

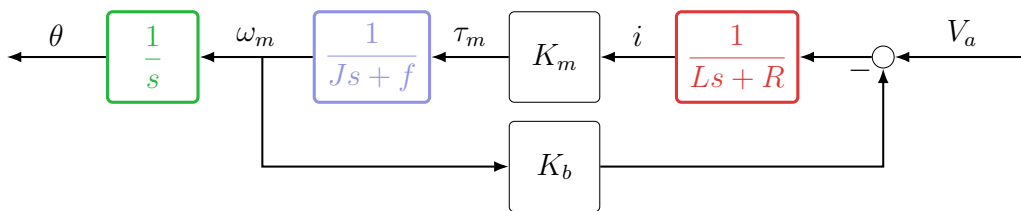


035188 - תורת הבקרה

תרגול 13

7 ביולי 2025

שאלה מספר 1



איור 1: דיאגרמת בלוקים של מנוע חשמלי

באיור 1 מופיעה דיאגרמת בלוקים של מנוע DC, המורכבת מחלק חשמלי, חלק מכאני ואינטגטור, המסומנים באדום, כחול, וירוק בהתאמה. נתון המימוש הפיזיקלי שמצאנו בתרגולים קודמים.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{x}_m(t) \\ \dot{x}_\theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -K_b/L & 0 \\ K_m/J & -f/J & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ x_m(t) \\ x_\theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{x}_m(t) \\ \dot{x}_\theta(t) \end{bmatrix}$$

נתון גם בקר LQG המבקר את זווית המנוע ומבוסס על

$$\begin{cases} Q = 1000 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \\ \rho = 0.1 \end{cases} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} -78.28 & -836.23 & -1000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} B_w = \begin{bmatrix} 65 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \sigma = 0.01 \end{cases} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 0.2343 \\ -5.848 \\ -10.5686 \end{bmatrix}$$

$$C(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + K (sI - (A + BK + LC))^{-1} \begin{bmatrix} B & -L \end{bmatrix}$$

$$C(s) = \begin{bmatrix} \frac{U(s)}{R(s)} & \frac{U(s)}{Y(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(s+200)(s+9.949)(s+1.127)}{(s+824.6)(s+9.509)(s+3.182)} & \frac{-15441(s+200)(s+0.7265)}{(s+824.6)(s+9.509)(s+3.182)} \end{bmatrix}$$

נרצה לממש את החוג שתכננו על בקר דיגיטלי.

1. השוו את התגובה לתנאי ההתחלה

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0873 \\ 0 \end{bmatrix}$$

של הבקר הרציף ושל הבקר הבדיד עבור זמני דגימה $h = 0.01, 0.1, 1, 2[s]$.

2. בדקו את השפעתה על החוג הפתוח בעזרת קירוב למערכת רציפה.

3. עדכנו את תכן הבקר כך שייתחשב בדגימה.

פתרון שאלה מספר 1

1. על מנת לבדוק את השפעת הדיסקרטיזציה, נשתמש בקירוב טוסטין

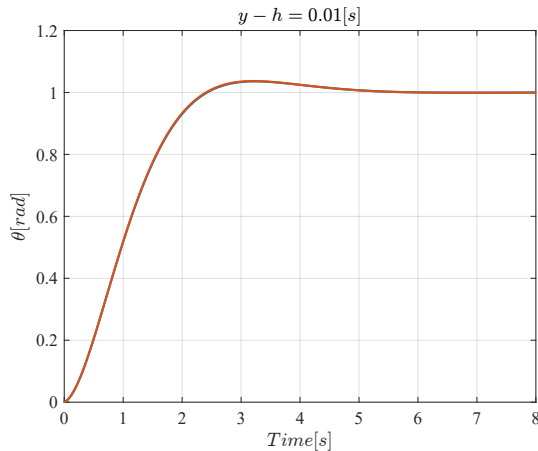
$$s \rightarrow \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1}$$

כשאת החישוב נבצע בעזרת פעולת c2d.

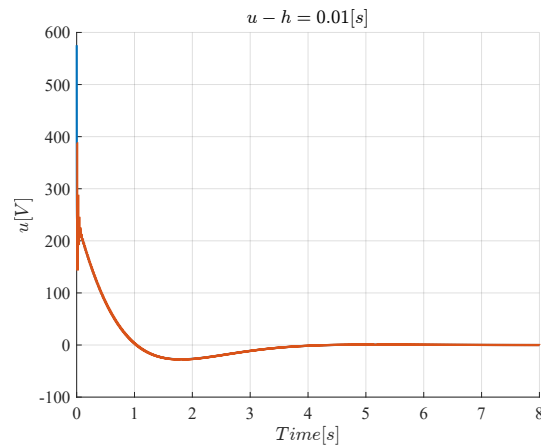
$$C_d = c2d(C, h, 'tustin')$$

(א) עבור $h = 0.01[s]$ נקבל:

$$C_{h=0.01}(z) = \left[\frac{0.38724(z-2.005e-5)(z-0.9052)(z-0.9888)}{(z+0.6096)(z-0.9092)(z-0.9687)} \quad \frac{-28.423(z+1)(z-0.9928)(z-2.048e-05)}{(z+0.6096)(z-0.9092)(z-0.9687)} \right]$$



