(w)$ ב-RHP. על $\bar{\Delta}(w) = 0$ נפעיל את קריטריון ראוס.

דוגמא 12 : קבע את יציבותה ואת מקום קטביה של המערכת אשר משוואתה האפיינית נתונה על ידי :

$$\Delta(z) = 2z^2 + 3z - 2$$

אם נציב את (8.30) ב- $\Delta(z)$ נקבל :

$$\Delta(z) = 2 \frac{(1+w)^2}{(1-w)^2} + \frac{3(1+w)}{1-w} - 2 = \frac{-3w^2 + 8w + 3}{(1-w)^2} = \frac{\bar{\Delta}(w)}{(1-w)^2}$$

ל- $\bar{\Delta}(w)$ הנ"ל נבנה את טבלת ראוס :

$$\begin{array}{c|cc} w^2 & -3 & +3 \\ w^1 & 8 & 0 \\ w^0 & +3 & \end{array}$$

כיוון שבעמודת ראוס חלף סימן אחד, פרש הדבר ששורש אחד של $\bar{\Delta}(w)$ ב-RHP ואחד ב-LHP של משור w . ומכאן :

המערכת אינה יציבה (קוטב אחד מתוך השניים מחוץ למעגל היחידה).

8.2.4 תנאים הכרחיים (ישרות על $\Delta(z)$)

קימים קריטריונים אלגבריים לבדיקת יציבות במשור z ללא צורך בהעתקה הבייליניארית ושמוש בקריטריון ראוס. תנאים אלו הם מחוץ לחומר קורס זה. נציג את התנאים ההכרחיים בלבד ללא הוכחה.

$$\text{משפט : נתונה המשוואה האפיינית : } \Delta(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i \quad (\text{עם } a_n > 0).$$

תנאים הכרחיים (אך לא מספיקים) להמצאות כל שרשי $\Delta(z)$ בתוך ה- OUD הם :

$$(8.32) \quad \Delta(1) > 0$$

$$(8.33) \quad (-1)^n \Delta(-1) > 0$$

8.2.5 תנאים הכרחיים ומספיקים למערכת מסדר שני

נתונה המשוואה האפיינית מסדר שני :

$$\Delta(z) = a_0 + a_1 z + z^2$$

נוכיח כי תנאים הכרחיים ומספיקים להמצאות שרשי $\Delta(z)$ ב- OUD הם (8.32), (8.33) ו- $a_0 < 1$.

הוכחה : נשתמש בהתמרה הביליניארית :

$$\Delta(z) = \Delta\left(z = \frac{1+w}{1-w}\right) = a_0 + a_1 \frac{1+w}{1-w} + \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2$$

מכאן :

$$\bar{\Delta}(w) = w^2(1 - a_1 + a_0) + w(1 - a_0) \cdot 2 + (1 + a_1 + a_0)$$

על מנת ששרשי $\bar{\Delta}(w)$ ימצאו ב- OLHP במשור w דרוש שכל מקדמי $\bar{\Delta}(w)$ יהיו חיוביים לחלוטין (קריטריון ראוט למערכת מסדר שני).

ומכאן :

$$1 + a_1 + a_0 > 0 \quad (\Delta(1) > 0 \text{ (תנאי (8.32))})$$

$$1 - a_1 + a_0 > 0 \quad (\Delta(-1) > 0 \text{ (תנאי (8.33))})$$

$$a_0 < 1 \quad \text{ו-}$$

8.3 דוגמא : (חלק משאלה מבחינת סמסטר תשמ"ג)

נתונים ממושים של שתי מערכות פשוטות :

מערכת ב'

$$\dot{x}_2 = 2x_2 + u_2$$

$$y_2 = x_2$$

מערכת א'

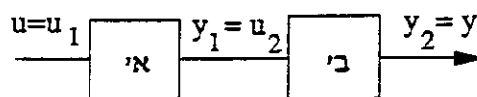
$$\dot{x}_1 = -x_1 + u_1$$

$$y_1 = -3x_1 + u_1$$

א. האם כל אחת מהמערכות יציבה אסימפטוטית פנימית, חיצונית ?

ב. מתברר את שתי המערכות בטור כמוראה בציר. האם המערכת השקולה יציבה אסימפטוטית פנימית

ו/או חיצונית ?



מערכת שקולה

ציור 8.3

ג. מצא את $x_1(t)$ ואת $x_2(t)$ (כאשר המערכות מתוברות בטור, אם נתון: $x_1(0) = x_2(0) = 1$)
 ו- $u(t) = 0$ ($t \geq 0$), מהם $x_1(t)$ ו- $x_2(t)$ עבור $t \rightarrow \infty$. האם תשובתך כאן סותרת את ממצאך בסעיף ב'.

פתרון:

א. למערכת אי עיע $\lambda_1 = -1 < 0$ מערכת אי יציבה פנימית ולכן אף יציבה חיצונית. למערכת בי עייע $\lambda_2 = +2 > 0$ (ב-ORHP) מערכת בי אינה יציבה אסימפטוטית פנימית. כדי לבדוק יציבות חיצונית

$$G_2(s) = 1(s-2)^{-1} = \frac{1}{s-2}, \quad \left(\frac{y_2(s)}{u_2(s)} = \right) G_2(s) \quad \text{נמצא את}$$

מערכת בי אינה יציבה אסימפטוטית חיצונית - הקוטב $p = 2$ (ב-ORHP).

ב. נמצא את $G_1(s)$:

$$G_1(s) = -3(s+1)^{-1} \cdot 1 + 1 = \frac{-3}{s+1} + 1 = \frac{s-2}{s+1}$$

פונקציית ההתמסדות, $G(s)$, של המערכת השקולה תהיה (ראה (7.40):

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = G_2(s) \cdot G_1(s) = \frac{1}{s-2} \cdot \frac{s-2}{s+1} = \frac{1}{s+1}$$

היות ולמערכת השקולה קוטב אחד ב-OLHP (הקוטב השני הצטמצם) - המערכת השקולה יציבה אסימפטוטית חיצונית. המערכת השקולה אינה יציבה אסימפטוטית פנימית כי אחד מקטביה ($s=2$) נמצא ב-RHP.

זאת גם ניתן לראות בדרך אחרת. נמצא את הממש האקוילנטי (ראה סעיף 7.6).
 נשתמש בקשר:

$$u_2 = y_1$$

ותקבל:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 + y_1 = 2x_2 - 3x_1 + u \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

כאשר בקשרים הניל הגדרנו (ראה ציור 8.3):

$$\begin{aligned} u &\stackrel{\Delta}{=} u_1 \\ y &\stackrel{\Delta}{=} y_2 \end{aligned}$$

בסעיף 7.6, נגדיר וקטור מצב מורחב על ידי :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ונקבל ממוש עבוד המערכת השקולה :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (0 \quad 1) x$$

נמצא הערכים העצמיים של המערכת השקולה :

$$|\lambda I - A| = (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2$$

היות ו- λ_2 מצוי ב-RHP המערכת אינה יציבה אסימפטוטית פנימית.

ג. נמצא מהמוש של המערכת השקולה את פתרון המערכת החפשית.

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = L^{-1} \left(\frac{\begin{pmatrix} s-2 & 0 \\ -3 & s-1 \end{pmatrix}}{(s+1)(s-2)} \right) = L^{-1} \left(\frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-2}} \quad \frac{0}{s-2} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

לכן :

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{At} x_0 = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

ו-

$$x(t \rightarrow \infty) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

תוצאה זו, לכאורה, פרושה שהמערכת השקולה יציבה פנימית שכן $x(t)$ דועך לאפס מתנאי התחלה. אבל

תנאי ההתחלה הנתון הוא מיוחד - הוא בכיוון הממד הקשור לעיץ היציב ($\lambda_1 = -1$), בעוד שבהגדרה נדרש

שהפתרון ידעך ל-0 מכל תנאי התחלה. מכאן שתוצאה זו אינה סותרת את ממצאינו בסעיף ב'.

8.4 שמוש במשפטי הערך הסופי

בפרק 6, היכרנו את משפטי הערך הסופי למערכות רציפות ובדידות. משפטים אלו מאפשרים למצוא את $y(t \rightarrow \infty)$ מדיעת $Y(s)$ (או $Y(z)$) ללא צורך בבצוע התמורות הפוכות במידה ול- $y(t \rightarrow \infty)$ קיים גבול קבוע. מפרק זה ברור לנו כי ניתן להשתמש במשפטי הערך הסופי במידה ו- $G(s)$ יציבה אסימפטוטית ובאם הכניסות חסומות או בעלות אנרגיה סופית ושואפות אסימפטוטית לקבוע.

דוגמה : מטריצת התמסורת של מערכת נתונה על ידי :

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{s-2}{s^3 + 2s^2 + 3s + 8} \\ \frac{3s+1}{s^2 + 2s + 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(s) \\ g_2(s) \end{pmatrix}$$

מצא את $y(\infty)$ אם $u(t) = \delta(t)$.

פתרון :

$$\begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} = y(s) = G(s) u(s) = G(s)$$

היות ו- $g_2(s)$ יציבה אסימפטוטית (מכנה מסדר שני אשר כל מקדמיו חיוביים) ו- $g_1(s)$ אינה יציבה (בדוק)

ניתן להפעיל את משפט הערך הסופי רק עבור היציאה y_2 :

$$y_2(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s g_2(s) = 0$$

היציאה $y_1(t \rightarrow \infty)$ תתבדר ובתלות במקום קטבי $g_1(s)$ תהיה ∞ או $-\infty$ או תתנדנד באמפליטודה

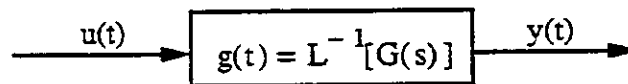
אינסופית.

פרק 9 : תגובת תדירות

בפרק זה נטפל באחד הכלים החשובים לאפיון ותכנון מערכות ליניאריות. כללית, תגובת תדירות הינה התגובה במצב מתמיד של מערכת ליניארית יציבה לכניסה מחזורית. המערכות תהיינה מיוצגות על ידי פונקציות (או מטריצות) התמסורת.

9.1 מערכות רציפות

תהיה מערכת SISO נתונה על ידי פונקציית התמסורת $G(s)$ (ראה ציור 9.1),



ציור 9.1

כאשר $G(s)$ היא :

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (9.1)$$

נניח כי ב- $G(s)$ אין כל ביטולים של אפסים עם קטבים.

9.1.1 משפט תגובת התדירות: באם המערכת, $G(s)$ יציבה אסימפטוטית אזי הכניסה :

$$u(t) = a \sin \omega t$$

גוררת במצב מתמיד את היציאה :

$$y_{ss}(t) = a |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega)) \quad (9.2)$$

הוכחה: נניח כניסה הרמונית:

$$u(t) = a e^{j\omega t} = a (\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad (9.3)$$

כך ש-

$$u(s) = L[u(t)] = \frac{a}{s - j\omega} \quad (9.4)$$

היציאה המותמרת, $Y(s)$, תהיה לכן :

$$Y(s) = G(s) U(s) = G(s) \cdot \frac{a}{s - j\omega} \quad (9.5)$$

פרוק האגף הימני של משוואה (9.5) לשברים חלקיים יתן :

$$y(t) = L^{-1}\left\{G(s) \frac{a}{s - j\omega}\right\} = L^{-1}\left[\frac{\alpha}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{s - p_i}\right] \quad (9.6)$$

כאשר p_i ($i = 1, \dots, n$) הם קטבי $G(s)$. ולפי הנתון,

$$(9.7) \quad \operatorname{Re}(p_i) < 0$$

מ-(9.6) נקבל :

$$(9.8) \quad y(t) = \alpha e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n \beta_i e^{p_i t}$$

ועקב (9.7),

$$(9.9) \quad y_{ss}(t) = y(t \rightarrow \infty) = \alpha e^{j\omega t}$$

שכן כל האקספוננטים $e^{p_i t}$ ידעו ל-0 עם t .

נמצא את α בפרוק לשברים חלקיים שב-(9.6) :

$$(9.10) \quad \alpha = (s - j\omega) \cdot G(s) \frac{a}{s - j\omega} \Big|_{s=j\omega} = aG(j\omega)$$

היות ו- $G(j\omega)$ מספר קומפלקסי, נציגו בהצגתו הפולרית,

$$(9.11) \quad \alpha = a |G(j\omega)| e^{j(\arg G(j\omega))}$$

כאשר :

$$(9.12) \quad \arg G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im} G(j\omega)}{\operatorname{Re} G(j\omega)}$$

נציב את (9.11) ב-(9.9) ונקבל :

$$y_{ss}(t) = a |G(j\omega)| e^{j(\arg G(j\omega))} \cdot e^{j\omega t} =$$

$$(9.13) \quad = a |G(j\omega)| [\cos(\omega t + \arg G(j\omega)) + j \sin(\omega t + \arg G(j\omega))]$$

מ-(9.13) נובע שהתגובה במצב מתמיד לכניסה $u(t) = a \sin \omega t$ נתונה על ידי (9.2).

מ.ש.ל.

9.12 מסקנות מהמשפט

1. התגובה במצב מתמיד של מערכת ליניארית לכניסה סינוסואידלית, $a \sin \omega t$, היא סינוסואידלית

באותה תדירות, ω , אבל בשני שינויים:

א. אמפליטודה שונה.

ב. הזזת פאזה.

2. היחס בין אמפליטודת היציאה לאמפליטודת הכניסה (הנקרא Amplitude Ratio ויסומן להלן - AR)

נתון על ידי :

$$(9.14) \quad AR = |G(j\omega)|$$

והזזת הפאזה (פגור הפאזה - phase lag) שתסומן להלן ב- ϕ נותנה על ידי :

$$(9.15) \quad \phi = \arg G(j\omega)$$

9.13 א. שני הגדלים כפונקציה של התדירות ω ($0 \leq \omega < \infty$) :

(1) יחס האמפליטודות $AR(\omega)$, ו- (2) הזזת הפאזה $\phi(\omega)$, מגדירים חד משמעית את תגובת התדירות של המערכת.

ב. כדי לקבל, לכן, את תגובת התדירות של מערכת, מציבים $j\omega$ במקום כל s ב- $G(s)$, ומחשבים את AR לפי (9.14) ואת ϕ לפי (9.15).

