הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, הפקולטה להנדסת מכונות

TECHNION — Israel Institute of Technology, Faculty of Mechanical Engineering

מבוא לבקרה (034040)

גליון תרגילי בית מס' 6

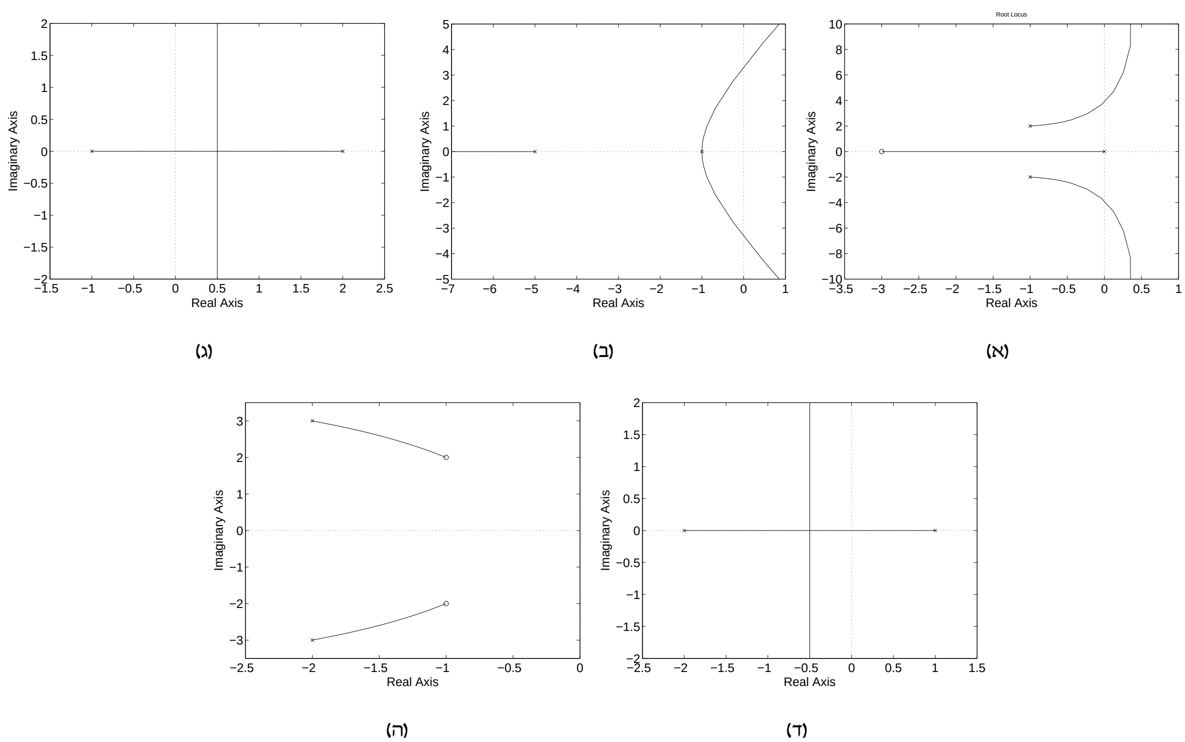
שאלה מס' 1

ציירו מג"ש, איכותית ובעזרת ה־MATLAB לכל התהליכים הבאים (הסבירו את הציורים האיכותיים):

1. $P(s) = \frac{s+3}{s(s^2+2s+5)}$
2. $P(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+5)}$
3. $P(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}$
4. $P(s) = \frac{1}{(s+2)(s-1)}$
5. $P(s) = \frac{s^2+2s+5}{s^2+4s+13}$

כדי לצייר מג"ש ב־MATLAB השתמשו בפקודה `rlocus(P)`.

פתרון לשאלה מס' 1



ציור 1: מג"שים לשאלה 1

1. מע' בחוג פתוח: $P_1(s) = \frac{k(s+3)}{s(s^2+2s+5)}$.

- פ"א של המערכת בחוג סגור: $\chi_{cl}(s) = D_p(s)D_c(s) + N_p(s)N_c(s) = s(s^2+2s+5) + k(s+3)$.
- למערכת בחוג פתוח יש 3 קטבים $\lambda_1 = -1+2j$, $\lambda_2 = -1-2j$, $\lambda_3 = 0$ ואפס $z = -3$; למג"ש יש $3-1=2$ ענפים שמסתיימים ב־∞.

- מרכז הכובד: $\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m} = \frac{-1-1-0+3}{2} = 0.5$. זווית האסימפטוטות: $\gamma = \frac{180^o+360^o(l-1)}{n-m} \Leftarrow \gamma_{1,2} = \pm 90^o$.
- נחשב את זווית היציאה של אסימפטוטה מקוטב $-1+2j$: $\phi_{1,d} = 45^o - 90^o - (180^o - \arctan(2)) = 18^o$; $\phi_{2,d} = -18^o$.