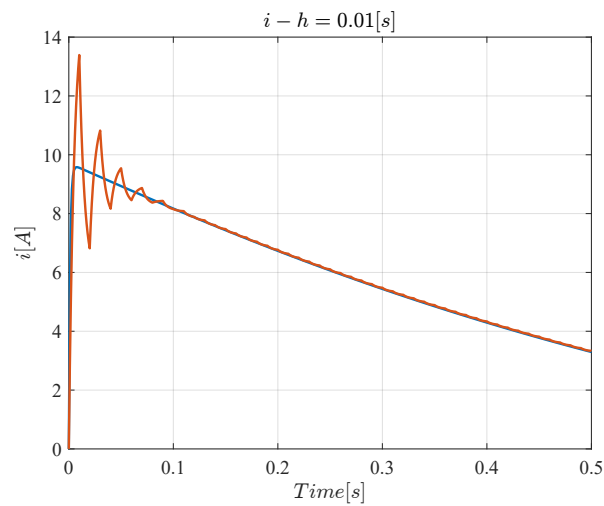
(א) זווית המנוע



(ב) אות הבקרה

איור 2: אות הבקרה וזווית המנוע עבור הבקר הרציף והבדיד עם $h = 0.01[s]$.

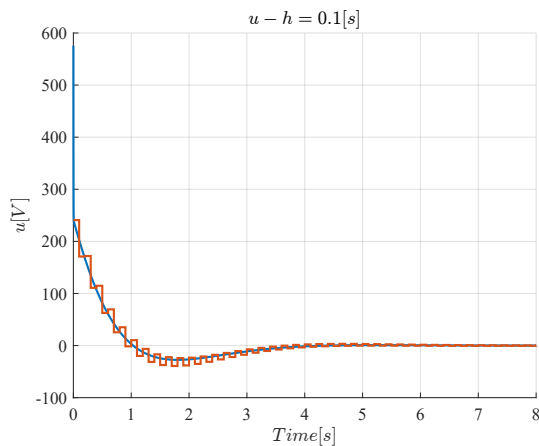
נראה שבעקבות השימוש בתדר דגימה גבוה (h קטן), הבקר הבדיד מחקה בצורה טובה את הבקר הבדיד. עם זאת, ניתן לראות שקיבלנו תנודות שמתכנסות מהר מאוד באות הבקרה בתחילת התגובה. ניתן לראות את ההשפעה של תנודות אלה על הזרם בסלילי המנוע, שתונד בתחילת התגובה ודועך לאחר כחצי שניה.



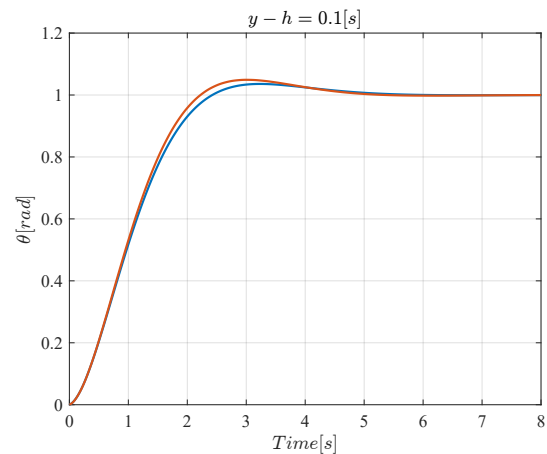
איור 3: הזרם במנוע בתחילת התגובה לבקר הרציף והבדיד עם $h = 0.01[s]$.

(ב) עבור $h = 0.1[s]$ נקבל:

$$C_{h=0.1}(z) = \left[\frac{0.24091(z+0.8182)(z-0.8933)(z-0.3356)}{(z+0.9526)(z-0.7254)(z-0.3555)} \quad \frac{-121.85(z+1)(z+0.8182)(z-0.9299)}{(z+0.9526)(z-0.7254)(z-0.3555)} \right]$$



(ב) אות הבקרה



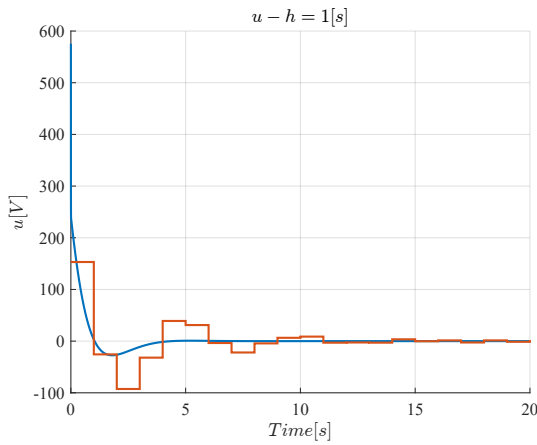
(א) זווית המנוע

איור 4: אות הבקרה וזווית המנוע עבור הבקר הרציף והבדיד עם $h = 0.1[s]$.