ג. תגובת התדירות נותנת בידינו אינפורמציה על תכונות המערכת במשור התדר. מיחס האמפליטודות, $AR(\omega)$, ניתן לקבוע מהם תחומי התדירות בהן המערכת מגבירה ($AR > 1$) ובאילו תדירותות היא מנחיתה, או מסננת ($AR < 1$). כפי שהוסבר בסעיף 6.5.2 לכל פונקציה (כניסה) תוכן תדירות. אם עיקר תוכן זה מרוכז באזור ההגברה של תגובת התדירות של המערכת, יועבר אות הכניסה ליציאה. במידה ולא, יונחת אות הכניסה (או יסונן) והשפעתו על היציאה מהמערכת תהיה קטנה. נעיר עוד, שלתגובת התדירות חשיבות בקביעת היציבות של מערכות משות. על מערכות משות אין אנו עומדים בקורס זה.

הערות :

(1) אם מספר האפסים m , (ראה (9.1), קטן ממספר הקטבים, n , נקבל :

$$(9.16) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0$$

(2) אם המערכת נתונה באמצעות ממש במרחב המצב (A, B, C, D) , יהיה $G(j\omega)$ נתון על ידי :

$$(9.17) \quad G(j\omega) = C(j\omega - A)^{-1}B + D$$

9.14 תגובת התדירות של מערכת MIMO

תהא מערכת MIMO בעלת m כניסות ו- r יציאות נתונה על ידי מטריצת התמסורת :

$$(9.18) \quad G(s) = \begin{pmatrix} g_{11}(s) & \dots & g_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{r1}(s) & \dots & g_{rm}(s) \end{pmatrix}$$

כאשר $g_{iq}(s)$ הינה פונקציית התמסורת בין הכניסה ה- q ליציאה ה- i .

מטריצת תגובת התדירות של המערכת מוגדרת כ- $G(j\omega)$ דהיינו :

$$G(j\omega) = \begin{pmatrix} g_{11}(j\omega) & \dots & g_{1m}(j\omega) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{r1}(j\omega) & \dots & g_{rm}(j\omega) \end{pmatrix} \quad (9.19)$$

אם הכניסה ה-q נותנה על ידי :

$$u_q(t) = a \sin \omega t$$

בעד שאר הכניסות הם - 0, תהיה התגובה במצב מתמיד של כל אחת מהיציאות y_i ($i = 1, \dots, r$)

נותנה על ידי :

$$y_{i_{ss}}(t) = a |g_{iq}(j\omega)| \sin(\omega t + \arg(g_{iq}(j\omega))) \quad i = 1, \dots, r$$

9.15 דוגמא 1 : נותנה פונקציית התמסורת :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2}$$

מהי תגובת המערכת במצב מתמיד לכניסה $u(t) = 2 \sin(2t)$:

נחשב $G(j\omega)$,

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)^2}$$

לכן,

$$AR = |G(j\omega)| = \frac{(4 + \omega^2)^{1/2}}{1 + \omega^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}(\omega/2) - 2 \tan^{-1}(\omega)$$

ועבור $\omega = 2$,

$$AR = |G(j2)| = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

$$\phi_{\omega=2} = \tan^{-1}(1) - 2 \tan^{-1}(2) = 45^\circ - 2 \cdot 63.43^\circ = -81.87^\circ = -1.43 \text{ rad}$$

תגובת המערכת במצב מתמיד תהיה לכן :

$$y_{ss}(t) = 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{5} \sin(2t - 1.43)$$

9.1.6 מערכות לא-מינימום פאזה (Non-minimum phase systems)

הגדרה : פונקצית תמסורת רציונלית (מנה של שני פולינומים) בעלת קטבים ב-OLHP נקראת מינימום פאזה אם כל אפסיה ב-CLHP.

ולחיפך - פונקצית תמסורת רציונלית בעלת קטבים ב-OLHP תקרא לא-מינימום פאזה, אם אחד או יותר מאפסיה נמצאים ב-ORHP.

הערה : הסיבה לשם לא-מינימום פאזה היא הבאה : נניח כי לפונקצית התמסורת $g(s)$ אפס אחד : $s = \alpha > 0$ (ב-ORHP). נוכל לבטא את $g(s)$ בצורה הבאה :

$$(9.20) \quad g(s) = \frac{\alpha - s}{\alpha + s} g_1(s)$$

כאשר $g_1(s)$ הוא מינימום פאזה.

עבור α ממשי נקבל :

$$(9.21) \quad \frac{\alpha - j\omega}{\alpha + j\omega} = e^{-2j\theta(\omega)}$$

כאשר :

$$(9.22) \quad \theta(\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha}$$

ו-

$$(9.23) \quad \theta(\omega) > 0, \quad \omega > 0$$

ברור ש-

$$(9.24) \quad \left| \frac{\alpha - j\omega}{\alpha + j\omega} \right| = 1$$

ולכן :

$$(9.25) \quad |g(j\omega)| = |g_1(j\omega)|$$

אבל :

$$(9.26) \quad \arg(g(j\omega)) < \arg(g_1(j\omega))$$

שכן :

$$\arg(g(j\omega)) = \arg(g_1(j\omega)) - 2\theta(\omega)$$

משמעות (9.25) ו-(9.26) היא של- $g(s)$ ול- $g_1(s)$ אותו AR בכל התדירויות, אבל ל- $g(s)$, כתוצאה מהאפס ב-

ORHP, פגוד פאזה גדול יותר מאשר ל- $g_1(s)$.

הערות :

- (1) מהחיסור הנזיל ברור כי אם נתונה $g(s)$ לא-מינימום פאזה עם אפס אחד ב-ORHP ($s = \alpha > 0$) הרי $g_1(s)$ מינימום פאזה המקימת את (9.25) תהיה נתונה על ידי :

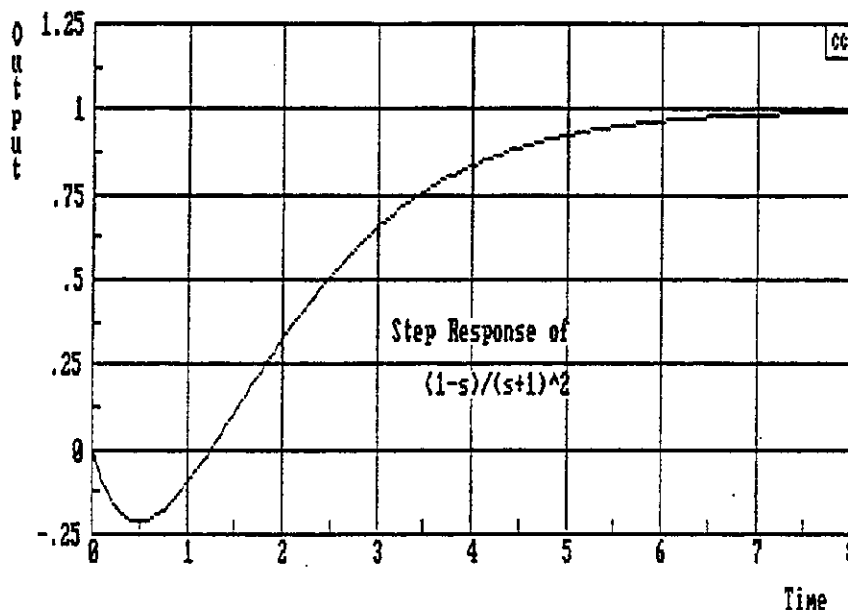
$$(9.27) \quad g_1(s) = \frac{\alpha + s}{\alpha - s} \cdot g(s)$$

- (2) לפתקצית תמסורת $g(s)$ מינימום פאזה קוראים לעיתים ברת-הפיכה (invertible) היות ולהפכית של $g(s)$, $\frac{1}{g(s)}$, קטבים אך ורק ב-OLHP (כלומר $\frac{1}{g(s)}$ יציבה אסימפטוטית).

- (3) למערכות לא מינימום פאזה תגובות לכניסות מדרגה שונות מהרגיל. ניתן להראות כי למערכות להן מספר אי-זוגי של אפסים ב-RHP תגובת מדרגה הנקראת תגובה הפוכה (inverse response). בתחילה מגיבה המערכת בכיוון הפוך לכיוון כניסת המדרגה ומאוחר יותר משנה התגובה סימן וחולכת לקראת הערך במצב מתמיד. דוגמת תגובת מדרגה של המערכת

$$G(s) = \frac{1-s}{(s+1)^2}$$

מוצגת בציור .



- (4) מסיבות שלעיל גם פונקצית התמסורת הבאה :

$$g(s) = g_1(s)e^{-\theta s}$$

כאשר $g_1(s)$ היא רציונלית ובעלת קטבים ב-OLHP, נקראת לא-מינימום פאזה. $e^{-\theta s}$ הינה התמרת לפלס של זמן מת, ראה משפט הזזה ממשית בפרק 6.

9.1.7 הקשר בין AR ו- ϕ

ניתן להראות כי במערכות מינימום פאזה הפאזה של $G(j\omega)$ ($\arg G(j\omega)$) נקבעת באופן יחיד מה-AR של $G(j\omega)$, $|G(j\omega)|$. תוצאה זו נוסחה והוכחה בסביבות 1940 על ידי בודה (Bode). תרומה נוספת של בודה בנושא תגובת התדר תובא בסעיף הבא.

מהתוצאה הנ"ל יוצא איפוא כי מידעת ה-AR של מערכת מינימום פאזה ניתן לקבוע חד משמעית את פונקצית התמסורת של המערכת. במילים אחרות, לשתי מערכות מינימום פאזה שונות, AR שונים.

9.2 תאורים גרפיים של תגובת התדירות

את החומר שיובא להלן ניתן למצוא בכל ספר אלמנטרי העוסק במערכות ובבקרה. לכן נביא כאן רק את עיקרי הדברים.

9.2.1 תאור בודה (Bode)

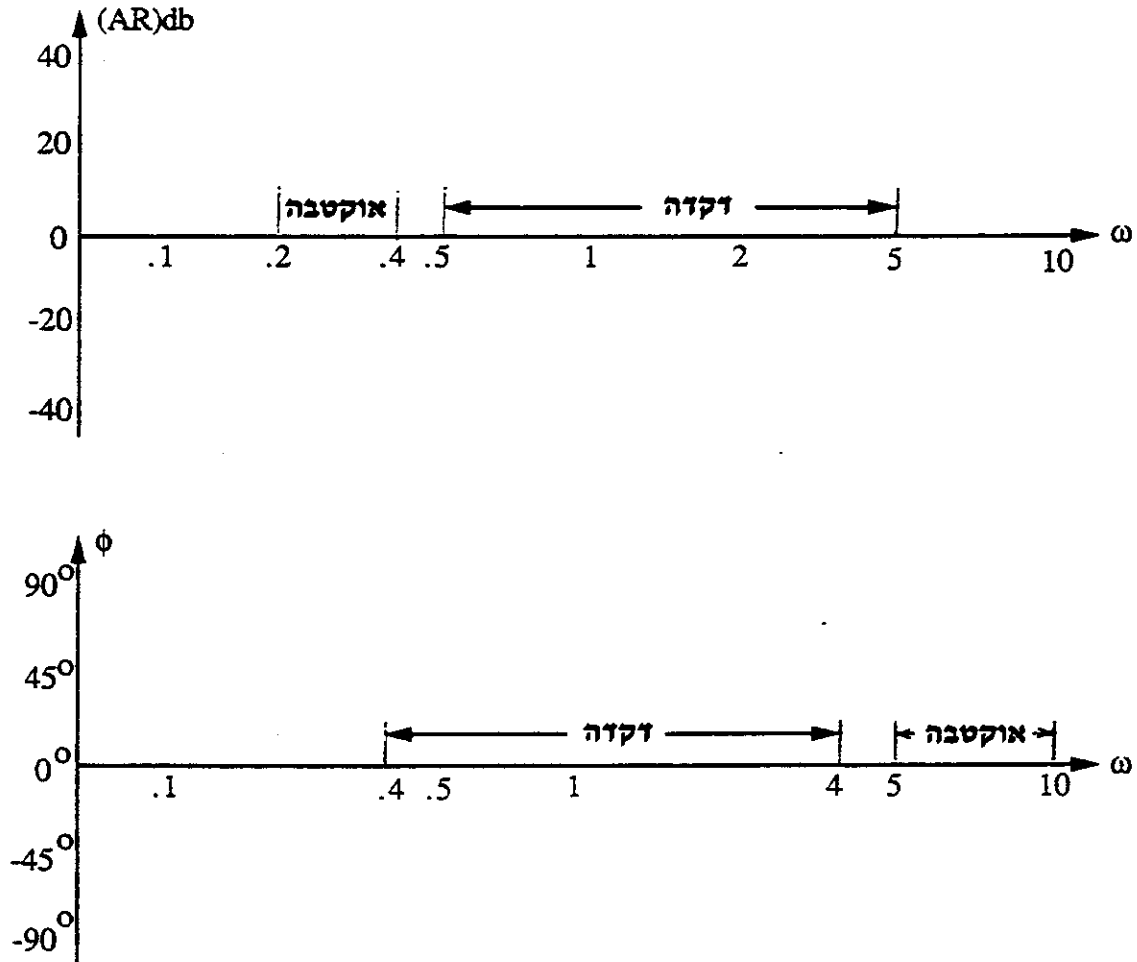
בתאור בודה מתארים את ה- $AR(\omega)$ ואת ה- $\phi(\omega)$ בשני ציורים נפרדים כפונקציה של $\log \omega$ על גרף חצי לוגריתמי. את ה-AR מביעים בדרך כלל בדציבלים, db. הקשר בין ה-AR המתקבל מ-(9.14) לבין ערכו המתאים ב-db מוגדר על ידי:

$$(AR)_{db} \triangleq 20 \log_{10}(AR) \quad (9.28)$$

הטבלה הבאה מדגימה את (9.28).

AR	AR_{db}
0.01	-40
0.1	-20
0.5	-6
1.0	0
2.0	6
10.0	20
100.0	40

ציור 9.2 מציג את שני הגרפים באמצעותם מתארים את תגובת התדירות בתאור בודה.
המרחק הקבוע לאורך ציר התדר בין כל שתי תדירויות שהיחס ביניהן הוא 10, נקרא בשם **דקדה** (decade).
בצורה דומה, כאשר היחס בין התדירויות הוא 2, נקרא המרחק ביניהן בשם **אוקטבה** (Octave).



