

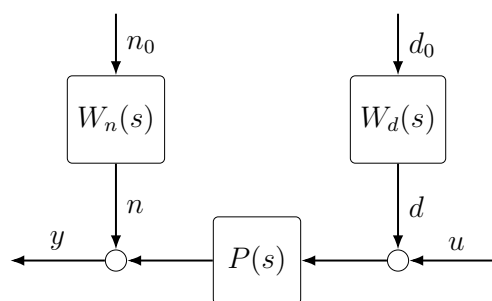


035188 - תורת הבקרה

תרגול 7

10 במאי 2025

שאלה מספר 1



איור 1: המערכת בשאלה 1

נתונה המערכת באיור 1.

1. בנו מימוש כללי במרחב המצב למערכת כאשר $W_n(s)$ היא בי-פרופר ו- $P(s), W_d(s)$ סטריקטלי פרופר.

2. נתון כי

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}, \quad W_d(s) = \frac{1}{s}, \quad W_n(s) = \frac{s}{s + 1}$$

מצאו מימוש במרחב המצב למערכת המורחבת מהסעיף הקודם.

פתרון שאלה 1

1. למערכת יש שלוש כניסות חיצוניות u, d_0, n_0 ויציאה אחת y . נכתוב את משוואות המצב והיציאה עבור כל אחת מהמערכות:

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) &= Ax_p(t) + B(d(t) + u(t)) \\ y_p(t) &= Cx_p(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_d(t) &= A_dx_d(t) + B_dd_0(t) \\ d(t) &= C_dx_d(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) &= A_nx_n(t) + B_nn_0(t) \\ n(t) &= C_nx_n(t) + D_nn_0(t) \end{cases}$$

כאשר נשתמש במימוש כללי לכל אחת מהמערכות. נגדיר וקטור מצב מורחב ווקטור כניסה מורחב בהתאם למימושים

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_d(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} u(t) \\ d_0(t) \\ n_0(t) \end{bmatrix}$$

ונכתוב את משוואות המצב המצב המורחב של וקטור המצב המורחב:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_d(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Ax_p(t) + B(u(t) + d(t)) \\ A_dx_d(t) + B_dd_0(t) \\ A_nx_n(t) + B_nn_0(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Ax_p(t) + B(u(t) + C_dx_d(t)) \\ A_dx_d(t) + B_dd_0(t) \\ A_nx_n(t) + B_nn_0(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & BC_d & 0 \\ 0 & A_d & 0 \\ 0 & 0 & A_n \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B_d & 0 \\ 0 & 0 & B_n \end{bmatrix} \tilde{u}(t) \end{aligned}$$

כעת נכתוב את משוואת היציאה במונחי הוקטורים המורחבים

$$y(t) = y_p(t) + n(t) = Cx_p(t) + C_nx_n(t) + D_nn_0(t) = \begin{bmatrix} C & 0 & C_n \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & D_n \end{bmatrix} \tilde{u}(t)$$

לכן המימוש הכולל נתון על ידי

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) &= \begin{bmatrix} A & BC_d & 0 \\ 0 & A_d & 0 \\ 0 & 0 & A_n \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B_d & 0 \\ 0 & 0 & B_n \end{bmatrix} \tilde{u}(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 & C_n \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & D_n \end{bmatrix} \tilde{u}(t) \end{cases}$$

2. היות ומצאנו את המימוש הכולל בסעיף הקודם, כל שעלינו לעשות הוא למצוא מימושים לכל אחת מפונקציות התמסורת ואז להציב. עבור האינטגרטור קל למצוא מימוש פיזיקלי

$$d(s) = W_d(s)d_0(s) = \frac{1}{s}d_0(s) \implies W_d(s) = 0 + 1(s-0)^{-1}1$$

$$W_d : \begin{cases} \dot{x}_d(t) &= 0 \cdot x_d(t) + d_0(t) \\ d(t) &= x_d(t) \end{cases} \quad \left[\begin{array}{c|c} A_d & B_d \\ \hline C_d & D_d \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right]$$

התהליך עצמו הוא סטריקטלי פרופר, לכן ניתן להשתמש במימושים קאנוניים - נבחר במימוש משערך (נסו בבית לבנות מימוש מלווה!):

$$.P(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}$$

$$\implies \begin{cases} \dot{x}_p(t) &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} x_p(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} (u(t) + d(t)) \\ y_p(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_p(t) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dot{x}_p(t) &= \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x_p(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u(t) + d(t)) \\ y_p(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_p(t) \end{cases}$$