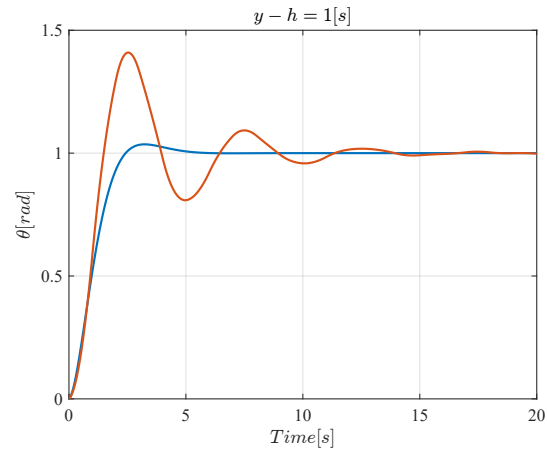
שימו לב שכבר ניתן לראות השפעה של הדיסקרטיזציה על ביצועי המערכת, בעיקר בתגובת היתר. עם זאת, ביחס לדינמיקה של המערכת קצב דגימה זה עדיין סביר. אות הבקרה נהיה יותר אגרסיבי ותונד "סביב" אות הבקרה הרציף עקב איבוד הדיוק של דגימה בתדר גבוה יותר.

(ג) עבור $h = 1[s]$ נקבל:

$$C_{h=1}(z) = \left[\frac{0.1531(z+0.9802)(z+0.6653)(z-0.279)}{(z+0.9952)(z+0.6525)(z+0.2282)} \frac{-172.47(z-0.4671)(z+0.9802)(z+1)}{(z+0.9952)(z+0.6525)(z+0.2282)} \right]$$



(ב) אות הבקרה



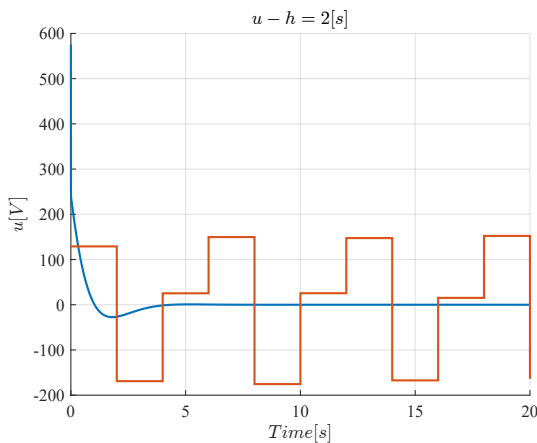
(א) זווית המנוע

איור 5: אות הבקרה וזווית המנוע עבור הבקר הרציף והבדיד עם $h = 1[s]$.

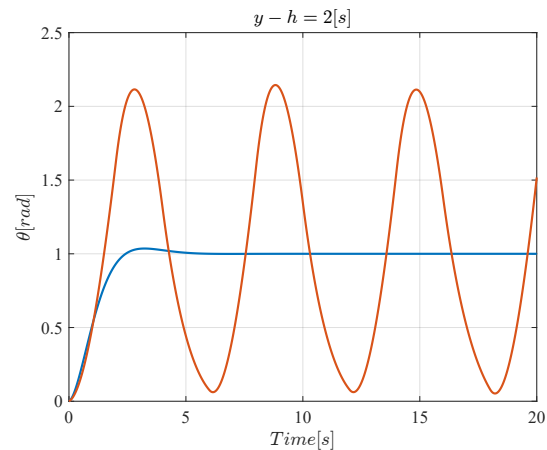
תדר הדגימה כעת קרוב מאוד לזמן האופייני של דינמיקת החוג הסגור, ניתן לראות כי הדבר משפיע על זווית המנוע שתונדת לאורך זמן ארוך עד להתכנסות לאות הייחוס עם תגובת יתר גבוהה מאוד.

(ד) עבור $h = 2[s]$ נקבל:

$$C_{h=1}(z) = \left[\frac{0.12901(z+0.0599)(z+0.8173)(z+0.99)}{(z+0.9976)(z+0.8097)(z+0.5218)} \frac{-147.64(z-0.1584)(z+0.99)(z+1)}{(z+0.9976)(z+0.8097)(z+0.5218)} \right]$$



(ב) אות הבקרה



(א) זווית המנוע

איור 6: אות הבקרה וזווית המנוע עבור הבקר הרציף והבדיד עם $h = 2[s]$.