ציור 9.2

9.2.2 תאור בודה אסימפטוטי של פגור מסדר ראשון

את עקרונות התאור ניתן להבין היטב מהדגמתו באמצעות פגור מסדר ראשון (הנקרא גם - מסנן מעביר נמוכים). פונקציית התמסורת של פגור מסדר ראשון נתונה על ידי :

$$(9.29) \quad G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

כאשר τ הוא קבוע הזמן של הפיגור (או של המסנן).

$G(j\omega)$ המתאים יהיה:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\tau j\omega + 1}$$

לק :

$$AR = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}}; \quad \phi = \tan^{-1}(\tau \omega)$$

ר-

$$(AR)_{db} = -10 \log_{10}(\tau^2 \omega^2 + 1)$$

הטבלה הבאה מציגה את תגובת התדירות של (9.29) בערכים קיצוניים של $\tau \omega$. מהטבלה ניתן לראות כי ה-AR של פיגור מסדר ראשון קרוב לשתי אסימפטוטות:

$$(9.30) \quad AR_{db} = 0, \quad (0 < \tau \omega < 1) \quad \text{האחת,}$$

$$(9.31) \quad AR_{db} = -20 (\log \tau \omega), \quad (1 < \tau \omega < \infty) \quad \text{והשנייה,}$$

$\tau \omega$	$(AR)_{db}$	ϕ
$\tau \omega \ll 1$	0	0°
$\tau \omega = 1$	-3	-45°
$\tau \omega \gg 1$	$-20 \log_{10}(\tau \omega)$	-90°

האסימפטוטה (9.31) אינה אלא ישר היוצא מהנקודה ($AR = 0, \tau \omega = 1$) ושפתו -20db/decade . התדירות בה נחתכות שתי האסימפטוטות נקראת תדירות הפינה (ω_c).

תדירות הפינה נחשבת על ידי:

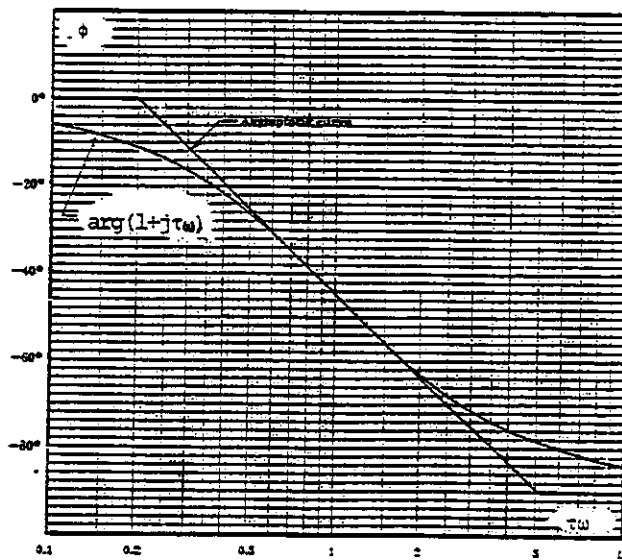
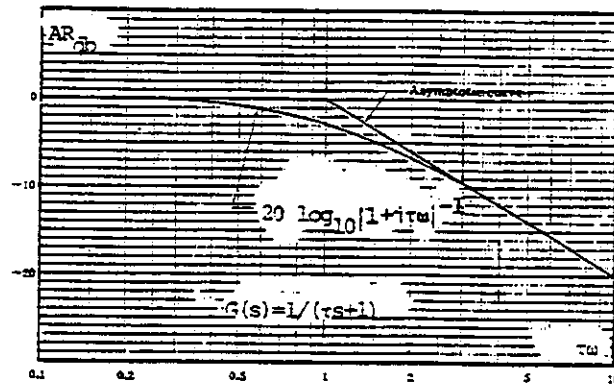
$$(9.32) \quad \omega_c = 1/\tau$$

ה-AR של (9.29) ושתי האסימפטוטות מוצגים בציור 9.3. הסטיה הגדולה ביותר בין התאור האסימפטוטי לבין התאור המדויק היא בתדירות הפינה וגדלה -3db .

הערה: גם את גרף הפאזה, ϕ , ניתן לקרוב, כמוראה בציור 9.3 ומסבר בטבלה.

$\tau \omega$	ϕ
$\tau \omega \leq .2$	$\phi = 0$
$.2 \leq \tau \omega \leq 5$	הישר המחבר את ($\phi = 0, \tau \omega = .2$) עם ($\phi = -90^\circ, \tau \omega = 5$)
$\tau \omega \geq 5$	$\phi = -90$

כפי שניתן לראות מציור 9.3 קרוב זה אינו טוב (פרט לאזור הקרוב ל- $\tau \omega = 1$) ולכן משמש בדרך כלל להערכה גסה של גרף הפאזה.



ציור 9.3

9.2.3 תאורי בודה של פונקציות אלמנטריות

באופן דומה לפיתוח שבסעיף הקודם ניתן לקבל את תאורי בודה של פונקציות אלמנטריות אחרות (ראה ציורים 9.7 - 9.4):

א. הגבר קבוע . $G(s) = k$ (9.33)

ה-AR של (9.33) הינו קבוע ושווה ל- $AR = +20 \log k$.

ה- ϕ של (9.33) יהיה : $\phi = 0^\circ$ בכל התדירויות.

ב. אינטגרטורים וגזרים (ציור 9.4) $G(s) = s^{\pm m}$ (9.34)

m - מספר שלם. הפונקציה $G(s) = 1/s$ נקראת אינטגרטור, והפונקציה $G(s) = s$ נקראת גזר.

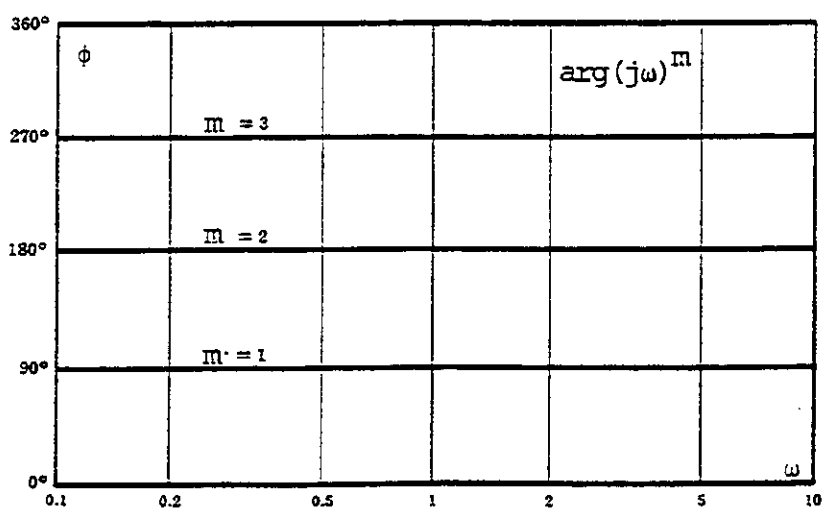
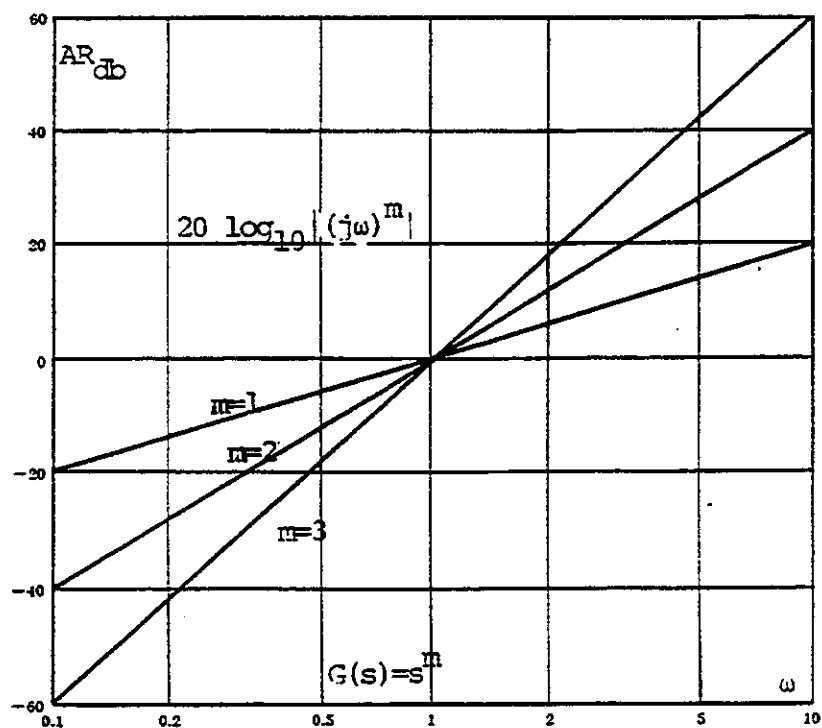
קל להראות שה-AR של (9.34) נתון על ידי :

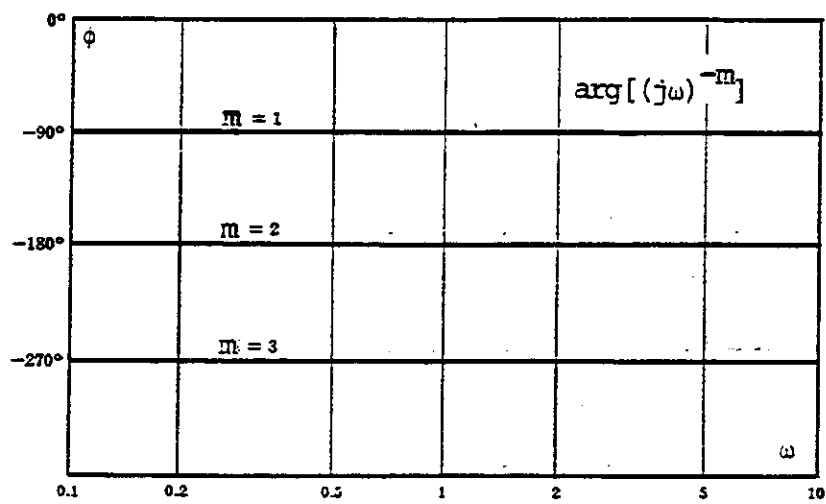
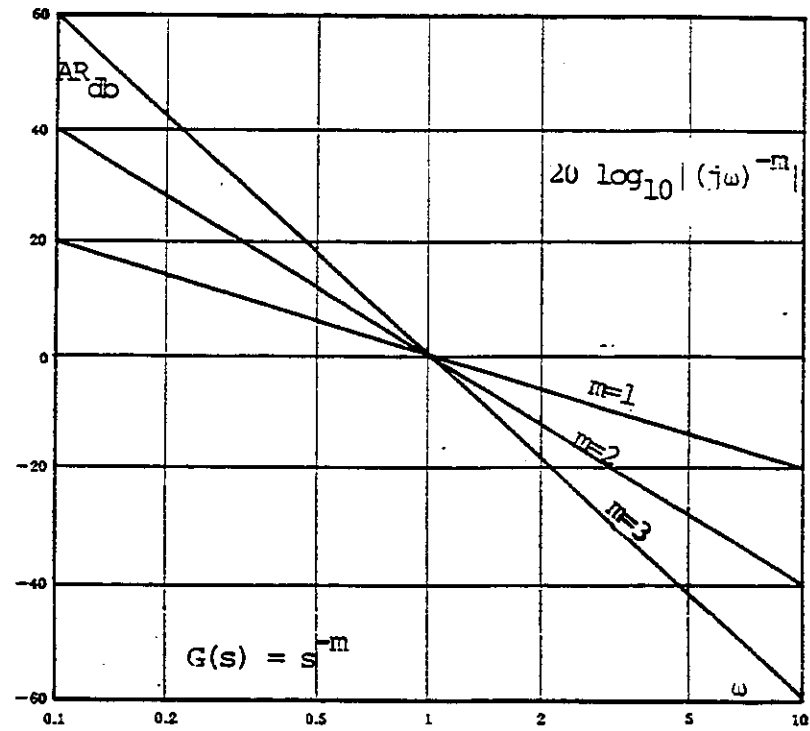
$$AR_{\phi} = \pm 20 m \cdot \log \omega$$

כלומר ישר העובר דרך הנקודה ($\omega = 1$, $AR = 0$) ושיפועו ± 20 m דציבלים לדקדה. בצורה דומה, נתון פיגור (או קידום) הפאזה של (9.34) על ידי :

$$\phi = \pm 90^\circ \cdot m$$

והוא קבוע בכל התדירויות.

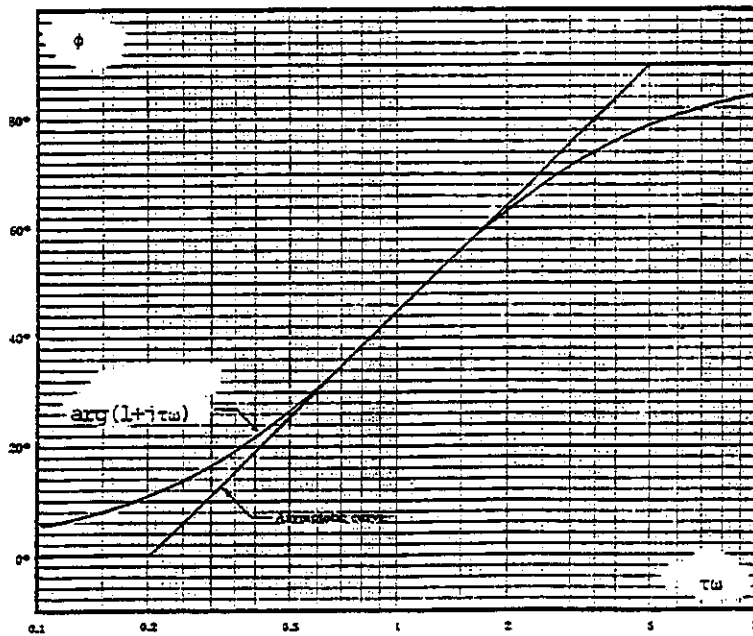
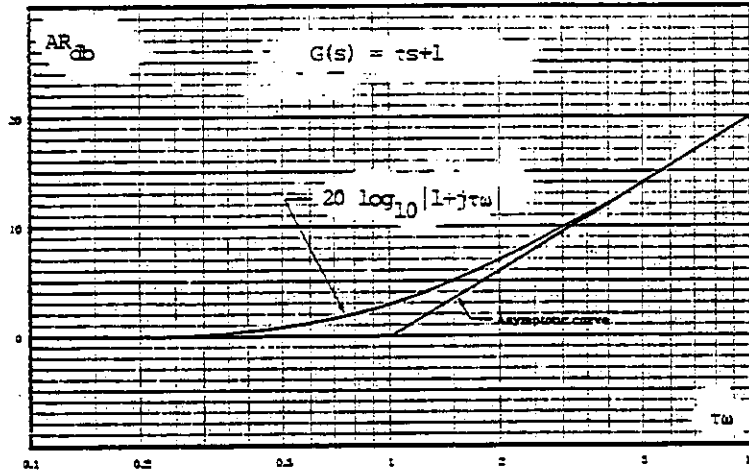




צור ב 9.4

ג. אפס ב-LHP (צור 9.5) $G(s) = \tau s + 1$ ($\tau > 0$) (9.35)

ה-AR וה- ϕ של (9.35) הנים תמונת ראי ביחס ל- $AR_{db} = 0$ ו- $\phi = 0^\circ$ בהתאמה של פגור מסדר ראשון.