את המג"ש שמתקבל אפשר לראות בציור 1(א).

2. מע' בחוג פתוח: $P_2(s) = \frac{k}{(s+1)^2(s+5)}$.

- פ"א של המערכת בחוג סגור: $\chi_{cl}(s) = (s+1)^2(s+5)+k$.
- למערכת בחוג פתוח יש 3 קטבים $\lambda_{1,2} = -1$, $\lambda_3 = -5$. היות ואין אפסים ל־$P_2(s)$, למג"ש יש שלושה ענפים שמסתיימים ב־∞.
- מרכז הכובד: $\sigma = \frac{-1-1-5}{3} = -\frac{7}{3}$. זווית האסימפטוטות: $\gamma = \frac{180^o+360^o(l-1)}{n-m} \Leftarrow \gamma_{1,2} = \pm 60^o$ ו־$\phi_3 = 180^o$.
- נקודה הסתעפות יחידה ב־-1

את המג"ש שמתקבל אפשר לראות בציור 1(ב).

3. מע' בחוג פתוח: $P_3(s) = \frac{k}{(s+1)(s-2)}$.

- פ"א של המערכת בחוג סגור: $\chi_{cl}(s) = (s+1)(s-2)+k$.
- למערכת בחוג פתוח יש 2 קטבים $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. היות ואין אפסים ל־$P_3(s)$, למג"ש יש 2 ענפים שמסתיימים ב־∞.
- מרכז הכובד: $\sigma = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$. זווית האסימפטוטות: $\gamma = \frac{180^o+360^o(l-1)}{n-m} \Leftarrow \gamma_{1,2} = \pm 90^o$.
- נקודות הסתעפות: $\frac{d}{ds}\frac{1}{P_3(s)} = 2s-1 = 0 \Leftarrow s = \frac{1}{2}$

את המג"ש שמתקבל אפשר לראות בציור 1(ג).

4. מע' בחוג פתוח: $P_4(s) = \frac{k}{(s-1)(s+2)}$.

- פ"א של המערכת בחוג סגור: $\chi_{cl}(s) = (s-1)(s+2)+k$.
- למערכת בחוג פתוח יש 2 קטבים $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. היות ואין אפסים ל־$P_3(s)$, למג"ש יש 2 ענפים שמסתיימים ב־∞.
- מרכז הכובד: $\sigma = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$. זווית האסימפטוטות: $\gamma = \frac{180^o+360^o(l-1)}{n-m} \Leftarrow \gamma_{1,2} = \pm 90^o$.
- נקודות הסתעפות: $\frac{d}{ds}\frac{1}{P(s)} = 2s+1 = 0 \Leftarrow s = -\frac{1}{2}$

את המג"ש שמתקבל אפשר לראות בציור 1(ד).

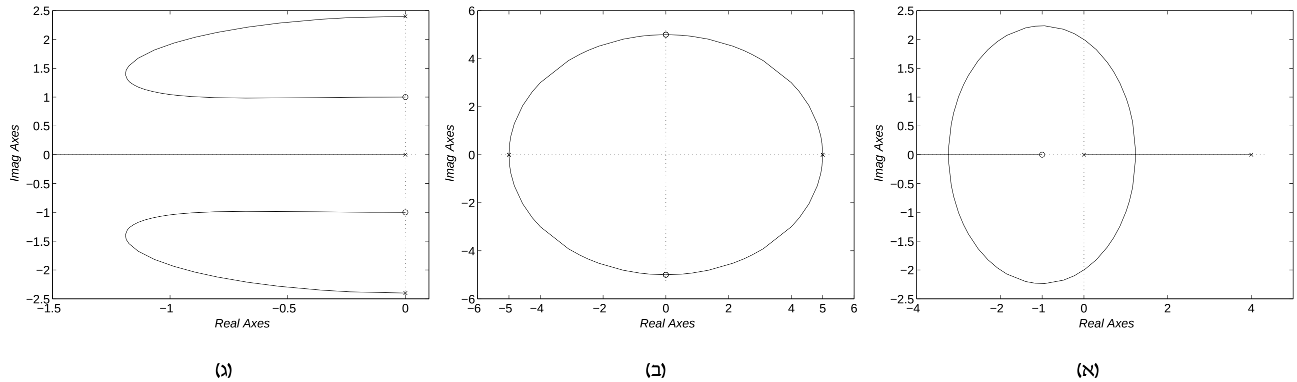
5. מע' בחוג פתוח: $P_4(s) = \frac{k(s^2+2s+5)}{s^2+4s+13}$.