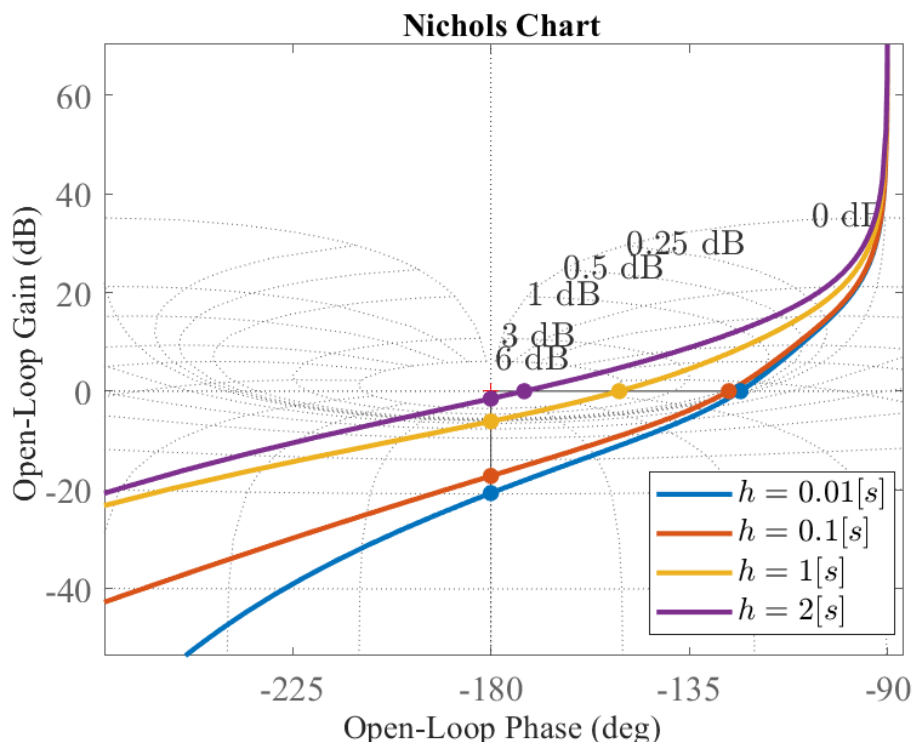
כעת תדר הדגימה איטי מידי ביחס לזמן האופייני של דינמיקת החוג הסגור, כך שהיציאה תונדת והמערכת בחוג סגור הגיעה לסף יציבות לכל הפחות. כך שניתן לראות שדגימה בתדר איטי מידי יכולה להוציא מיציבות גם מערכת עם בקר רציף שתוכנן לייצב את המערכת.

2. על מנת להעריך את ההשפעה של הדגימה על יציבות החוג הסגור, נשתמש בקירוב עבור התמסורת של דוגם מסדר 0 (ZOH).

$$F_\phi(s) = \frac{1 - e^{-sh}}{sh} \approx F_{\phi, \text{del}} = e^{-sh/2} \quad \text{or} \quad F_\phi(s) \approx F_{\phi, 2}(s) = \frac{12}{h^2 s^2 + 6hs + 12}$$

ונסתכל על השפעת הדגימה המקורבת על החוג הפתוח

$$L(s) = -C_y(s)P(s)F_{\phi, 2}(s)$$



הקירוב, שגם הוא מסנן מעביר נמוכים, הוא מערכת מסדר סופי של שתיים. ככל שתדר הדגימה עולה כך פיגור הפאזה של המסנן נהיה משמעותי בתדרים נמוכים יותר והחוג הפתוח מתקרב לנקודה הקריטית. התכן הראשוני התחיל עם עודפי יציבות סבירים והדגימה בתדר גבוה לא פגעה בהם בצורה משמעותית, אך הורדת תדר הגדימה פגעה בעודפי היציבות כך שעודף הפאזה של החוג עבור $h = 2[s]$ הוא נמוך מאוד (מעלות בודדות). כמו שראינו, כאשר הסתכלנו על סימולציה של המערכת עם תדר דגימה זה, המערכת כבר הייתה לא יציבה. לכן, חשוב לזכור כי $F_{\phi, 2}$ הוא קירוב ושימוש בו במקרים בהם תדר הדגימה אינו סביר ביחס למערכת לא בהכרח יהיה מדויק. עם זאת, השימוש בו יכול להקל מאוד את תהליך התכן.

3. על מנת לקחת בחשבון את הדגימה, נשתמש שוב בקירוב $F_{\phi,2}(s)$:

$$F_{\phi,2}(s) = \frac{12}{h^2 s^2 + 6hs + 12} \xRightarrow{\text{companion form}} \begin{cases} \dot{x}_F(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{12}{h^2} & -\frac{6}{h} \end{bmatrix} x_F(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y_F(t) &= \begin{bmatrix} \frac{12}{h^2} & 0 \end{bmatrix} x_F(t) \end{cases}$$

ונחבר אותו בטור לתהליך הנתון

$$P(s) \cdot F_{\phi,2}(s) : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_F(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_F C & A_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_F(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & C_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_F(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