ציור 9.5

ד. פתקציה מסדר שני (ציור 9.6):

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2} \quad (9.36)$$

ω_n - התדירות הטבעית.

ξ - מנת הרסון.

מערכות בהן $\xi < 1$ נקראות מערכות תת-מרוסנות. מערכות בהן $\xi > 1$ נקראות מערכות על-מרוסנות. כאשר $\xi > 1$ ניתן לפרק את $G(s)$ שב-(9.36) למכפלה של שני פניורים מסדר ראשון ולהשתמש בתכונת החבור של דיאגרמת בודה כפי שיוסבר בסעיף 9.2.4. כאשר $\xi < 1$, נטון $G(j\omega)$ של (9.36) על ידי:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}$$

ולכן :

$$(9.37) \quad AR_{db} = -20 \log \left[\left(1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 \right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2}$$

ו-

$$(9.38) \quad \phi = -\tan^{-1} \frac{2\xi\omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2}$$

הטבלה להלן מציגה ערכים קיצוניים של תגובת התדירות של (9.36). מהטבלה רואים שה-AR הנדון

קרוב לשתי אסימפטוטות: בתדירויות נמוכות, לאסימפטוטה $AR_{db} = 0$, ובתדירויות גבוהות

($\omega \gg \omega_n$) לאסימפטוטה היוצאת מהנקודה ($AR = 0, \omega = \omega_n$), ויורדת בשפוע של -40db/decade. עבור

$\xi < \sqrt{2}/2$ יש ל-AR מקסימום באזור התדירות הטבעית. ככל ש- ξ קטן יותר כן גדל מקסימום זה.

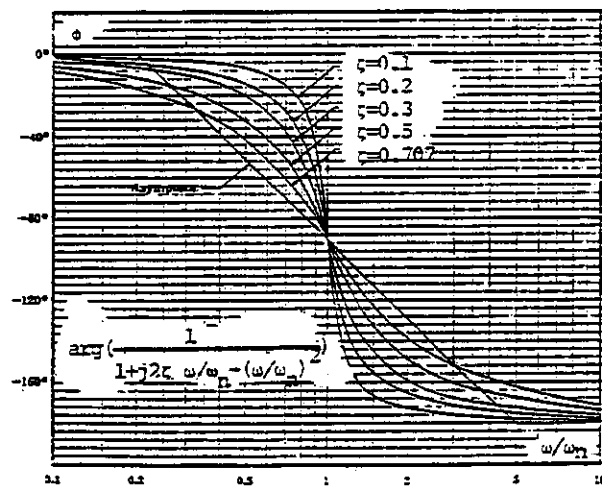
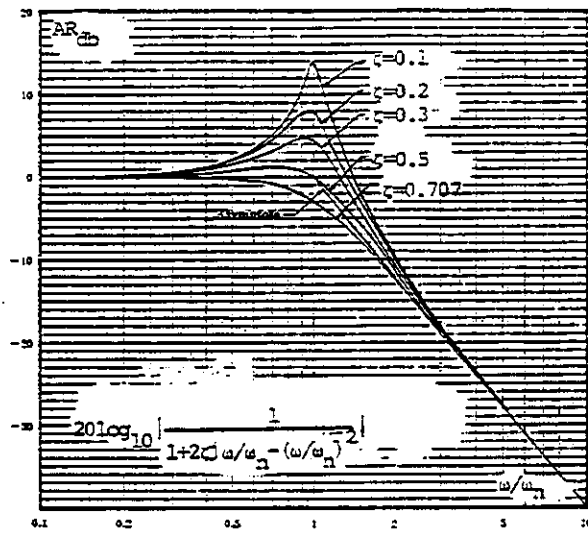
ניתן להראות שמדל המקסימום הזה, AR_{max} , והתדירות בה הוא מתרחש ω_m נתונים על ידי :

ω/ω_n	AR_{db}	ϕ
$\ll 1$	0	0°
$\gg 1$	$-40 \log \omega/\omega_n$	-180°

$$(9.39) \quad AR_{max} = (2\xi\sqrt{1-\xi^2})^{-1}$$

$$(9.40) \quad \omega_m = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}$$

התדירות ω_m נקראת תדירות התהודה. כאשר $\xi \rightarrow 0$ הולך ה- AR_{max} וגדל ללא גבול.



צור 9.6

(9.41) $G(s) = e^{-\theta s}$

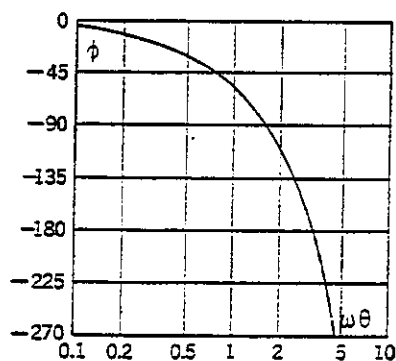
ה. זמן מת (צור 9.7)

קל לראות ש-

$AR_{db} = 0$

$\phi = -\theta\omega$

זוהי הפיגור בתגובת התנדירות של זמן מת גדלה והולכת עם ω ללא גבול.



צור 9.7

$$G(s) = 1 - \tau s \quad (\tau > 0) \quad \text{אפס ב-RHP} \quad 1.$$

$$G(j\omega) = 1 - \tau j\omega$$

לכ ה-AR וה- ϕ יהיו :

$$AR = (1 + \tau^2 \omega^2)^{1/2} ; \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{-\tau \omega}{1} \right)$$

מכאן ברור שתאור בודה של ה-AR הוא בדיוק כמו של $1 + \tau s$ (ציור 9.5) אבל פיגור הפאזה של

$1 - \tau s$ הוא בדיוק כמו של פגור מסדר I (9.29) - ראה ציור 9.3.

9.2.4 חשיבות ויתרון תאור בודה

בתקופתנו, בה הפכו המיקרו מחשבים, בעלי הצגים הגרפיים, לכלי מקובל ונפוץ, ניתן לקבל את תגובת התדירות של כל מערכת על הצג הגרפי באמצעות תכנות מתאים. בשנים עברו, בהן צוירו תגובות התדירות, דנית, היה לתאור בודה יתרון ניכר על פני תאורים אחרים. ראשית, רב התאורים של הפונקציות האלמנטריות, כפי שראינו בסעיפים הקודמים, מתוארים היטב באמצעות קוים ישרים (האסימפטוטות). שנית, מדיעת תאורי בודה של הפונקציות האלמנטריות ניתן, כפי שנראה להלן, לקבל בקלות יחסית את תאור בודה של תגובת התדירות של פונקציות מורכבות.

פונקציות התמסורת שאנו עוסקים בהן ניתנות לפרוק למכפלה של הפונקציות האלמנטריות שנמנו בסעיפים הקודמים, כלומר,

$$(9.42) \quad G(s) = \prod_{i=1}^p C_i(s)$$

כאשר $C_i(s)$ עשויה להיות פגור מסדר ראשון, הגבר, $s^{\pm m}$, פונקציה מסדר שני וכו'.

$G(j\omega)$ המתאים יהיה נתון על ידי :

$$G(j\omega) = \prod_{i=1}^p C_i(j\omega)$$

ולכן :

$$(9.43) \quad AR_{db} = 20 \log \prod_{i=1}^p |C_i(j\omega)| = \sum_{i=1}^p 20 \log |C_i(j\omega)|$$

-1

$$(9.44) \quad \phi = \sum_{i=1}^p \arg(C_i(j\omega))$$

משמעות (9.43) ו-(9.44) היא שעל מנת לקבל את תגובת התדירות של $G(s)$, יש לתאר את תגובות התדירות של המרכיבים, $C_i(s)$, כל אחד בנפרד, ולחברם גרפית.

דוגמא 2: נתונה פונקציית התמסורת $G(s) = 2s / (1+0.5s)(1+s/8)^2$ שרטט דיאגרמת בודה אסימפטוטית עבור ה-AR וה- ϕ בתחום $0.1 < \omega < 100$. מהי סטית הדיאגרמה האסימפטוטית מהערך האמיתי ב- $\omega = 8$! מהו פגור הפאזה המדויק ב- $\omega = 8$! את $G(s)$ נפרק למרכיבים :

$$G(s) = 2 \cdot s \cdot \frac{1}{1+0.5s} \cdot \frac{1}{(1+s/8)^2} = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_4$$

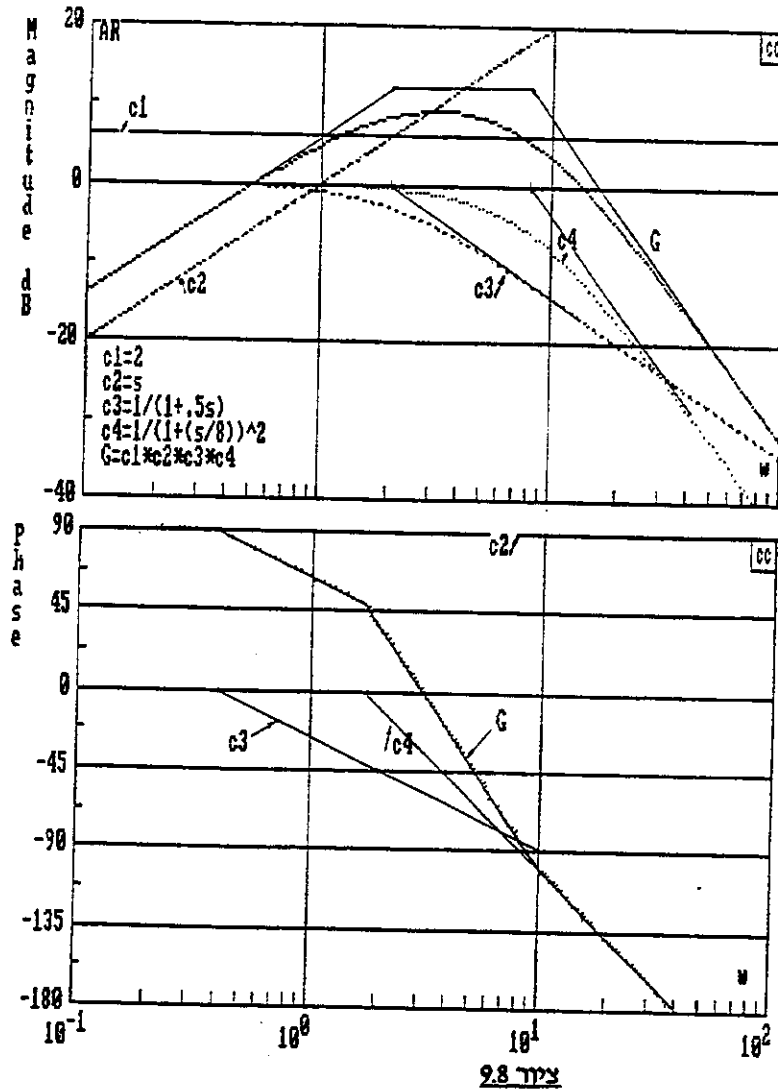
בציור 9.8 צוירו הדיאגרמות של ה-AR וה- ϕ לכל אחד מהמרכיבים C_i . בגרף ה-AR מוצגות גם הדיאגרמות האסימפטוטיות וגם הדיאגרמות ה"מדויקות" (כפי שצוירו על ידי תכנה מתאימה). בגרף ה- ϕ צוירו אך ורק הדיאגרמות האסימפטוטיות. כשמחברים גרפית את דיאגרמות המרכיבים מתקבל תאור בודה של $G(s)$. היות ו- $\omega = 8$ היא תדירות הפינה של $(1+s/8)^2$ וזו רחוקה מתדירות הפינה $\omega = 2$ של $(1+0.5s)^{-1}$ תהיה הסטיה נתונה על ידי $-6\text{db} = 2(-3\text{db})$. התאור האסימפטוטי שבציור נותן ב- $\omega = 8$, $AR \equiv 12\text{db}$ לכן ה-AR המדויק יותר יהיה: $AR = 12 - 6 = 6\text{db}$. לבדיקה נחשב אנליטית את ה-AR ב- $\omega = 8$.

$$AR(\omega = 8) = 20 \log \frac{2 \cdot \omega}{(1 + (0.5\omega)^2)^{1/2} (1 + \omega/8)^2} \Big|_{\omega=8} = 5.76\text{db}$$

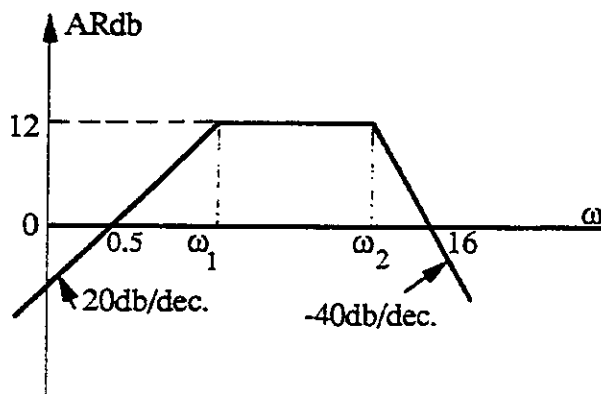
באופן דומה נחשב אנליטית את פגור הפאזה.

$$\phi(\omega = 8) = \arg \frac{j\omega}{(1 + 0.5j\omega)(1 + \frac{j\omega}{8})^2} \Big|_{\omega=8} =$$

$$= 90^\circ - \tan^{-1}(0.5 \cdot 8) - 2 \tan^{-1}(1) = -76^\circ$$



דוגמא 3 : בציר נתונה דיאגרמת בודה אסימפטוטית של יחס האמפליטודות של מערכת מינימום פאזה. מצא את ω_1, ω_2 ואת פונקצית התמסורת של המערכת.
 פתרון : את ω_1 ואת ω_2 נמצא מהקשרים :



$$12 / (\log \omega_1 - \log 1/2) = 20$$

$$12 / (\log \omega_2 - \log 16) = -40$$

ציר (דוגמא 3)

ונקבל: $\omega_1 = 2$ ו- $\omega_2 = 8$

מהגרף ברור ש-

$$G(s) = \frac{ks}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)^2}$$

לכן תדרי הפינה: $\tau_1 = 1/\omega_1 = 1/2$ ו- $\tau_2 = 1/\omega_2 = 1/8$

היות וב- $\omega = 0.5$ $|G(j 0.5)| = 0 \text{ db} = 1$ (מהגרף) והיות וב- $\omega = 0.5$ נקבע הגרף האסימפטוטי על

ידי k ו- s בלבד נקבל: $|G(j 0.5)| = |k \cdot j 0.5| = 1$

מכאן: $k = 2$

ולכן:

$$G(s) = \frac{2s}{(\frac{1}{2}s + 1)(\frac{1}{8}s + 1)^2}$$

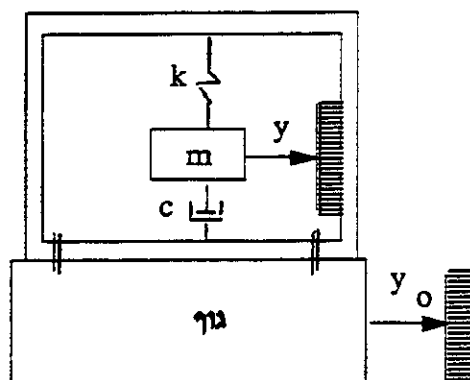
דוגמא 4: רגשים מכניים (בחנית סמסטר תשמ"ז)

בציור מתואר רגש מכני. הרגש מחובר באופן קשיח לגוף. הרגש כולל "בית" סגור ובתוכו מסה m הקשורה לבית הרגש באמצעות קפיץ ומרסן כמוראה בציור.