- פ"א של המערכת בחוג סגור: $\chi_{cl}(s) = s^2+4s+13+k(s^2+2s+5)$.
- למערכת בחוג פתוח יש שני קטבים $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3j$ ושני אפסים $z_{1,2} = -1 \pm 2j$. היות ומספר הקטבים שווה למספר האפסים למג"ש אין אסימפטוטות.
- נחשב את זווית היציאה של האסימפטוטה מהקוטב $\lambda_1 = -2+3j$: $\phi_{1,d} = 135^o + (180^o - \arctan(5)) - 90^o - 180^o = -33.7^o$; $\phi_{2,d} = 33.7^o$. זווית הכניסה של אסימפטוטה לאפס $z_1 = -1+2j$: $\varphi_{1,e} = -45^o + \arctan(5) - 90^o + 180^o = 124^o$; $\varphi_{2,e} = -124^o$.

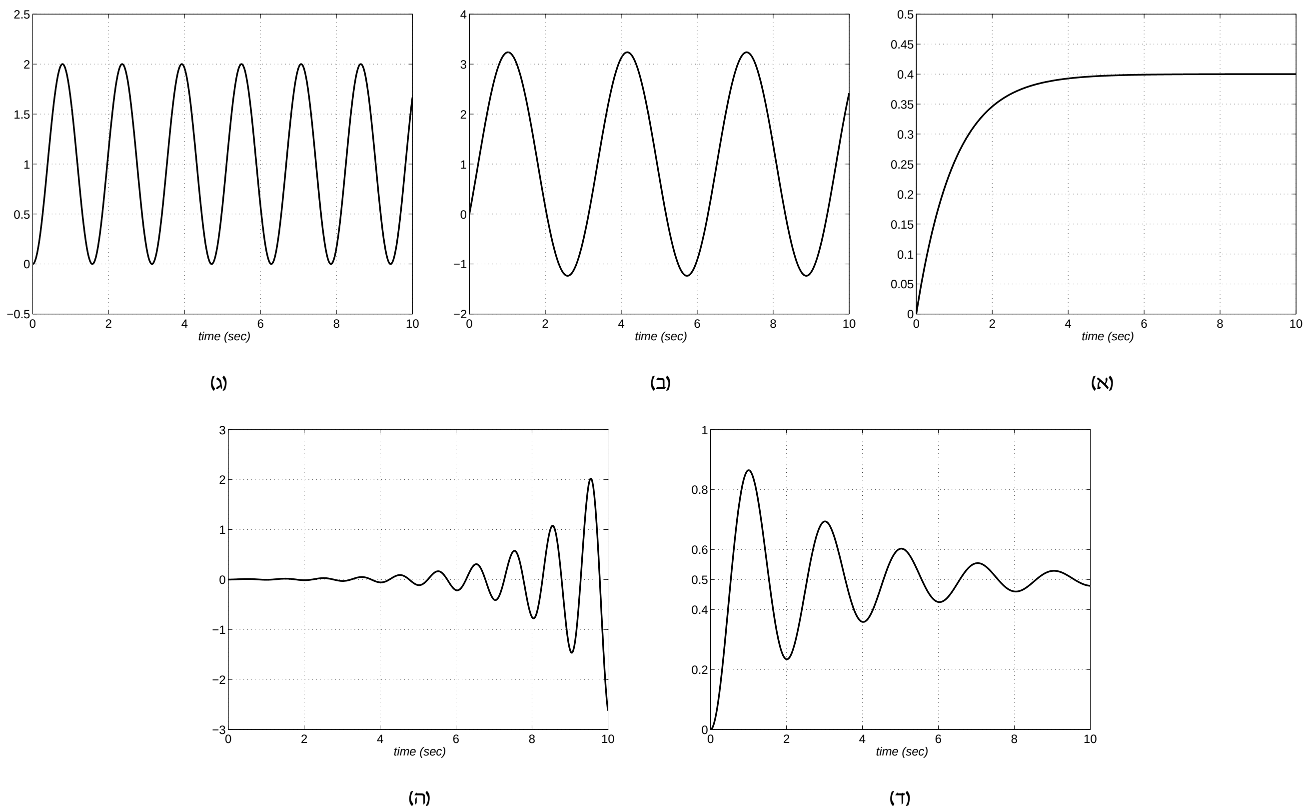
את המג"ש שמתקבל אפשר לראות בציור 1(ה).