על מנת לקבל ביצועים זהים לבקר שתכננו, נרצה למזער את אותם קריטריונים עבור הבקרה כאשר נתעלם משני המצבים שנוספו לנו. עבור הבקרה:

$$J_c = \int_0^\infty x^T Q x + \rho u^2 dt = \int_0^\infty \begin{bmatrix} x^T & x_F^T \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{Q}} \begin{bmatrix} x \\ x_F \end{bmatrix} + \rho u^2 dt$$

לשערוך נוסיף את אותו משקל עבור ווקטור המצב $x_F(t)$ ונקבל

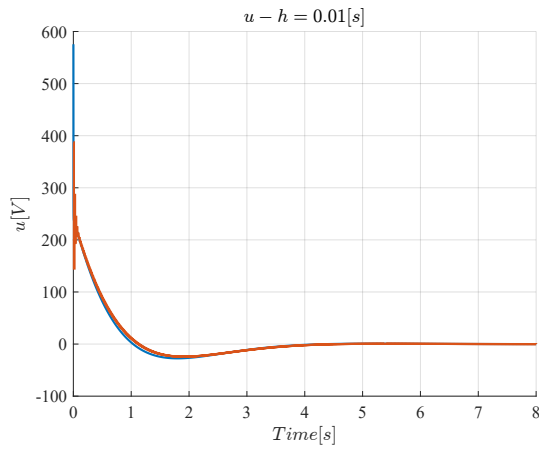
$$\tilde{B}_w = \begin{bmatrix} B_w & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

כעת נבחן את הביצועים שנקבל עבור קירוב טוסטין של הבקר הכולל התחשבות בקירוב טוסטין.

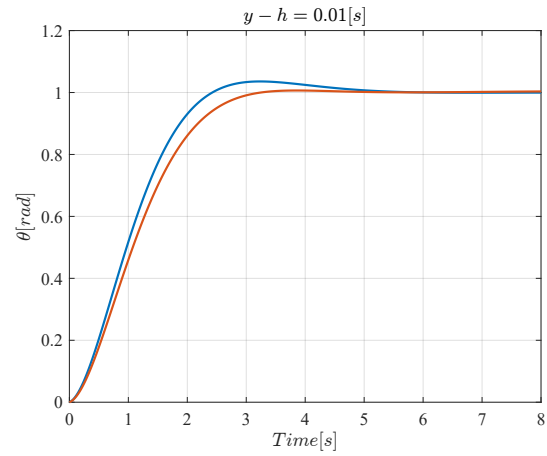
(א) עבור $h = 0.01[s]$ נקבל:

$$C(s) = \left[\frac{(s+200)(s+0.508)(s+0.00368)}{(s+824.6)(s^2+2.127s+1.948)} \quad \frac{-22044(s+200)(s+0.5089)(s^2+600s+1.2e05)}{(s+824.6)(s+600)(s+1.2e06)(s^2+2.127s+1.948)} \right]$$

$$C(z)_{h=0.01} = \left[\frac{0.38724(z-2.005e-05)(z-1)(z-0.9949)}{(z+0.6096)(z^2-1.979z+0.979)} \quad \frac{-0.012446(z-0.9949)(z-2.005e-05)(z^2+0.5714z+0.1429)}{(z+0.6096)(z+0.5)(z^2-1.979z+0.979)} \right]$$



(ב) אות הבקרה



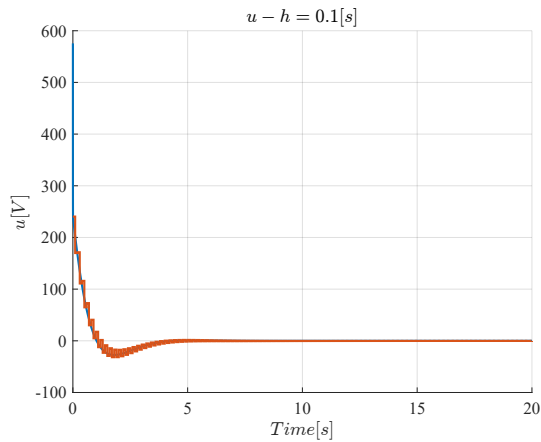
(א) זווית המנוע

איור 7: אות הבקרה וזווית המנוע עבור הבקר הרציף והבדיד עם $h = 0.01[s]$.