המיקום הרגעי של המסה יחסית לבית הוא y . המיקום הרגעי של הגוף הוא y_0 .

מסרת הרגש למדוד את תנודות הגוף על ידי הוצאת אות y הפרופורציונלי ל- y_0 , או ל- $\bar{y}_0$. במקרה הראשון

משמש הרגש כמד-העתק ובמקרה השני כמד-תאוצה.



(א) אם מגדירים את הכניסה לרגש כ- y_0 ($u = y_0$) ואת יציאתו כ- y הראה כי פונקצית התמסורת של

הרגש נתנה על ידי:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}}$$

- (ב) אם $u(t) = \bar{y}_0(t)$ מהי פונקציית התמסורת $y(s) / u(s)$?
- (ג) האם הרגש עשוי להיות מערכת לא יציבה ? - נמק.
- (ד) באלו תנאים יש לפונקציית התמסורת של הרגש קטבים ממשיים בלבד ?
בסעיפים הבאים קח $m = 1$, $k = 36$ ו- $c = 2.4$ (היחידות מותאמות).
- (ה) צייר איכותית תאור בודה (אסימפטוטי היכן שאפשר) של יחס האמפליטודות בלבד עבור שתי פונקציות התמסורת שבסעיפים א' ו-ב' וציין על ציורים אלו את האינפורמציה החשובה לדעתך.
- (ו) השתמש בתאורי בודה הנ"ל וענה : אם מטרת הרגש היא להורות סטיה y פרופורציונלית ל- y_0 (הרגש מד העתק) מהו בקרוב תחום התדרים בו ניתן להשתמש בהרגש ? - נמק.
- (ז) שאלה כנ"ל אלא שהרגש משמש כמד-תאוצה (y אמור להיות פרופורציונלי ישר ל- $\ddot{y}_0$).
- (ח) אם הרגש משמש כמד-תאוצה מהו פיגור הפאזה בתגובת התדירות כאשר $\omega = 0$ ו- $\omega = \infty$? כנ"ל כאשר הרגש משמש כמד-העתק.
- (ט) אם תנועת הגוף נתונה על ידי $y_0(t) = \delta(t) + 2\sin(20t)$ מה תהיה הורית מד-ההעתק במצב מתמיד ?

פתרו :

(א) משוואת התנועה :

$$m(\ddot{y} - \ddot{y}_0) + c\dot{y} + ky = 0$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = m\ddot{y}_0$$

או :

לכן פונקציית התמסורת של מד-העתק:

$$G_1(s) = \frac{y(s)}{y_0(s)} = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}}$$

$$u(s) = s^2 y_0(s) \quad \text{ב) אם } u(t) = \ddot{y}_0(t) \text{ אזי :}$$

לכן פונקציית התמסורת של מד-תאוצה :

$$G_2(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2} \frac{y(s)}{y_0(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}}$$

- (א) מכנה פונקציות התמסורת הוא פולינום מסדר שני אשר כל מקדמיו חיוביים ($c > 0$, $m > 0$, $k > 0$)
לכן הרגשים יציבים.

$$(ד) \quad \omega_n \xi = \frac{c}{m} \quad \omega_n = \sqrt{k/m} \quad \text{היות } \quad \text{נקבל:}$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

אם $\xi \geq 1$ (מערכת על מרוסנת) נקבל קטבים ממשיים בלבד. התנאי לכך הוא:

$$\frac{c}{2\sqrt{km}} \geq 1$$

(ה) הצבת הערכים המספריים נותנת:

$$G_1(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2.4s + 36} \quad ; \quad G_2(s) = \frac{1}{s^2 + 2.4s + 36}$$

נרמל התדירות ל- ω_n , דהיינו נסמן $s' = s/\omega_n = s/6$ נקבל:

$$G_1(s') = \frac{s'^2}{s'^2 + 0.4s' + 1} \quad ; \quad G_2(s') = \frac{1/36}{s'^2 + 0.4s' + 1}$$

ותציב $s' = j\omega/\omega_n$.

גרפי בודה של AR עבור G_1 ו- G_2 אסימפטוטיים ומדויקים נתונים בציורים (ראה עמוד הבא). את

הגרף של G_1 מקבלים מחבור AR של מערכת מסדר שני ו-AR של s'^2 (נזרז כפול) והגרף של G_2 הוא AR של מערכת מסדר שני.

(ז-י) תחומי התדרים בהם ניתן להשתמש ברגשים הם התחומים בהם ה-AR המתאים הינו קו-ישר אפקי (AR קבוע).

במד-ההעתק (G_1) התחום הוא בערך $\omega/\omega_n > 3$ או $\omega > 18$.

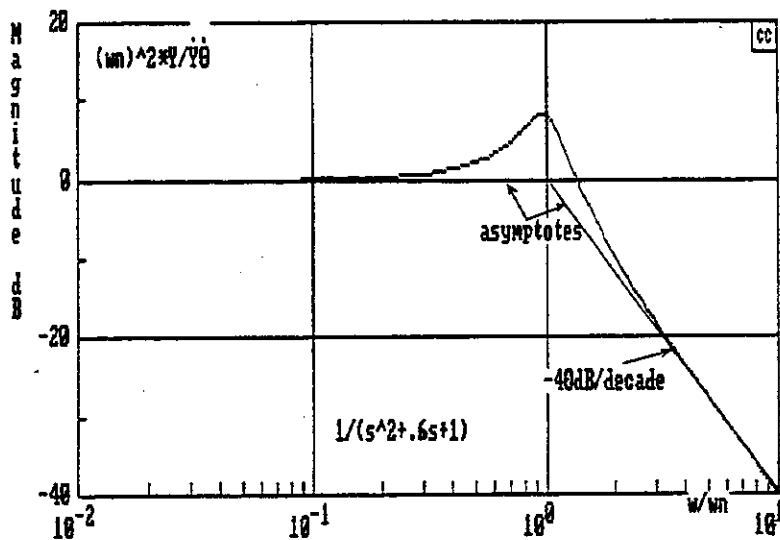
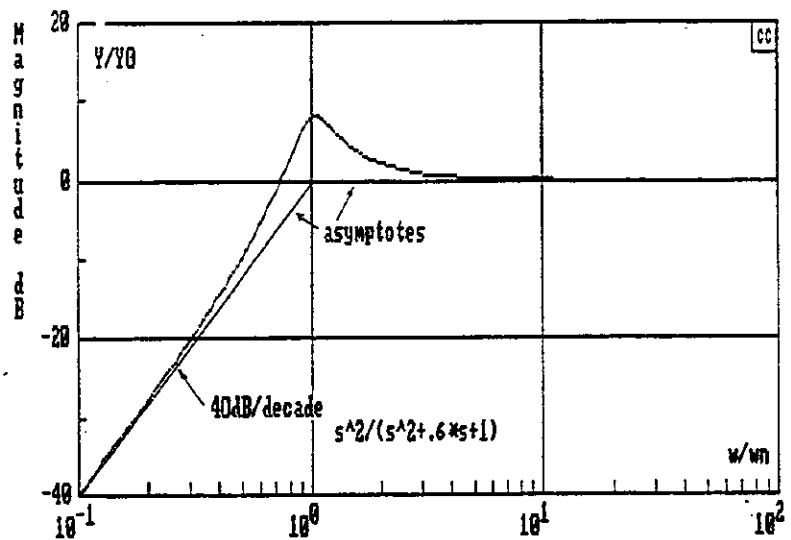
ובמד התאוצה (G_2) התחום הוא בערך $\omega/\omega_n < 0.3$ או $\omega < 1.8$.

$$(ח) \quad \arg G_2(\omega=0) = 0 \quad ; \quad \arg G_2(\omega=\infty) = -180^\circ$$

זאת היות ו- $G_2(s)$ היא מערכת מסדר שני.

$$\arg G_1(\omega=0) = \arg s^2(s=j0) + \arg G_2(\omega=0) = +180^\circ$$

$$\arg G_1(\omega=\infty) = \arg s^2(s=j\infty) + \arg G_2(\omega=\infty) = 180^\circ - 180^\circ = 0^\circ$$



$$u(t) = y_o(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

(ט)

$$u_2(t) = 2 \sin 20t \quad \text{ו-} \quad u_1(t) = \delta(t) \quad \text{כאשר :}$$

את תגובת מד ההעתק לכניסה $u_1(t)$ במצב מתמיד נחשב ממשפט הערך הסופי :

$$y_1(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s y_1(s)$$

והיות ו-

$$y_1(s) = G_1(s) \cdot u_1(s) = G_1(s)$$

נקבל :

$$y_1(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_1(s) = 0$$

תוצאה זו כמובן אפשר היה לכתוב מיד מתוך הגדרת היציבות שכן מד-ההעתק יציב אסימפטוטית ולכן תגובתו להלם דועכת לאפס עם הזמן.

היות ו- $u_2(t)$ הינה כניסה מחזורית נחשב את $y_2(t)$ במצב מתמיד מתוך משפט תגובת התדירות :

$$(y_2)_{ss} = 2 |G_1(j20)| \sin(20t + \arg G_1(j20))$$

$$G_1(j\omega) = \frac{-\omega^2}{36 - \omega^2 + 2.4j\omega} =$$

$$= \frac{\omega^2}{((36 - \omega^2)^2 + (2.4\omega)^2)^{1/2}} \quad \left| \quad 180^\circ - \tan^{-1} \frac{2.4\omega}{36 - \omega^2} \right|$$

עבור $\omega = 20$ נקבל :

$$G_1(j20) = 1.09 \quad \left| \quad 180 - (180 - 7.5) = 1.09 \quad \left| \quad 7.5^\circ \right. \right|$$

ומכאן ש-

$$y_{s.s.}(t) = 0 + 2.18 \sin(20t + 7.5^\circ)$$

9.2.5 תאור פולרי

בתאור זה מתארים את $G(j\omega)$ כמספר קומפלקסי בהצגתו הפולרית, או הקרטזית, כפונקציה של ω

$$(0 \leq \omega < \infty)$$

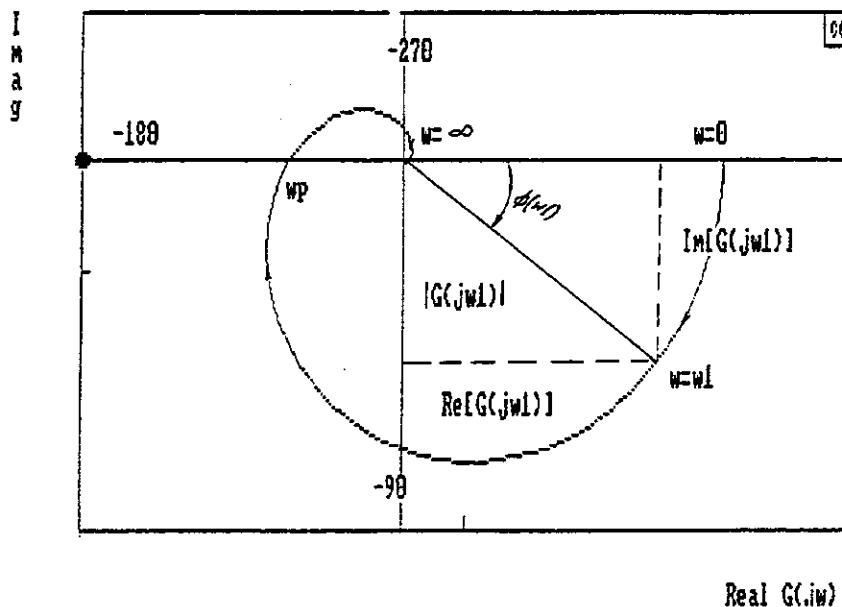
ההצגה הפולרית של $G(j\omega)$ נתונה על ידי :

$$(9.45) \quad G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)} = |G(j\omega)| \angle \arg G(j\omega)$$

$G(j\omega)$ מתואר כוקטור בעל אורך : $AR = |G(j\omega)|$, וזווית $\phi(\omega) = \arg G(j\omega)$ (ראה ציור 9.9).