שאלה מס' 2

1. ציור 3(א) מתאר מג"ש של מערכת מסוימת ביחס להגבר הבקר. איזו מבין התגובות שבציור 3 מתארת את תגובת המערכת בחוג סגור ל־$r(t) = 1(t)$? נמקו. אם נתון כי $\lim_{s\to 0} sP(s) = -1$, מהו הערך של K עבורו התקבלה תגובה זו.
2. איזו מבין התגובות שבציור 3 יכולה להיות שייכת למערכת בקרה של תהליך בעל מג"ש שבציור 2(ב) באמצעות בקר פרופורציונלי?
3. בציור 2(ג) נתון מג"ש ביחס להגבר הבקר. מהו יחס הריסון המקסימלי שניתן להשיג במערכת זו עם בקר פרופורציונלי? מהו זמן המחזור של תנודות בתגובה למדרגה בערך הרצוי במקרה זה?



ציור 2: מג"ש של פ"ת שונות.



ציור 3: תגובה של מערכות שונות לכניסת מדרגה בערך הרצוי.

פתרון לשאלה מס' 2

1. ציורים 3(א) ו־11 מתארים תגובות למדרגה של מערכות יציבות. בשני המקרים השגיאה במצב מתמיד לא אפס, לכן הן לא שייכות למערכת הנתונה בה יש אינטגרטור. ציור 12 מתאר תגובה של מערכת לא יציבה בעלת $\omega_d \approx 2\pi(\frac{\text{rad}}{\text{sec}})$: מתוך המג"ש רואים ש־$0(\frac{\text{rad}}{\text{sec}}) < \omega_d < 2(\frac{\text{rad}}{\text{sec}})$, כלומר המצב הזה בלתי אפשרי. ציורים 3(ב) ו־3(ג) מתארים תגובות למדרגה של מערכות על ספף יציבות. מתוך המג"ש הנתון, תדירות הקריטית של המערכת הנתונה היינה $\omega_{cr} = 2(\frac{\text{rad}}{\text{sec}})$, דהיינו זמן המחזור $T = \pi(\text{sec})$. זה מתאים לציור 3(ב). מהמג"ש אנו רואים שלתהליך יש אפס ב־-1 ושני קטבים ב־0 וב־4. נקבל: $P(s) = \frac{k_p(s+1)}{s(s-4)}$. נמצא את k_p:
$\lim_{s\to 0} sP(s) = -\frac{k_p}{4} = -1$, מכאן: $k_p = 4$. נמצא את K:
<u>דרך א'</u>: נשתמש בכלל המודול: $K|P(j\omega_{cr})| = 1$:

$$K = \frac{1}{|P(j\omega_{cr})|}\bigg|_{\omega_{cr}=2} = \left|\frac{j2(j2-4)}{4(j2+1)}\right| = \left|\frac{-4-j8}{j8+4}\right| = 1.$$

<u>דרך ב'</u>: פ"ת של המערכת בחוג הסגור:

$$G_{cl}(s) = \frac{CP}{1+CP} = \frac{\frac{Kk_p(s+1)}{s(s-4)}}{1+\frac{Kk_p(s+1)}{s(s-4)}} = \frac{Kk_p(s+1)}{s^2+(Kk_p-4)s+Kk_p}.$$

ספף היציבות מתקבל כאשר: $Kk_p = 4 \Leftarrow K = \frac{4}{k_p} = 1$.

2. מתוך המג"ש רואים כי מערכת זו לא ניתן לייצב עם בקר פרופורציונלי, לכן התגובה בציור 12 מתאימה.
<u>הערה</u>: ספף היציבות מתקבל כאשר $K \to \infty$, אך במקרה זה יש קוטב כפול ב־$\mp 5j \Leftarrow$ תגובה מתבדרת.

3. המשיק למגש עובר בזווית של $\alpha = 45^o$ כפי שרואים מהציור, לכן $\zeta_{max} = \cos(45^o) = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.7$. תדירות התנודות במקרה זה הינה החלק המדומה של נקודות ההשקה: $\omega_d \simeq 1(\frac{\text{rad}}{\text{sec}})$. דהיינו זמן מחזור הינו $T = 2\pi(\text{sec})$.

שאלה מס' 3

נתון תהליך בעל פונקצית תמסורת $P(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)^2}$. התהליך מבוקר בחוג הסגור באמצעות בקר פרופורציונלי $C(s) = K$, $K > 0$.

1. ציירו מג"ש ביחס להגבר הבקר. הוכיחו שהמג"ש הינו מעגל. מהו רדיוס המעגל?
2. מהי התדירות הקריטית של המערכת?
3. מצאו תחום ערכי K עבורם המערכת יציבה בחוג הסגור.
4. מצאו הטווחים של ζ, ω_d, ω_n שניתן להשיג במערכת זו?
5. עבור אות הייחוס $r(t) = 1(t)$ דרוש לקבל $|e_{ss}| < 0.1$. האם ניתן להשיג זאת עם הבקר הפרופורציונלי? אם כן, מהו ההגבר?