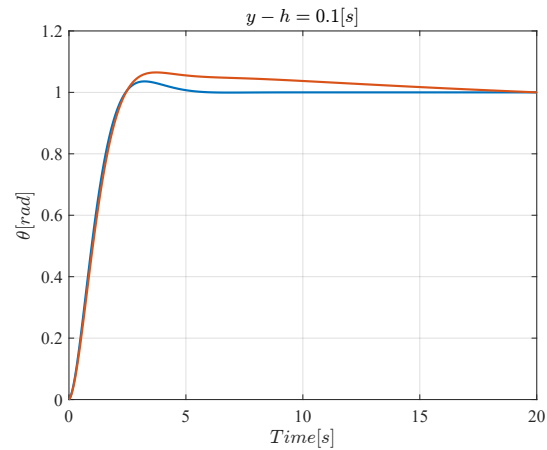
(ב) עבור $h = 0.1[s]$ נקבל:

$$C(s) = \left[\frac{(s+200)(s+0.507)(s+0.03687)}{(s+824.6)(s^2+2.159s+2.018)} \quad \frac{-21741(s+200)(s+0.5159)(s^2+60s+1200)}{(s+824.6)(s+60.01)(s+1.2e04)(s^2+2.159s+2.018)} \right]$$

$$C(z)_{h=0.1} = \left[\frac{0.2404(z-0.9506)(z-0.9963)(z+0.8182)}{(z+0.9526)(z^2-1.788z+0.806)} \quad \frac{-0.75977(z+1)(z+0.8182)(z-0.9497)(z^2+0.5714z+0.1429)}{(z+0.9526)(z+0.9967)(z+0.5001)(z^2-1.788z+0.806)} \right]$$



(ב) אות הבקרה



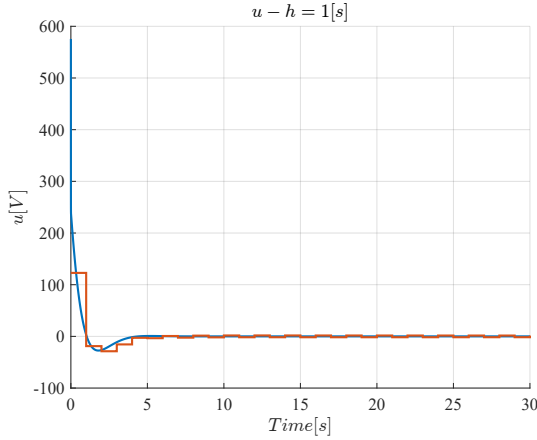
(א) זווית המנוע

איור 8: אות הבקרה וזווית המנוע עבור הבקר הרציף והבדיד עם $h = 0.1[s]$.

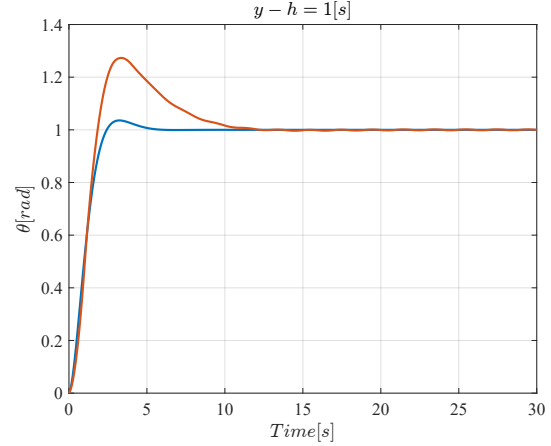
(ג) עבור $h = 1[s]$ נקבל:

$$C(s) = \left[\frac{(s+200)(s+6.087)(s^2+0.8083s+0.1844)}{(s+824.6)(s+6.113)(s^2+2.397s+2.708)} \quad \frac{-20069(s+200)(s+0.5589)(s^2+6s+12)}{(s+824.6)(s+119.9)(s+6.113)(s^2+2.397s+2.708)} \right]$$

$$C(z)_{h=1} = \left[\frac{0.12284(z+0.5054)(z+0.9802)(z^2-1.315z+0.4427)}{(z+0.507)(z+0.9952)(z^2-0.2247z+0.1665)} \quad \frac{-30.89(z-0.5631)(z+0.9802)(z+1)(z^2+0.5714z+0.1429)}{(z+0.507)(z+0.9672)(z+0.9952)(z^2-0.2247z+0.1665)} \right]$$



(ב) אות הבקרה



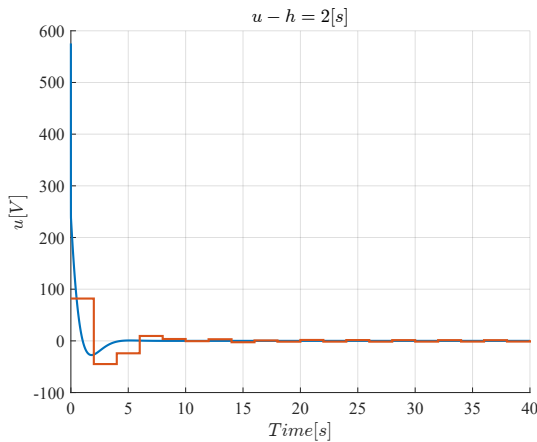
(א) זווית המנוע

איור 9: אות הבקרה וזווית המנוע עבור הבקר הרציף והבדיד עם $h = 0.1[s]$.