פונקציית התמסורת $W_n(s)$ היא בי-פרופר, לכן לא נוכל להשתמש במימושים שלמדנו בהרצאה ישירות. אנחנו יודעים שהקשר בין פונקציית תמסורת לכל מימוש שלה במרחב המצב נתון על ידי

$$W_n(s) = \frac{s}{s+1} = D_n + C_n(sI - A_n)^{-1}B_n$$

ננסה להביא את פונקציית התמסורת הנתונה לצורה הזו (פשוט יחסית במערכות מסדר ראשון):

$$\frac{s}{s+1} = \frac{s+1-1}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1} = 1 + (-1) \cdot (s - (-1))^{-1} \cdot 1$$

$$W_n : \begin{cases} \dot{x}_n(t) &= -x_n(t) + n_0(t) \\ n(t) &= -x_n(t) + n_0(t) \end{cases} \quad \left[\begin{array}{c|c} A_n & B_n \\ \hline C_n & D_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} -1 & 1 \\ \hline -1 & 1 \end{array} \right]$$

כעת כל שנותר הוא להציב

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & BC_d & 0 \\ 0 & A_d & 0 \\ 0 & 0 & A_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c|c} -\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B_d & 0 \\ 0 & 0 & B_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\tilde{C} = [C \quad 0 \quad C_n] = [1 \quad 0 \mid 0 \mid -1] \quad \tilde{D} = [0 \quad 0 \quad D_n] = [0 \mid 0 \mid 1]$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t) \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}\tilde{u} \end{cases}$$

שאלה מספר 2

נתונה פונקציית התמסורת

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s}{s^4 + 16s^3 + 86s^2 + 176s + 105}$$

1. כתבו למערכת מימוש מלווה.
2. כתבו למערכת מימוש משערך.
3. כתבו למערכת מימוש אלכסוני אם נתון שאחד הקטבים של המערכת הוא $s = -3$.
4. מצאו טרנספורמציה בין המימוש המלווה למימוש האלכסוני (טרנספורמציה מלכסנת).
5. הראו בעזרת פרמטרי מרקוב של שני המימושים כי הדרגה היחסית של המערכת לא תלויה במימוש.

פתרון שאלה 2

1. בהינתן פונקציית תמסורת

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

מימוש מלווה (Controllable canonical form) שלה נתון ע"י

$$.G : \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1}] x(t) \end{cases}$$

עבור המקרה שלנו

$$G(s) = \frac{b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} = \frac{0 \cdot s^3 + s^2 + 2s + 0}{s^4 + 16s^3 + 86s^2 + 176s + 105}$$

נציב במימוש ונקבל

$$.G : \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -105 & -176 & -86 & -16 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [0 \ 2 \ 1 \ 0] x(t) \end{cases}$$

2. בהינתן פונקציית תמסורת

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

מימוש משערך (Observable canonical form) שלה נתון ע"י

$$.G : \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] x(t) \end{cases}$$

עבור המקרה שלנו

$$G(s) = \frac{b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} = \frac{0 \cdot s^3 + s^2 + 2s + 0}{s^4 + 16s^3 + 86s^2 + 176s + 105}$$

נציב במימוש ונקבל

$$G : \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -16 & 1 & 0 & 0 \\ -86 & 0 & 1 & 0 \\ -176 & 0 & 0 & 1 \\ -105 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

3. על מנת למצוא מימוש אלכסוני של המערכת, נרצה למצוא את הקטבים של המערכת. נתון ש $s = -3$ הוא שורש של המכנה, לכן ניתן לכתוב את המכנה מחדש בעזרת חלוקת פולינומים

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s}{(s+3)(s^3 + 13s^2 + 47s + 35)}$$

מכיוון שהסכום

$$-1 + 13 - 47 + 35 = 0$$

אז $s = -1$ הוא גם שורש של המכנה, נשתמש שוב בחילוק פולינומים ונקבל

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s}{(s+1)(s+3)(s^2 + 12s + 35)}$$

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s}{(s+1)(s+3)(s+5)(s+7)}$$

קיבלנו שלמערכת יש 4 קטבים פשוטים. נבצע פירוק לשברים חלקיים בעזרת פעולת השארית עבור כל הקטבים.

$$r_i = \text{Res}(G(s), p_i) = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i)G(s)$$

ונקבל

$$G(s) = \sum_{i=1}^4 G_i(s) = \sum_{i=1}^4 \frac{r_i}{s - p_i}$$

כלומר, קיבלנו שמערכת זאת היא חיבור מקבילי של 4 מערכות מסדר ראשון עם קוטב ממשי יחיד. לכן ניתן לממש כל מערכת $G_i(s)$ בתור

$$G_i : \begin{cases} \dot{x}_i(t) = p_i x_i(t) + u(t) \\ y_i(t) = r_i x_i(t) \end{cases}$$

וכמו שראינו בהרצאה, ניתן לייצג את החיבור המקבילי במרחב המצב בצורה הבאה

$$G : \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

כך שקיבלנו מימוש אלכסוני כפי שנדרש.