ההצגה הקרטזית של $G(j\omega)$ נתונה על ידי :

$$(9.46) \quad G(j\omega) = \text{Re}(G(j\omega)) + j \text{Im}(G(j\omega))$$



ציור 9.9

בתאור הפולרי התדירות ω היא פרמטר. כדי לקבל את התאור הפולרי של תגובת התדירות, מחשבים את $G(j\omega)$ לפי (9.45) או (9.46) עבור מספר ערכים של ω , החל מ-0. נקודות אלו מסמנים בגרף ומתברים בקו רציף. נקודות בעלות ענין הן נקודת ההתחלה ($\omega = 0$), נקודת הסיום ($\omega = \infty$) ונקודת החותך עם הציר הממשי ($\omega = \omega_p$). נקודות אלו ניתן בדרך כלל לחשב בקלות יחסית.

9.2.6 דוגמא 5

נצייר סכמטית את התאור הפולרי של תגובת התדירות של הפונקציה :

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)^2}$$

נחשב תחילה את $G(j\omega)$ ב- $\omega = 0$ וב- $\omega = \infty$.

$$G(s)|_{s=0} \equiv \frac{2}{s}|_{s=0} = \infty \quad \underline{-90^\circ}$$

מהנייל ברור שהתאור מתחיל בזווית -90° , ובאמפליטודה (AR) אינסופית. כדי לקבוע האם התאור מתחיל על הציר המדומה או הינו מרוחק ממנו נחשב את $\text{Re}(G(j\omega))$ ב- $\omega = 0$.

$$G(j\omega) = \frac{2}{-2\omega^2 + j\omega(1-\omega^2)} = \frac{-4}{(\omega^2+1)^2} - j \frac{2(1-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)^2}$$

ומכאן :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re}(G(j\omega)) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-4}{(\omega^2+1)^2} = -4$$

ב- $\omega = \infty$ (או $s = \infty$) נקבל :

$$G(s)|_{s \rightarrow \infty} \equiv \frac{2}{s^3} = 0 \quad \underline{-270^\circ}$$

כדי למצוא את ω_p נכתוב את $\phi(\omega)$,

$$\phi(\omega) = \arg G(j\omega) = -90^\circ - 2\tan^{-1}\omega$$

ונשווה ל- -180° . נקבל :

$$2\tan^{-1}\omega_p = 90^\circ$$

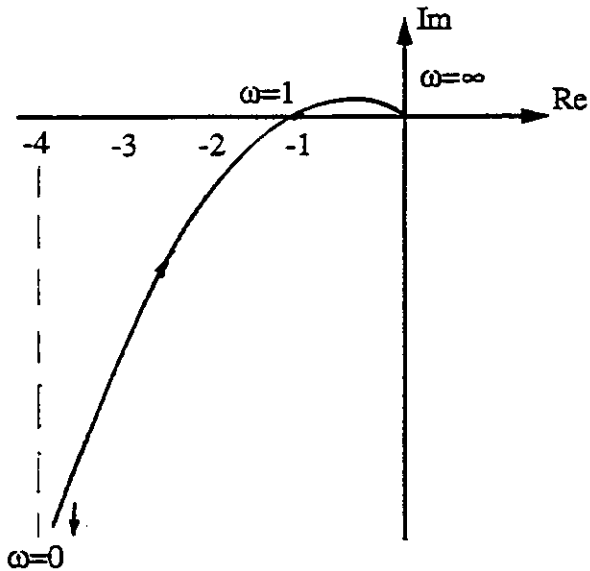
או :

$$\omega_p = \tan 45^\circ = 1$$

ה-AR ב- $\omega_p = \omega$ יהיה לך :

$$|G(j\omega_p)| = 2 / [\omega_p(\omega_p^2 + 1)] = 1$$

מנתנים אלו נוכל לצייר סכמטית את התאור הפולרי (ראה ציור 9.10). במידה ודרוש דיוק טוב יותר מחשבים את $G(j\omega)$ בערכים נוספים של ω .



ציור 9.10 .

9.2.7 הערות:

(1) אם לפונקציית התמסורת q אינטגרטורים דהיינו :

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{s^q \sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad (a_0 \neq 0, b_0 \neq 0)$$

אזי :

$$G(s)|_{s=0} = \frac{b_0}{a_0 s^q} |_{s=0} = \infty \quad \underline{-90^\circ q}$$

כלומר התאור הפולרי של $G(j\omega)$ יחל באמפליטודה אינסופית ובזווית $-90^\circ q$.

(2) אם למערכת n קטבים ו- m אפסים ($n > m$), נקבל ב- $s \rightarrow \infty$:

$$G(s)|_{s \rightarrow \infty} = \frac{1}{s^{n-m}} |_{s \rightarrow \infty} = 0 \quad \underline{-(n-m)90^\circ}$$

כלומר התאור הפולרי של $G(j\omega)$ מסתיים בראשית (אמפליטודה 0) ו"יכנס" לראשית בזווית של $90^\circ - (n-m)$.

9.3 מערכות בדידות

תהיה מערכת SISO בדידה נתונה על ידי פונקציה התמסורת $G(z)$, (8.20).

9.3.1 משפט תגובת התדירות: באם המערכת יציבה אסימפטוטית אזי הכניסה:

$$u(nT) = a \sin(n\omega T)$$

מוררת במצב מתמיד את היציאה:

$$(9.47) \quad y_{ss}(nT) = |G(e^{j\omega T})| \sin(n\omega T + \phi(\omega T))$$

כאשר:

$$(9.48) \quad \phi(\omega T) = \arg G(e^{j\omega T})$$

הוכחה: ההוכחה אקויליברית להוכחת משפט 9.1.1 במערכות רציפות. נניח כניסה הרמונית (בדידה),

$$u(nT) = ae^{j\omega nT} = a(\cos(n\omega T) + j \sin(n\omega T))$$

$$U(z) = Z u(nT) = az / (z - e^{j\omega T}) \quad \text{אזי,}$$

היציאה המותמרת $Y(z)$ תהיה:

$$(9.49) \quad Y(z) = G(z)U(z) = G(z) \cdot az / (z - e^{j\omega T})$$

את (9.49) נפרק לשברים חלקיים:

$$y(nT) = Z^{-1} \left[\frac{\alpha z}{z - e^{j\omega T}} + \sum \frac{\beta_i z}{z - p_i} \right]$$

כאשר p_i הם קטבי $G(z)$ ולפי ההנחה $|p_i| < 1$ (i = 1,...,n). מכאן ש-

$$(9.50) \quad y_{ss}(nT) = Z^{-1} \left[\frac{\alpha z}{z - e^{j\omega T}} \right] = \alpha e^{j\omega nT}$$

כאשר:

$$(9.51) \quad \alpha = Y(z) \cdot \frac{z - e^{j\omega T}}{z} \Big|_{z=e^{j\omega T}} = aG(e^{j\omega T}) = |G(e^{j\omega T})| \cdot e^{j\phi(\omega T)}$$

ו- $\phi(\omega T)$ נתון על ידי:

$$\phi(\omega T) = \arg G(e^{j\omega T}) = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im} G(e^{j\omega T})}{\operatorname{Re} G(e^{j\omega T})}$$

הצבת (9.51) ב-(9.50) תתן את (9.47).

9.32 מסקנות

1. כדי לקבל את תגובת התדירות של מערכת בדידה נציב בפונקציית התמסורת $G(z)$, במקום $z = e^{j\omega T}$.
יחס האמפליטודות AR יהיה אז,

$$(9.52) \quad AR = |G(e^{j\omega T})|$$

והזזת הפאזה,

$$(9.53) \quad \phi = \arg G(e^{j\omega T})$$

2. היות והמספר הקומפלקסי $G(e^{j\omega T})$ הינו מחזורי בתדירות

$$(9.54) \quad \omega_s = 2\pi/T$$

כאשר ω_s היא תדירות הדגימה, מספיק לתאר את תגובת התדירות בתחום:

$$(9.55) \quad 0 \leq \omega \leq \omega_s$$

דוגמא 6: נמצא את תגובת התדירות של $G(z) = z/(z-0.9)$. לשם כך נציב $z = e^{j\omega T}$ ונקבל:

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - 0.9} = \frac{e^{j\omega T}}{\cos \omega T - 0.9 + j \sin \omega T}$$

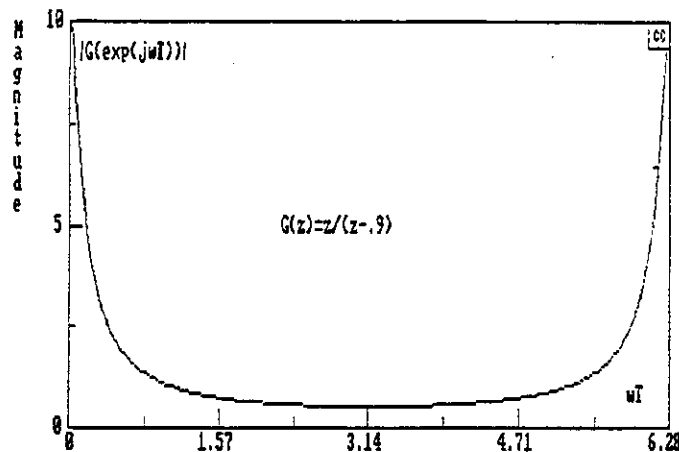
ה-AR יהיה,

$$\begin{aligned} AR(\omega T) = |G(e^{j\omega T})| &= \frac{1}{((\cos \omega T - 0.9)^2 + \sin^2 \omega T)^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{(1.81 - 1.8 \cos \omega T)^{1/2}} \end{aligned}$$

והסחת הפאזה תהיה:

$$\phi(\omega T) = \arg G(e^{j\omega T}) = \omega T - \tan^{-1} \left[\frac{\sin \omega T}{\cos \omega T - 0.9} \right]$$

ה-AR בתחום $0 \leq \omega T \leq 2\pi$ ניתן בציר 9.11.



ציור 9.11

9.3.3 שימוש בתאור בודה למערכות בדידות.

עקב האקספוננט $e^{j\omega T}$ לא ניתן להשתמש ישירות בתאור האסימפטוטי של בודה לתאור תגובת התדירות של מערכות בדידות. על קושי זה ניתן להתגבר באמצעות ההתמרה הביליניארית. נשתמש בהתמרה הביליניארית הבאה: (ראה 8.2.3):

$$(9.56) \quad z = \frac{1+w}{1-w} \quad (w = \frac{z-1}{z+1})$$

ההתמרה (9.56), כזכור, מעתיקה את פנים מעגל היחידה במשור z ל-LHP במשור w , ואת מעגל היחידה, $z = e^{j\omega T}$, במשור z לציור המדומה jv במשור w . אי לכך, במקום לתאר את תגובת התדירות של המערכת הבדידה כפתקציה של התדירות ω נתאר את תגובת התדירות כפתקציה של התדירות ה"פיקטיבית", v . את הקשר בין ω ל- v נמצא מהשוויון:

$$(9.57) \quad e^{j\omega T} = \frac{1+jv}{1-jv}$$

משויון הארגומנטים של שני המספרים הקומפלקסיים שב-(9.57) נקבל:

$$\omega T = \tan^{-1}v - (-\tan^{-1}v) = 2 \tan^{-1}v$$

ומכאן

$$(9.58) \quad \omega T = 2 \tan^{-1}v$$

$$(9.59) \quad v = \tan \frac{\omega T}{2}$$

או:

כאשר $\omega = 0$ יהיה $v = 0$,

וכאשר $\omega T = \pi$ יהיה $v \rightarrow \infty$.

לסיכום, על מנת לתאר את תגובת התדירות של מערכת בדידה, תוך ניצול תאור בודה, נתמיר את $G(z)$ באמצעות (9.56) ונקבל $G(w)$. ב- $G(w)$ נציב $w = jv$ ונחשב:

$$AR = |G(w = jv)|$$

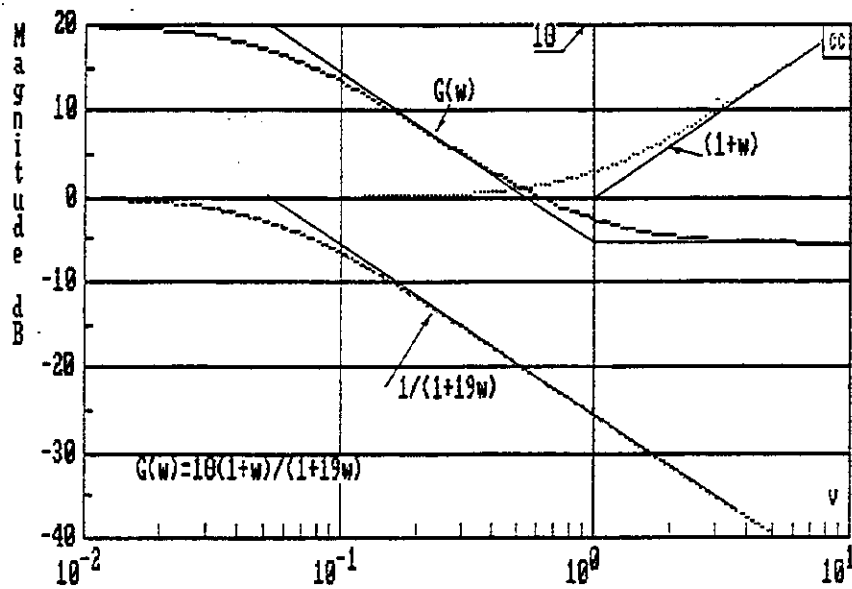
$$\phi = \arg [G(w = jv)]$$

כאשר הקשר בין התדירות האמיתית והתדירות המדומה v נתון ב-(9.58).

דוגמא 7: נפתור את דוגמא 6 באמצעות תאור בודה אסימפטוטי. לצורך זה נציב ב- $G(z)$ את (9.56).

$$G(w) = \left(\frac{1+w}{1-w} \right) / \left(\frac{1+w}{1-w} - 0.9 \right) = \frac{10(1+w)}{1+19w}$$

על $G(w)$ ניתן עתה להפעיל את התאור האסימפטוטי של בודה. בציר 9.12 מוצג תאור בודה של ה- AR בלבד. בציר מוצגים גם התאורים האסימפטוטיים וגם התאורים המדויקים של כל מרכיב של $G(w)$ ושל $G(w)$.



ציר 9.12

אם נרצה לדעת, למשל, מה ה- AR ב- $\omega T = \pi/2$, נמצא ה- v המתאים מ-(9.59).

$$v = \tan \pi/4 = 1$$

ומהגרף שבציר 9.12 נמצא את ה- $AR(v=1) \equiv |G(w=jv)|_{v=1} \equiv -6 \text{ dB}$. מהתאור האסימפטוטי מקבלים -6 dB. מהתאור המדויק יותר מקבלים -3 dB בערך. ההפרש נובע כמובן מהעובדה ש- $v=1$ היא תדירות הפינה של $1+w$ ושם התאור המדויק הוא בערך -3 dB.