פתרון לשאלה מס' 3

1. <u>דרך א'</u>:

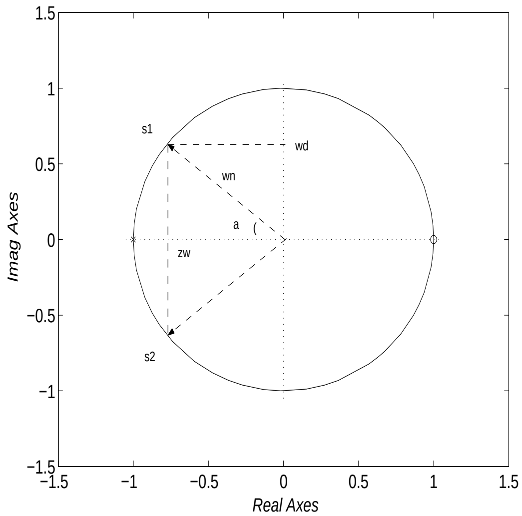
כדי להוכיח שהמג"ש הינו מעגל נבחר s_0 איזושהי נקודה ששייכת למג"ש (בלי הגבלת כלליות אפשר להניח שהחלק המדומה של s_0 הינו חיובי) כמתואר בציור 5(א). נפעיל את כלל הארגומנט:

$$2\psi - 2\phi = 180^o + 360^o l, \quad \text{כאשר} \quad l = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{1}$$

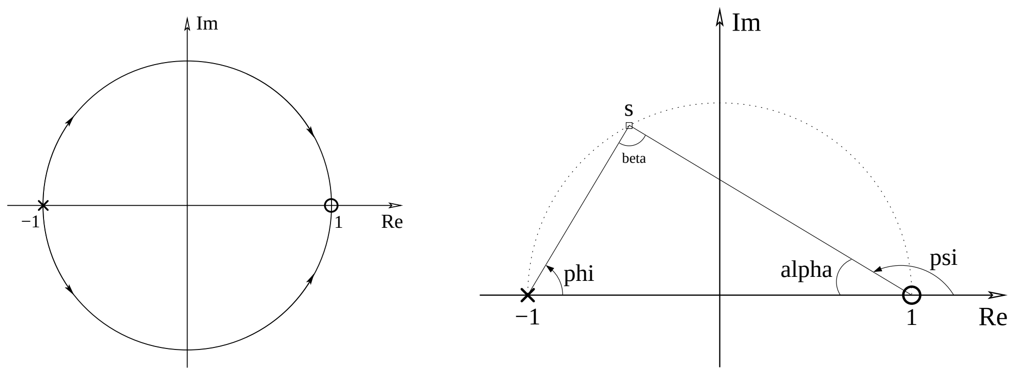
נגדיר $\alpha \doteq \phi$ ו־$\beta \doteq 180^o - \psi$. נציב במשוואה (1) ונקבל:

$$\alpha + \beta = 90^o - 180^o l \tag{2}$$

ברור α ו־β הן זוויות של משולש) כי $0^o < \alpha + \beta < 180^o$, לכן אם נבחר $l = 0$ משוויון (2) נקבל: $\alpha + \beta = 90^o$. לכן הזווית השלישית $\gamma = 180^o - \alpha - \beta = 180^o - 90^o = 90^o$. כלומר קיבלנו שהמשולש שקודקודיו ב־$(-1,0)$, $(0,1)$ ו־s_0 הוא משולש ישר זווית ($\gamma = 90^o$). מכאן ש־s_0 נמצא על מעגל שקוטרו 2 (הקטע $[-1,1]$) ומרכזו בראשית.



ציור 4: מג"ש של $P(s) = K\frac{(s-1)^2}{(s+1)^2}$



(ב) (א)

ציור 5: פתרון של שאלה 2

<u>דרך ב'</u>: פ"א של המערכת בחוג הסגור: $\chi_{cl}(s) = (s+1)^2 + K(s-1)^2 = (1+K)s^2 + 2(1-K)s + 1 + K$. שורשי הפ"א:

$$s_{1,2} = \frac{-2(1-K) \pm \sqrt{4(1-K)^2 - 4(1+K)^2}}{2(1+K)} = \frac{-(1-K) \pm 2j\sqrt{K}}{1+K}$$

$$\mathrm{Im}(s_{1,2})^2 + \mathrm{Re}(s_{1,2})^2 = \frac{(1-K)^2 + 4K}{(1+K)^2} = 1$$

מתקבל מעגל ברדיוס 1 עבור כל K.

2. $\omega_{cr} = 1$.