נמצא את r_i בעזרת חישוב השאריות.

$$\begin{aligned} r_1 &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s^2 + 2s}{(s+3)(s+5)(s+7)} = -\frac{1}{48} \\ r_2 &= \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s^2 + 2s}{(s+1)(s+5)(s+7)} = -\frac{3}{16} \\ r_3 &= \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s^2 + 2s}{(s+1)(s+3)(s+7)} = \frac{15}{16} \\ r_4 &= \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s^2 + 2s}{(s+1)(s+3)(s+5)} = -\frac{35}{48} \end{aligned}$$

ונקבל את מטריצות המימוש האלכסוני של מרחב המצב

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} & \tilde{B} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \tilde{C} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{48} & -\frac{3}{16} & \frac{15}{16} & -\frac{35}{48} \end{bmatrix} & \tilde{D} &= 0 \end{aligned}$$

4. מכיוון ששלושת המימושים הם ייצוג של אותה מערכת, אז קיימת טרנספורמציה מלכסנת T שתעביר את המימוש לאלכסוני. נמצא את הווקטורים העצמיים של מטריצת הדינמיקה A למימוש המלווה.

$$(\lambda_i I - A)v_i = 0$$

$$i = 1 : (-1I - A)v_i = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 105 & 176 & 86 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ v_{1,3} \\ v_{1,4} \end{bmatrix} = 0$$

קיבלנו 3 משוואות בלתי תלויות כך שנקבל את הווקטור העצמי (עד כדי הכפלה בקבוע)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

את אותו תהליך נבצע עבור שאר הערכים העצמיים ונקבל את מטריצת הווקטורים העצמיים

$$V = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -5 & -7 \\ 1 & 9 & 25 & 49 \\ -1 & -27 & -125 & -343 \end{bmatrix}$$

על מנת להבטיח שווקטור הכניסה B תואם למימוש האלכסוני שמצאנו, נבדוק את ווקטור הכניסה המתקבל לאחר השימוש ב V ונכפיל את העמודות בקבועים מתאימים

$$V^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{48} \\ -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{48} \end{bmatrix} \Rightarrow T = V \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{48} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{48} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{48} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{48} \\ -\frac{1}{48} & \frac{3}{16} & -\frac{5}{16} & \frac{7}{48} \\ \frac{1}{48} & -\frac{9}{16} & \frac{25}{16} & -\frac{49}{48} \\ -\frac{1}{48} & \frac{27}{16} & -\frac{125}{16} & \frac{343}{48} \end{bmatrix}$$

והקשר בין המימושים הוא

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ \hline CT & D \end{array} \right] \quad \tilde{x} = T^{-1}x$$

5. עבור אינדקס $k \in \mathbb{N}$, הגדלים $CA^{k-1}B$ ידועים בתור פרמטרי מרקוב של המערכת, ובפרט ראיתם בהרצאה שבהינתן פונקציית תמסורת במונחי מימוש כלשהו

$$G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$$

הדרגה היחסית (עודף הקטבים) שלה הוא האינדקס הראשון עבורו פרמטר מרקוב שונה מאפס. כזכור עודף קטבים הוא תכונה של קשר הכניסה-יציאה, קרי פונקציית התמסורת, ולכן לא אמור להיות תלוי במימוש שנבחר. נבדוק זאת בעזרת חישוב פרמטרי מרקוב עבור שני המימושים שכתבנו. עבור המימוש המלווה

$$\begin{aligned} k=1: [0 \quad 2 \quad 1 \quad 0] & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -105 & -176 & -86 & -16 \end{bmatrix}^{1-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ & = [0 \quad 2 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ k=2: [0 \quad 2 \quad 1 \quad 0] & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -105 & -176 & -86 & -16 \end{bmatrix}^{2-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ & = [0 \quad 2 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -16 \end{bmatrix} = 1 \end{aligned}$$

כלומר עודף הקטבים של המערכת לפי המימוש המלווה הוא $k=2$.

באותה הצורה נחשב עבור מימוש משערך

$$\begin{aligned}
 k=1: [1 \ 0 \ 0 \ 0] & \begin{bmatrix} -16 & 1 & 0 & 0 \\ -86 & 0 & 1 & 0 \\ -176 & 0 & 0 & 1 \\ -105 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{1-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 & = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\
 k=2: [1 \ 0 \ 0 \ 0] & \begin{bmatrix} -16 & 1 & 0 & 0 \\ -86 & 0 & 1 & 0 \\ -176 & 0 & 0 & 1 \\ -105 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 & = [-16 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 1
 \end{aligned}$$

וכצפוי קיבלנו את אותו עודף הקטבים.

עבור המימוש האלכסוני נסתכל שוב על פרמטרי מרקוב

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}\tilde{A}^{k-1}\tilde{B} &= CT(T^{-1}AT)^{k-1}T^{-1}B \\
 &= CT \underbrace{(T^{-1}ATT^{-1}AT\dots T^{-1}ATT^{-1}AT)}_{k-1 \text{ times}} T^{-1}B \\
 &= CT(T^{-1}A^{k-1}T)T^{-1}B = CA^{k-1}B
 \end{aligned}$$

כך שפרמטרי מרקוב אינם משתנים עבור מימושים שונים וכך גם עודף הקטבים.