נחשב עתה אנליטית את $AR(v=1)$ בשתי דרכים :

$$AR(v=1) = |G(w=jv)|_{v=1} = \left| \frac{10(j+1)}{1+j19} \right| = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{1+19^2}} = 0.74 = -2.58\text{db}$$

או ישירות כדלקמן :

$$\begin{aligned} AR(\omega T = \pi/2) &= |G(e^{j\omega T})|_{\omega T = \pi/2} = \frac{1}{(1.81 - 1.8 \cos \omega T)^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{1.81^{1/2}} = 0.74 \end{aligned}$$

9.3.4 מערכות מינימום פאזה (מערכות ברות-הפיכה)

בדומה למערכות רציפות תקרא מערכת בדידה (בעלת פונקציית תמסורת רציונלית) מינימום פאזה (או ברת-הפיכה) אם כל קטביה ב- z OUD וכל אפסיה ב- z CUD. מערכת בדידה לה אפס אחד או יותר מחוץ ל- z UD-תקרא לא-מינימום פאזה. אם $G(z)$ נתונה על ידי :

$$G(z) = k \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} \quad (9.60)$$

וכל אפסיה, z_i ב- z CUD, פרט ל- $z = z_q$ הנמצא מחוץ ל- z UD ניתן לכתוב את $G(z)$ בצורה :

$$G(z) = G_1(z) \frac{\frac{1}{z} - z_q}{z - z_q} \quad (9.61)$$

$G_1(z)$ היא מינימום פאזה המקיימת :

$$|G_1(e^{j\omega T})| = |G(e^{j\omega T})| \quad \forall \omega \geq 0 \quad (9.62)$$

שכן קל להראות כי (הוכח זאת)

$$\left| \frac{\frac{1}{z} - z_q}{z - z_q} \right|_{z=e^{j\omega T}} = 1 \quad \forall \omega \geq 0 \quad (9.63)$$

דוגמא 8 :

נתונה : $G(z) = \frac{z-2}{z-1/2}$. מצא $\bar{G}(z)$ מינימום פאזה המקיימת :

$$|\bar{G}(e^{j\omega T})| = |G(e^{j\omega T})| \quad \forall \omega \geq 0 \quad (9.64)$$

פתרון : לפי (9.61) נקבל :

$$\bar{G}(z) = G(z) \cdot \frac{\frac{1}{z} - 2}{z - 2} = \frac{\frac{1}{z} - 2}{z - 1/2} = -\frac{2}{z}$$

נביח כי $\bar{G}(z)$ הי"ל מקימת את (9.64) :

$$|G(e^{j\omega T})| = \left| \frac{e^{j\omega T} - 2}{e^{j\omega T} - 1/2} \right| = \left| \frac{\cos \omega T - 2 + j \sin \omega T}{\cos \omega T - 1/2 + j \sin \omega T} \right| = 2 \frac{\sqrt{5 - 4 \cos \omega T}}{\sqrt{5 - 4 \cos \omega T}} = 2$$

$$|\bar{G}(e^{j\omega T})| = \left| -\frac{2}{e^{j\omega T}} \right| = 2$$

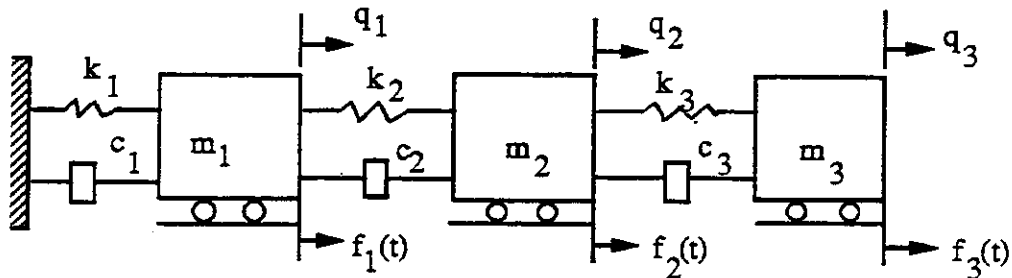
פרק 10 : אנליזה מודלית - מושגים בתורת הרטט

10.1 מבוא

במרחב המצב מושתת הטיפול במערכות רציפות על הצגתן באמצעות משוואות דפרנציאליות מסדר ראשון (הנקראות משוואות המצב). במערכות מכניות מתקבלות באופן טבעי משוואות תנועה מסדר שני. הטיפול במערכות אלו ישירות עם משוואות מסדר שני מקובל בתורת הרטט. מטרת פרק זה לשמש מבוא לכלים ולמושגים המקובלים בתורת הרטט.

10.2 דוגמת מבוא - מערכת מכנית עם שלוש דרגות חופש

בציור 10.1 מתוארת מערכת מכנית קוית עם 3 דרגות חופש (דרגת חופש היא קואורדינטה בלתי תלויה הדרושה לתאור המערכת).



ציור 10.1

$q_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) - הן הקואורדינטות המוכללות ובמקרה זה מתארות את המיקום הרגעי של המסות

m_i . $f_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) - הם הכוחות החיצוניים המופעלים על המסות m_i .

משוואות התנועה נתונות על ידי שלוש משוואות מסדר שני ב- q_i .

$$m_1 \ddot{q}_1 + (c_1 + c_2) \dot{q}_1 - c_2 \dot{q}_2 + (k_1 + k_2) q_1 - k_2 q_2 = f_1(t)$$

$$m_2 \ddot{q}_2 - c_2 \dot{q}_1 + (c_2 + c_3) \dot{q}_2 - c_3 \dot{q}_3 - k_2 q_1 + (k_2 + k_3) q_2 - k_3 q_3 = f_2(t)$$

$$m_3 \ddot{q}_3 - c_3 \dot{q}_2 + c_3 \dot{q}_3 - k_3 q_2 + k_3 q_3 = f_3(t) \quad (10.1)$$

את (10.1) ניתן לכתוב על ידי משוואה מטריצית בצורה:

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q = F \quad (10.2)$$

כאשר:

$$q \triangleq \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} ; \quad F \triangleq \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & m_2 & \\ 0 & & m_3 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}$$

(10.3)

q - וקטור הקואורדינטות המוכללות

F - וקטור הכוחות המוכללים

M - מטריצת המסה

C - מטריצת הדמיון

K - מטריצת הקשיחות

10.3 תכונות M ו- K

עבור מערכת עם n דרגות חופש יהיה q ממימד n ומימדי המטריצות C, M ו- K יהיו $n \times n$. מהדוגמא ב-10.2 ניתן לראות כי:

$$(10.4) \quad M = M^T \quad C = C^T \quad K = K^T$$

דהיינו M, C ו- K מטריצות סימטריות. יתרה מכך, המטריצה M התקבלה כמטריצה אלכסונית. השאלה הנשאלת היא מה ניתן לאמר באופן כללי על תכונות M, C ו- K . היות ונתרכז בהמשך במערכות לא מרוסנות בהן $C = 0$ נסקור את תכונות מטריצת המסה ומטריצת הקשיחות.

10.3.1 מטריצת המסה M עשויה להתקבל כמטריצה לא אלכסונית בבחירה אחרת של וקטור הקואורדינטות המוכללות אך תמיד ניתן לבחור וקטור q כך ש- M תהיה:

א. סמטרית וממשית

ב. חיובית לחלוטין (p.d. - positive definite)

10.3.2 מטריצת הקשיחות K תהיה :

א. סמטרית וממשית

ב. חיובית לחלוטין באופן חלקי (positive semi-definite - p.s.d.)

10.3.3 הערות :

(1) את תכונות ב' ב-10.3.1 וב-10.3.2 ניתן להראות משיקולי אנרגיה.

(2) משמעות תכונה ב' ב-10.3.1 היא ש- M^{-1} קימת תמיד.

10.4 ע"ע-ים וז"ע-ים במערכת חפשית לא מרוסנת

10.4.1 נתרכז במערכות לא מרוסנות. במקרים אלו משואת התנועה (10.2) תהיה:

$$(10.5) \quad M\ddot{q} + Kq = F$$

ובאם מדובר במערכת החופשית תרד (10.5) ל:

$$(10.6) \quad M\ddot{q} + Kq = 0$$

בהנחת תנאי התחלה 0 נקבל מהתמרת לפלס של (10.6)

$$(10.7) \quad (Ms^2 + K)q(s) = 0$$

10.4.2 המשואה האפיינית של (10.7) תהיה לכן:

$$(10.8) \quad \Delta(s^2) = |Ms^2 + K| = 0$$

אם כופלים את (10.8) משמאל ב- $|M^{-1}|$ נקבל:

$$(10.9) \quad |M^{-1}| |Ms^2 + K| = |Is^2 + M^{-1}K| = 0$$

ומכאן שאת המשואה האפיינית של (10.6) ניתן לכתוב גם בצורה:

$$(10.10) \quad |Is^2 + \Omega| = 0$$

כאשר:

$$(10.11) \quad \Omega \triangleq M^{-1}K$$

10.4.3 משפט (אלגברה ליניארית): אם ל- $M_{n \times n}$ ו- $K_{n \times n}$ התכונות 10.3.1 ו-10.3.2 אזי הפתרונות

$((s^2)_i, i = 1, 2, \dots, n)$ של (10.8) ו-(10.10) כולם ממשיים ולא חיוביים.

אם מציבים לכן ב-(10.8) וב-(10.10) $s^2 = (j\omega)^2 = -\omega^2$ נקבל את המשואות האפייניות:

$$(10.12) \quad |M\omega^2 - K| = 0$$

$$(10.13) \quad |I\omega^2 - \Omega| = 0$$

בהתאמה. ולפי המשפט, הפתרונות של (10.12) ו-(10.13) מקימים:

$$(10.14) \quad \omega_i^2 \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

10.4.4 הערה: לעיתים קרובות נוהגים לסמן $\omega^2 = \lambda$ ואז משוואות (10.12) ו-(10.13) תכתבנה בצורה:

$$(10.12)' \quad |M\lambda - K| = 0$$

$$(10.13)' \quad |I\lambda - \Omega| = 0$$

10.4.5 הפתרונות λ_i של (10.12) ו-(10.13) (או לחילופין הפתרונות ω_i^2 של (10.12) ושל (10.13)) נקראים

הערכים העצמיים (עיי-ע) של המערכת (10.6).

10.4.6 הוקטורים v^i ($i = 1, \dots, n$) ($\|v^i\| \neq 0$) המקיימים את :

$$(10.15) \quad (\lambda_i I - \Omega) v^i = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

נקראים הוקטורים העצמיים (עיי-ע) או הוקטורים המודליים והמטריצה V אשר עמודותיה הם v^i נקראת המטריצה המודלית.

הערה: יש לזכור שהפתרונות v^i של (10.15) נקבעים רק בכוונם ולא בגודלם המוחלט. אם v^i הינו וייע אזי גם αv^i הינו וייע כאשר α קבוע ו- $\alpha \neq 0$.

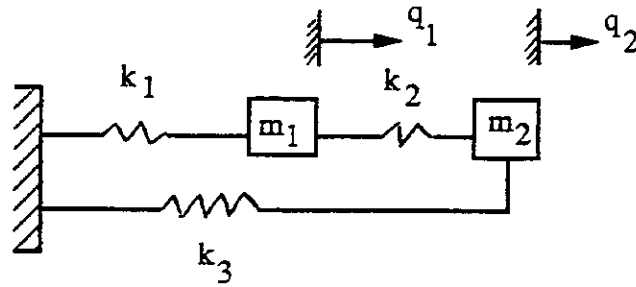
10.4.7 השרשים החיוביים ω_i של העיי-עים (λ_i או ω_i^2) נקראים בשם התדירויות הטבעיות של המערכת

(10.6) ומ-(10.14) ברור כי כל התדירויות הטבעיות ממשיות ולא שליליות.

10.4.8 דוגמא: מערכת חפשית לא מרוסנת בעלת שתי דרגות חופש נתונה בציר 10.2.

$$\text{נתון כי: } k_1 = k_2 = k_3 = k$$

$$\text{וכי: } m_1 = m; m_2 = 2m$$



ציור 10.2

משוואות התנועה של המערכת נתונות על ידי:

$$M\ddot{q} + Kq = 0$$

כאשר:

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}$$

המשוואה האופמית לפי (10.12) - (10.13) מביאה ל-

$$\Delta(\omega^2) = \omega^4 - 3 \frac{k}{m} \omega^2 + \frac{3}{2} \frac{k^2}{m^2} = 0$$

מכאן שהעצמים של המערכת נתונים על ידי:

$$\lambda_{1,2} = (\omega^2)_{1,2} = \frac{3}{2} (1 \pm 1/\sqrt{3}) \frac{k}{m}$$

והתדירויות הטבעיות תהיינה לכן,

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = 0.7962 \sqrt{k/m}; \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1.5382 \sqrt{k/m}$$

את הווקטורים נמצא מתוך (10.15) על ידי מטריצת ה-Adjoint של $(\lambda I - \Omega)$ כפי שעשינו בפרק 2.

$$\text{Adj}(\lambda I - \Omega) = \text{Adj}(\lambda I - M^{-1}K) =$$

$$= \text{Adj} \left(\lambda I - \begin{bmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{2m} & \frac{k}{m} \end{bmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{2m} & \lambda - \frac{2k}{m} \end{pmatrix}$$

הצבת λ_1 ו- λ_2 בנייל מביאה ל-

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.366 \end{pmatrix}; \quad v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.366 \end{pmatrix}$$

והמטריצה המודלית:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.366 & -0.366 \end{pmatrix}$$

10.5 טרנספורמציה לקואורדינטות טבעיות.

10.5.1 n המשוואות מסדר שני המתוארות ב-(10.5) או ב-(10.6) הינן משוואות מצומדות. על מנת להקל על הפתרון של מערכות אלו מבצעים טרנספורמציה מהקואורדינטות המוכללות, q , לקואורדינטות טבעיות (או קואורדינטות ראשיות), η , בהן המשוואות אינן מצומדות.

10.5.2 משפט (אלגברה ליניארית):

1) עבור $M_{n \times n}$ ו- $K_{n \times n}$ בעלות תכונות 10.3.1 ו-10.3.2 בהתאמה קימת מטריצה לא סינגולרית $\bar{V}_{n \times n}$ כך ש:

$$(10.16) \quad \bar{V}^T K \bar{V} = W^2$$

$$(10.17) \quad \bar{V}^T M \bar{V} = I$$

כאשר:

$$W^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \omega_2^2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \omega_n^2 \end{pmatrix}$$

ו- ω_i הן התדירויות הטבעיות של המערכת.