3. המערכת עוברת את ספ היציבות בתדירות $\omega_{cr} = 1$, ולכן $0 < K < 1 \Leftarrow K_{cr} = \frac{1}{|P(j\omega_{cr})|} = 1$

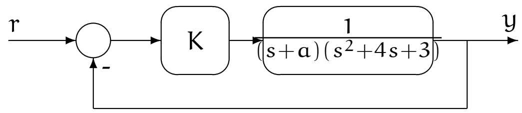
4. מתוך המג"ש: $0 < \zeta < 1$, $\omega_n = 1$, $0 < \omega_d < 1$.

5. $|e_{ss}| = |\frac{1}{1+K}| < 0.1$ כאשר $K > 9$, אבל המערכת בחוג סגור יציבה רק כאשר $|e_{ss}| < 0.1 \Leftarrow 0 < K < 1$ לא ניתן להשגה עם בקר פרופורציונלי בגלל מגבלות יציבות.

שאלה מס' 4

נתונה מערכת שמתוארת בציור 6.

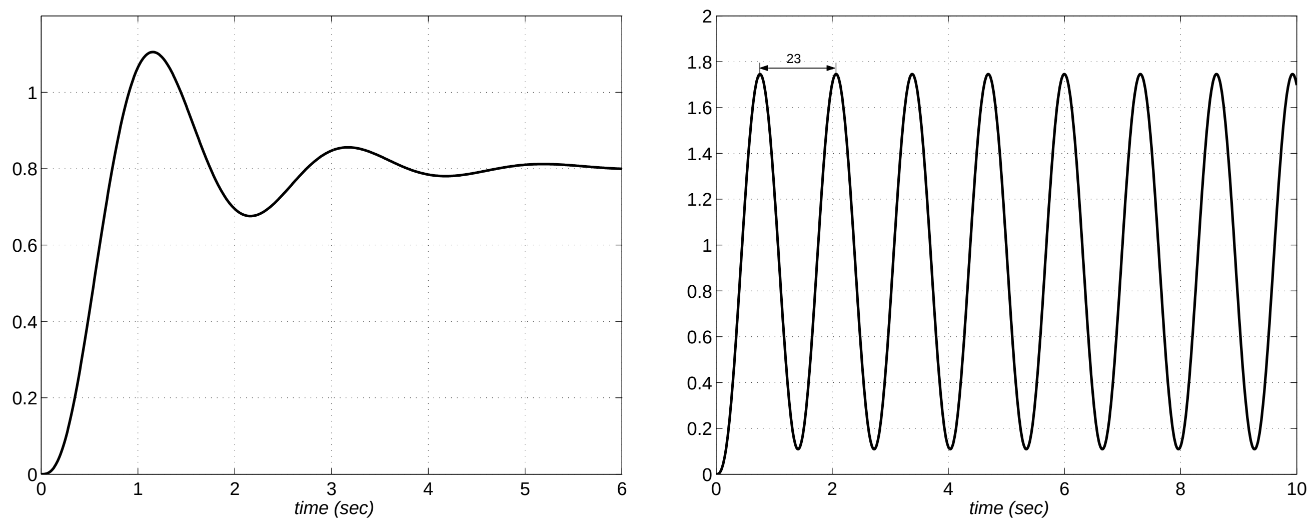
1. בציור 14 מתוארת תגובת המערכת לכניסת מדרגה עבור $K = 192$. מצאו את a.



ציור 6: דיאגרמת הבלוקים

2. ציירו מג"ש מקורב של המערכת.

3. בציור 15 מתוארת תגובת המערכת לכניסת מדרגה. בהנחה שהתנהגות של מערכת היא כמו התנהגות של מערכת מסדר שני, באיזה ערך של K התקבלה תגובה זו? למה ההנחה סבירה?



(ב) (א)

ציור 7: תגובת המערכת לכניסת מדרגה עבור K־ים שונים.

פתרון לשאלה מס' 4

1. $\omega_{cr} = \frac{2\pi}{T_{cr}} = \sqrt{23} \Leftarrow T_{cr} = \frac{2\pi}{\sqrt{23}}$. זאת אומרת, כאשר $K = 192$ המערכת בחוג סגור על סף יציבות ו־$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{23}$ הם קטביה. מתוך כלל המודול.

$$K_{cr} = \frac{1}{|P(j\omega_{cr})|} = |\sqrt{23}j + a||-23 + 4\sqrt{23}j + 3| = \sqrt{23 + a^2}\sqrt{400 + 368} = 192$$

$$a^2 + 23 = \frac{192^2}{768} = 48 \Rightarrow a = \pm 5$$

$$\chi_{cl}(s) = (s + a)(s^2 + 4s + 3) + K$$

תנאי הכרחי ליציבות $a > 0$ (אחרת המערכת אף פעם לא יציבה) $\Leftarrow a = 5$.