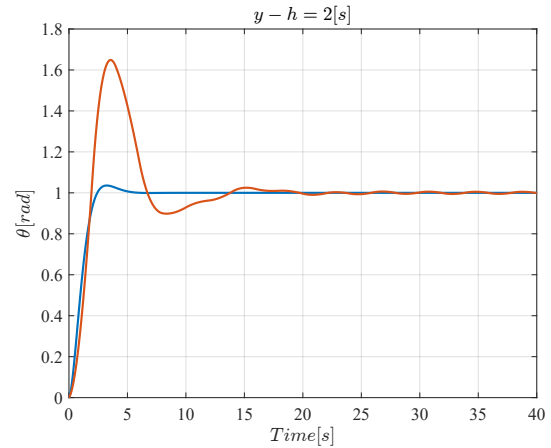
(ד) עבור $h = 2[s]$ נקבל:

$$C(s) = \left[\frac{(s+200)(s+3.162)(s^2+1.03s+0.3562)}{(s+824.6)(s+3.392)(s^2+2.415s+3.307)} \quad \frac{-19395(s+200)(s+0.5784)(s^2+3s+3)}{(s+824.6)(s+29.88)(s+3.392)(s^2+2.415s+3.307)} \right]$$

$$C(z)_{h=2} = \left[\frac{0.08189(z+0.5195)(z+0.99)(z^2-0.5397z+0.1367)}{(z+0.5447)(z+0.9976)(z^2+0.6863z+0.2815)} \quad \frac{-57.218(z-0.2671)(z+0.99)(z+1)(z^2+0.5714z+0.1429)}{(z+0.5447)(z+0.9352)(z+0.9976)(z^2+0.6863z+0.2815)} \right]$$



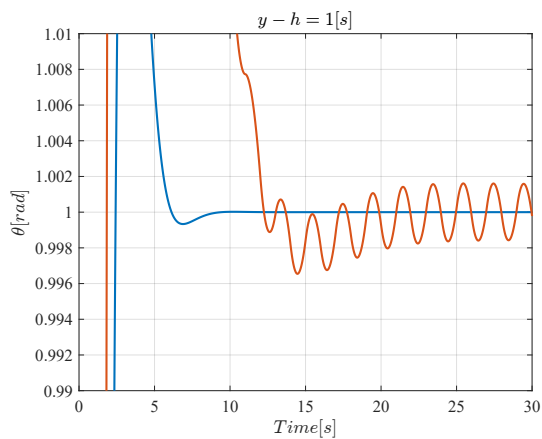
(ב) אות הבקרה



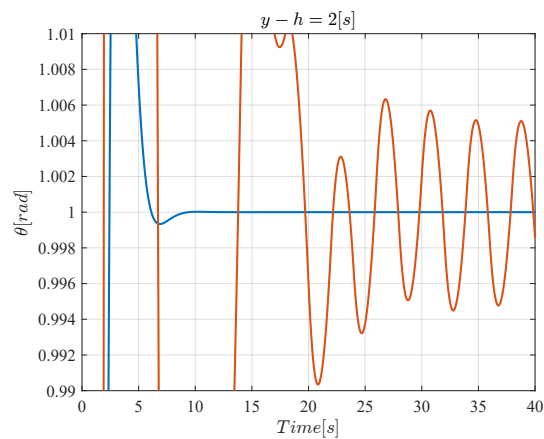
(א) זווית המנוע

איור 10: אות הבקרה וזווית המנוע עבור הבקר הרציף והבדיד עם $h = 0.1[s]$.

שימו לב שעבור זמני הדגימה הארוכים, $h = 1, 2[s]$, התהליך הרציף לא מגיע למצב מתמיד אלא תונד סביב אות היחוס כמו שניתן לראות בתקריב בגרפים הבאים.