2) העמדות $\bar{v}^i$ של $\bar{V}$ הינן הויע v^i של Ω (ראה (10.15)) מנורמלות כך ש-(10.17) תקיים. במילים אחרות: $\bar{V}$ הינה מטריצה מחלית המנורמלת לפי (10.17).

10.5.3 מהמשפט נובע כי ניתן ללכסן בו זמנית את המטריצות M ו- K כך ש- M תעבור למטריצת היחידה

על ידי המטריצה המודלית המנורמלת $\bar{V}$. הקשר בין v^i (עמדות V) ו- $\bar{v}^i$ נתון על ידי:

$$(10.19) \quad \bar{v}^i = \alpha_i v^i \quad i = 1, \dots, n$$

כאשר α_i קבועים הנקבעים מ-(10.17). דהיינו:

$$(10.20) \quad (\bar{v}^i)^T M (\bar{v}^i) = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

או:

$$(10.21) \quad (\alpha_i v^i)^T M (\alpha_i v^i) = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

10.5.4 דוגמא (המשך דוגמא 10.4.8).

בדוגמא 10.4.8 מצאנו את המטריצה המודלית V של המערכת. נמצא כעת את המטריצה המודלית

המנומלת $\bar{V}$.

נשתמש ב-(10.21) למציאת α_i ($i = 1, 2$).

$$(\alpha_1 v^1)^T M (\alpha_1 v^1) = (\alpha_1 \quad 1.366\alpha_1) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 1.366\alpha_1 \end{pmatrix} = 4.7320m\alpha_1^2 = 1$$

$$\alpha_1 = 0.4597m^{-1/2} \quad \text{ומכאן:}$$

$$\alpha_2 = 0.8881m^{-1/2} \quad \text{בצורה דומה נקבל:}$$

ולכן:

$$\bar{V} = m^{-1/2} \begin{pmatrix} 0.4597 & 0.8881 \\ 0.6280 & -0.3251 \end{pmatrix}$$

10.5.5 נפעיל כעת את הסטרנספורמציה :

$$(10.22) \quad q = \bar{V}\eta$$

על משוואה (10.6) ונקבל:

$$(10.23) \quad \bar{V}^T M \bar{V} \ddot{\eta} + \bar{V}^T K \bar{V} \eta = 0$$

או:

$$(10.24) \quad I \ddot{\eta} + W^2 \eta = 0$$

במשוואה (10.24) משוואות התנועה אינן מצומדות. המשוואה ה- i ב-(10.24) תהיה:

$$(10.25) \quad \ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = 0$$

הקואורדינטות $\eta_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) נקראות קואורדינטות טבעיות או קואורדינטות ראשיות.

10.6 תגובת המערכת לתנאי התחלה.

10.6.1 תהליך פתרון משוואות התנועה של מערכות רוטטות על ידי הצגתן בקואורדינטות הטבעיות באמצעות

המטריצה המודלית המנומלת $\bar{V}$ נקרא אנליזה מודלית.

10.6.2 פתרון (10.24) נתון על ידי:

$$(10.26) \quad \eta_i(t) = a_i \cos(\omega_i t - \phi_i) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

כאשר :

ω_i - הינה התדירות הטבעית ה-i-ית.

a_i - אמפליטודת הקואורדינטה הטבעית ה-i-ית.

ϕ_i - זווית הפאזה של הקואורדינטה הטבעית ה-i-ית.

a_i ו- ϕ_i תלויים בתנאי ההתחלה.

10.6.3 על ידי שמוש ב-(10.22) נקבל את הפתרון בקואורדינטות המוכללות

$$(10.26) \quad q(t) = \bar{V}\eta(t) = (\bar{v}^1, \bar{v}^2, \dots, \bar{v}^n)\eta(t) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{v}^i \cos(\omega_i t - \phi_i)$$

$\bar{v}^i \cos(\omega_i t - \phi_i)$ נקרא מוד (אופן-תנועה). מ-(10.26) רואים כי ריטוט של מערכת חפשית רבת דרגות חופש הינו סכום משוקלל של תנועות הרמוניות בתדירות ω_i לאורך הוקטורים המודליים $\bar{v}^i$.

10.6.4 תאור גרפי של מודים

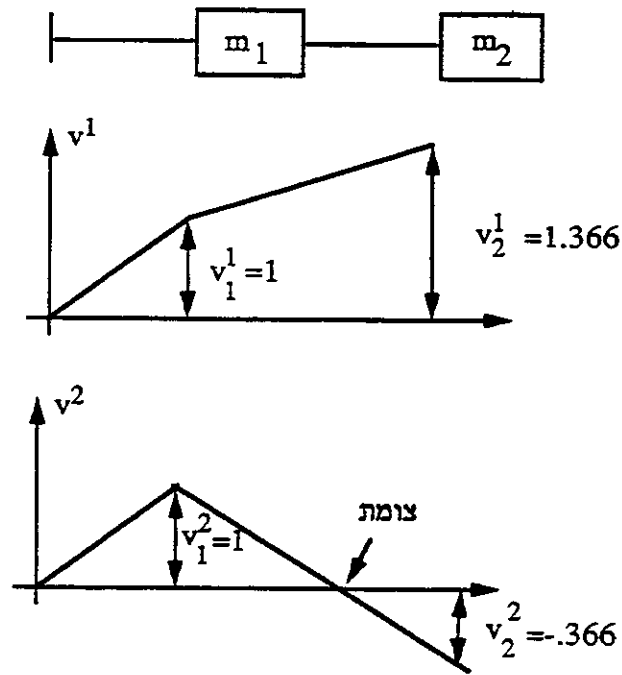
את הוקטורים המודליים $\bar{v}^i$ נוהגים לצייר בתורת הרטט כמוראה בציור 10.3 עבור המקרה של שתי דרגות חופש.

דוגמא: בדוגמא 10.4.8 מצאנו את המטריצה המודלית V של מערכת בת שתי דרגות חופש:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.366 & -0.366 \end{pmatrix}$$

התאור הגרפי בציור 10.3 מתאים איכותית למקרה זה.

בוקטור $\bar{v}^2$ שבציור 10.3 יש שני סימן. פרוש הדבר שבנקודה מסוימת בין המסות m_1 ו- m_2 ההעתק הוא 0. נקודה כזו נקראת צומת (node).



ציור 10.3

10.65 מציאת a_i ו- ϕ_i מתנאי ההתחלה

אם נתונים תנאי ההתחלה של המערכת (10.6), כלומר נתונים $q(0)$ ו- $\dot{q}(0)$, נקבל מ-(10.26)

$$(10.27) \quad q(0) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{v}^i \cos \phi_i$$

ו-

$$(10.28) \quad \dot{q}(0) = \sum_{i=1}^n a_i \omega_i \bar{v}^i \sin \phi_i$$

מ-(10.17) ברור כי :

$$(10.29) \quad (\bar{v}^j)^T M \bar{v}^i = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

אם נכפול לכן את (10.27) ו-(10.28) ב- $(\bar{v}^j)^T M$ משמאל נקבל :

$$(10.30) \quad a_i \cos \phi_i = (\bar{v}^i)^T M q(0)$$

$$(10.31) \quad a_i \sin \phi_i = \frac{1}{\omega_i} (\bar{v}^i)^T M \dot{q}(0)$$

הוצבת (10.30) ו-(10.31) בתוך (10.26) לתנאי התחלה:

$$q(t) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{v}^i (\cos(\omega_i t) \cos \phi_i + \sin(\omega_i t) \sin \phi_i)$$

$$(10.32) \quad q(t) = \sum_{i=1}^n (\bar{v}^i)^T M [q(0) \cos(\omega_i t) + \frac{1}{\omega_i} \dot{q}(0) \sin(\omega_i t)] \bar{v}^i$$

10.6.6 מקרה פרטי

אם תנאי ההתחלה הם בכיוון אחד הוקטורים המודלים דהיינו אם $\dot{q}(0) = 0$ ו-

$$(10.33) \quad q(0) = q_0 \bar{v}^j$$

כאשר q_0 קבוע

נקבל מ-(10.32) ושימוש ב-(10.29)

$$(10.34) \quad q(t) = q_0 \bar{v}^j \cos(\omega_j t)$$

כלומר במקרה זה יעורר רק המוד j .

10.6.7 דוגמא (המשך דוגמא 10.4.8 ו-10.5.4)

נתון כי:

$$q(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \dot{q}(0) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נמצא תגובת המערכת עם שתי דרגות החופש. את $\bar{v}^i$ ו- ω_i מצאנו בסעיפים 10.4.8 ו-10.5.4.

נחשב:

$$\frac{1}{\omega_1} (\bar{v}^1)^T M \dot{q}(0) = 0.5774 \frac{mv_0}{\sqrt{K}}$$

$$\frac{1}{\omega_2} (\bar{v}^2)^T M \dot{q}(0) = 0.5774 \frac{mv_0}{\sqrt{K}}$$

הצבת הנייל ב-(10.32) מביאה ל-

$$q(t) = 0.5774 \frac{mv_0}{\sqrt{K}} \left[\sin\left(0.7962 \sqrt{\frac{K}{m}} t\right) \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 0.4597 \\ 0.6277 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \sin\left(1.5382 \sqrt{\frac{K}{m}} t\right) \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 0.8881 \\ -0.3251 \end{pmatrix} \right]$$

או:

$$q(t) = \sqrt{\frac{m}{K}} v_o \left\{ \begin{pmatrix} 0.2654 \\ 0.3626 \end{pmatrix} \sin \left(0.7962 \sqrt{\frac{K}{m}} t \right) + \begin{pmatrix} 0.5127 \\ -0.1887 \end{pmatrix} \sin \left(1.5382 \sqrt{\frac{K}{m}} t \right) \right\}$$

10.7 הצגת מערכות רוטטות במרחב המצב

10.7.1 ניתן כמובן לתאר ולפתור מערכות רוטטות בכלים שפיתחנו במרחב המצב. ניתן לעשות זאת ישירות

מתוך משוואות התנועה הנתונות ב-(10.2) על ידי הגדרת וקטור המצב בדרך הבאה:

$$x \triangleq \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} \quad (10.35)$$

כאשר $x \in R^{2n}$ אם $q \in R^n$.

הצגת (10.2) באמצעות (10.35) נתן:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} = \begin{matrix} n & n & n \\ \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} \end{matrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}F \end{pmatrix} \quad (10.36)$$

A

ועבור מערכת שאינה מרוסנת ($C=0$) נקבל:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}F \end{pmatrix} \quad (10.37)$$

A

את (10.36) ו-(10.37) המתארים מערכות רוטטות במרחב המצב ניתן לנתח ולפתור בכלים של מרחב

המצב.

הערות:

(1) מ-10.3.3 ברור כי M^{-1} קיימת תמיד.

2) למטריצות A שב- (10.36) וב- (10.37) $2n$ עיניים. קל להוכיח כי העיניים של A שב- (10.37), המערכת הלא-מרוסנת, נתונים על ידי $\pm j\omega_i$ ($i = 1, \dots, n$) כאשר ω_i היא התדירות הטבעית של

$$\text{המערכת ו- } j = \sqrt{-1}.$$

10.7.2 דוגמא

את המערכת בעלת שתי דרגות חופש שבדוגמא 10.4.8 נציג במרחב המצב לפי (10.35) נקבל,

$$x = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^4$$

ומשוואות המצב המתאימות תהיינה לכך (לפי (10.37)):

$$\dot{x} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -\frac{2K}{m} & \frac{K}{m} & 0 & 0 \\ \frac{K}{2m} & -\frac{K}{m} & 0 & 0 \end{array} \right) x + \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2m} \end{array} \right)$$

10.8 תהודה במערכות רוטטות ללא רסון

10.8.1 נתייחס למערכת הנתונה ב- (10.5). נמצא את מטריצת התמסורת מ- $F(s)$ ל- $q(s)$. לצורך זה נתמיר

התמרת לפלס את (10.5) (עם תנאי התחלה 0) ונקבל:

$$(Ms^2 + K) q(s) = F(s)$$

מכאן ש-

$$(10.38) \quad q(s) = G(s) F(s)$$

כאשר:

$$(10.39) \quad G(s)_{n \times n} = (Ms^2 + K)^{-1} = \frac{\text{Adj}(Ms^2 + K)}{|Ms^2 + K|}$$

פונקציית התמסורת בין הכניסה ה- p , $f_p(s)$, לבין היציאה ה- k , $q_k(s)$, תהיה לכך:

$$(10.40) \quad \frac{q_k(s)}{f_p(s)} = g_{kp}(s) = \frac{[\text{Adj}(Ms^2 + K)]_{kp}}{|Ms^2 + K|}$$

10.8.2 ממשפט תגובת התדירות (ראה פרק 9 סעיף 9.1.1) אנו יודעים כי אם $f_p(t) = A \sin \omega t$ אזי $q_k(t)$

במצב מתמיד יהיה נתון על ידי:

$$q_k(t) = A |g_{kp}(j\omega)| \sin(\omega t + \arg(g_{kp}(j\omega))) \quad (10.41)$$

משפט (תהודה): באם התדירות ω של האילוף החיצוני $f_p(t)$ שווה לאחת מהתדירות הטבעיות,

ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$), של המערכת אזי:

$$|g_{kp}(j\omega)|_{\omega \rightarrow \omega_i} \rightarrow \infty.$$

הוכחה: $q_{kp}(j\omega)$ נתונה על ידי:

$$g_{kp}(j\omega) = \frac{\text{Adj}[-M\omega^2 + K]_{kp}}{|-M\omega^2 + K|}$$

היות ולפי (10.12) התדירות הטבעיות מקימות

$$|-M\omega^2 + K| = 0$$

הביטוי האחרון הוא מכנה $g_{kp}(j\omega)$ אזי:

$$|g_{kp}(j\omega)|_{\omega \rightarrow \omega_i} \rightarrow \infty$$

□

הערה: משפט תגובת התדירות הוכח עבור מערכות יציבות אסימפטוטיות.

ניתן להרחיבו למערכות להן גם קטבים על הציר $j\omega$ במשור הקומפלקסי S . קטבי (10.40), כנאמר

בסעיף 10.7.1, הם $\pm j\omega_i$ ($i = 1, \dots, n$)