2.

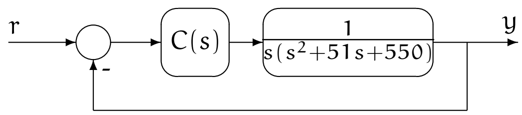
- פ"א של המערכת בחוג סגור: $\chi_{cl}(s) = D_p(s)D_c(s) + N_p(s)N_c(s) = (s + 5)(s^2 + 4s + 3) + K$.
- הקטבים של המערכת בחוג פתוח: $\lambda = -1, -3, -5$. היות ואין אפסים ל־$P(s)$, למג"ש יש שלושה ענפים שמסתיימים ב־∞.
- מרכז הכובד: $\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m} = \frac{-1-3-5}{3} = -3$. זווית האסימפטוטות: $\gamma = \frac{180^o + 360^o(l-1)}{n-m} \Leftarrow \gamma = \pm 60^o, 180^o$.
- נקודות הסתעפות: $\frac{d}{ds}\frac{1}{P(s)} = 3s^2 + 18s + 23 = 0$ $s_1 = -4.15$ (נקודה לא שייכת למג"ש) $s_2 = -1.845$

- תדירות המעבר: $\omega_{cr}=\sqrt{23}$. את המג"ש שמתקבל אפשר לראות בציור 9(א)

3. מהציור רואים ש־$e_{ss}=0.2$: $e_{ss}=\frac{1}{1+KP(0)}=\frac{1}{1+K/15}=0.2 \Rightarrow K=60$. ההנחה שהמערכת בחוג סגור מתנהגת כמו מערכת מסדר שני סבירה מאוד. היות והקוטב השלישי (הממשי) מאוד מהיר יחסית לשני הקטבים הקומפלקסים (על פי המג"ש, הקוטב הממשי תמיד קטן מ־-5). לכן השפעת הקוטב הממשי על התגובה זניחה כי היא דועכת מאוד מהר.

שאלה מס' 5

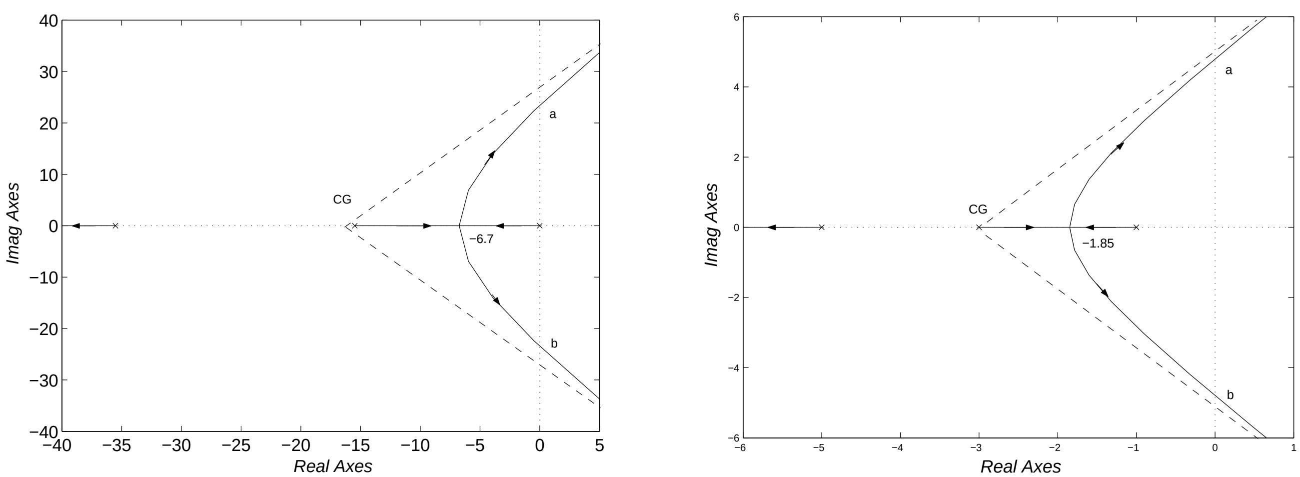
נתונה מערכת שמתוארת בציור 8.



ציור 8: דיאגרמת הבלוקים.