(ב) זווית המנוע עבור $h = 1[s]$

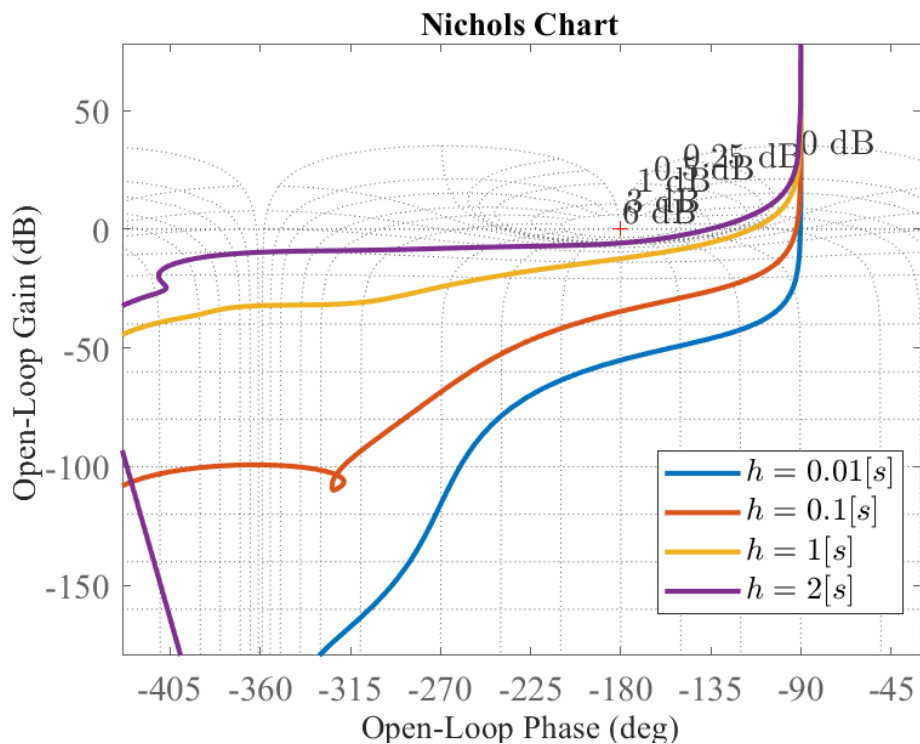


(א) זווית המנוע עבור $h = 2[s]$

איור 11: תנודות זווית המנוע עבור שימוש בבקר בדיד עם מערכת רציפה.

על מנת לנסות להבין את התופעה נסתכל על החוג הפתוח של הבקרים הבדידים שקורבו עם קירוב טוסטין יחד עם התהליך הבדיד השקול המורחב.

$$L(z) = -C_y(z)\bar{P}(z)$$



שאלה מספר 2

מצאו את התהליך הבדיד השקול עבור התהליכים הרציפים הבאים:

.1

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

.2

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

.3

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1.5 & -0.5 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

פתרון שאלה מספר 2

עבור תהליך רציף

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

התהליך הבדיד השקול יהיה

$$\bar{x}[i+1] = \underbrace{e^{Ah}}_{\bar{A}} \bar{x}[i] + \underbrace{\int_0^h e^{As} ds \cdot B}_{\bar{B}} \bar{u}[i]$$

1. מטריצת הדינמיקה הנתונה A היא nilpotent matrix, כלומר $A^2 = 0$. לכן, על מנת למצוא את האקספוננט המטריצי שלה, נשתמש בפיתוח טור טיילור של האקספוננט המטריצי.

$$e^{Ah} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ah)^k}{k!} = I + Ah + \frac{A^2 h^2}{2!} + \frac{A^3 h^3}{3!} + \dots = I + Ah$$

$$\bar{A} = e^{Ah} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

כעת נחשב את ווקטור הכניסה הבדיד השקול

$$\bar{B} = \int_0^h \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ds = \int_0^h \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \\ h \end{bmatrix}$$

והמערכת הבדידה השקולה היא

$$\bar{x}[i+1] = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}[i] + \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \\ h \end{bmatrix} \bar{u}[i]$$

2. מטריצת הדינמיקה הנתונה היא מטריצה אלכסונית, כך שניתן למצוא בקלות את האקספוננט המטריצי שלה

$$\bar{A} = e^{Ah} = \begin{bmatrix} e^{-2h} & 0 \\ 0 & e^{-h} \end{bmatrix}$$

נחשב את ווקטור הכניסה הבדיד השקול

$$\bar{B} = \int_0^h \begin{bmatrix} e^{-2s} & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ds = \int_0^h \begin{bmatrix} e^{-2s} \\ e^{-s} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} \frac{1-e^{-2h}}{2} \\ 1-e^{-h} \end{bmatrix}$$

והמערכת הבדידה השקולה היא

$$\bar{x}[i+1] = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}[i] + \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \\ h \end{bmatrix} \bar{u}[i]$$

3. נתון כי הווקטורים העצמיים של מטריצה הדינמיקה הם

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

נמצא את הערכים העצמיים

$$A \cdot v_1 = \begin{bmatrix} -1.5 & -0.5 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = -2$$

$$A \cdot v_2 = \begin{bmatrix} -1.5 & -0.5 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_2 = -1$$

המטריצה היא מטריצה סימטרית ולכן ניתנת ללכסון, נשתמש בווקטורים העצמיים לבניית טרנספורמצית דמיון

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

והאקפוננט המטריצי יהיה

$$e^{Ah} = T \begin{bmatrix} e^{-2h} & 0 \\ 0 & e^{-h} \end{bmatrix} T^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2h} & 0 \\ 0 & e^{-h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{Ah} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-2h} + e^{-h} & e^{-h} - e^{-2h} \\ e^{-h} - e^{-2h} & e^{-2h} + e^{-h} \end{bmatrix}$$

נחשב את ווקטור הכניסה השקול

$$\bar{B} = \int_0^h \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-2s} + e^{-s} & e^{-s} - e^{-2s} \\ e^{-s} - e^{-2s} & e^{-2s} + e^{-s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ds = \int_0^h \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-2s} + e^{-s} \\ e^{-s} - e^{-2s} \end{bmatrix} ds = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(1 - e^{-2h}) + (1 - e^{-h}) \right]$$