1. בהנחה שהבקר הינו בקר פרופורציונלי ציירו איכותית את המג"ש של המערכת.
2. חשבו הגבר אשר מביא את המערכת לסף יציבות. מהי תדירות התנודות במקרה זה (תדירות מעבר)?
3. אם ידוע כי בהגבר מסוים שנים מהקטבי החוג הסגור הם $-5\pm12j$, מצאו את שגיאת המצב המתמיד לכניסת ריצה בערך הרצוי.
4. הבקר כעת נתון על ידי $C(s)=k\frac{s+1}{s+p}$. חשבו את k ואת p כך שלחוג הסגור יהיה זוג קטבים כבסעיף 3.

פתרון לשאלה מס' 5



(א) מג"ש של $KP(s)=K\frac{1}{(s+5)(s^2+4s+3)}$

(ב) מג"ש של $KP(s)=\frac{K}{s(s^2+51s+550)}$

ציור 9: מג"שים לשאלות 4 ו־5

1.
- פ"א של המערכת בחוג סגור: $\chi_{cl}(s)=D_p(s)D_c(s)+N_p(s)N_c(s)=s(s^2+51s+550)+K$.
- הקטבים של המערכת בחוג פתוח: $\lambda=0,\ -15.5,\ -35.5$. היות ואין אפסים ל־$P(s)$, למג"ש יש שלושה ענפים שמסתיימים ב־∞.
- מרכז הכובד: $\sigma=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}=\frac{0-15.5-35.5}{3}=-17$. זווית האסימפטוטות: $\gamma=\frac{180^o+360^o(l-1)}{n-m}\Rightarrow\gamma=\pm60^o,\ 180^o$.
- נקודות הסתעפות: $\frac{d}{ds}\frac{1}{P(s)}=\frac{d}{ds}(s^3+51s^2+550s)=3s^2+102s+550=0$ $s_1=-27.34$ (נקודה שאינה שייכת למג"ש) $s_2=-6.7$. את המג"ש שמתקבל אפשר לראות בציור 9(ב).

2. תדירות המעבר: $P(j\omega) = \frac{1}{j\omega(550-\omega^2+51\omega j)} \Rightarrow \angle P(j\omega) = -90 - \arctan\frac{51\omega}{550-\omega^2} = -180 \Rightarrow \omega_{cr} = \sqrt{550}$.
$K_{cr} = \frac{1}{|P(j\omega_{cr})|} = \frac{1}{|P(j\sqrt{550})|} = \frac{|j\sqrt{550}|\cdot|550-550+51\cdot j\sqrt{550}|}{1} = \sqrt{550}\cdot 51\cdot\sqrt{550} = 28050$

3. $K = \frac{1}{|P(-5+12j)|} = |-5+12j||(-5+12j)^2+51(-5+12j)+550| = 13|176+492j| \approx 6793$. נמצא את שגיאת מצב מתמיד עבור כניסת ריצה בערך הרצוי $r(t) = t1(t) \Rightarrow B = CP = \frac{K}{s(s^2+51s+550)}$: מערכת מסוג 1 $\Rightarrow$ $e_{ss} = \frac{1}{k_v} = \frac{550}{K} \approx 0.081$.

4. נתון $P(s) = \frac{1}{s(s^2+51s+550)}$ ו-$C(s) = k\frac{s+1}{s+p}$. מתוך כלל הארגומנט:

$$\angle(s+1) - \angle(s) - \angle(s+p) - \angle(s^2+51s+550) = 180^o$$

נציב $s = -5+12j$ ונקבל:

$$\tan^{-1}(\tfrac{12}{-4}) - \tan^{-1}(\tfrac{12}{-5}) - \tan^{-1}(\tfrac{12}{-5+p}) - \tan^{-1}(\tfrac{492}{176}) = 180^o \Rightarrow \tfrac{12}{-5+p} = \tan(-254.5^o) \Rightarrow p = 1.672$$

ולבסוף נקבל מתוך כלל המודול: $k = \frac{1}{|CP(s=-5+12j)|} = 6793\frac{|-5+12j+1.672|}{|-5+12j+1|} \approx 6688$.

שאלה מס' 6

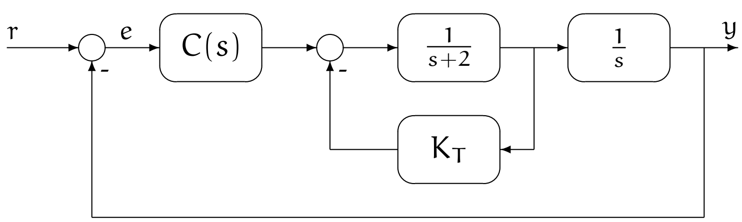
נתון תהליך בעל n קטבים ו-m אפסים. נתון שכל הקטבים וכל האפסים של התהליך נמצאים ב-OLHP. התהליך מבוקר בחוג הסגור באמצעות בקר פרופורציונלי $C(s) = K$. העזרו בשיקולי המג"ש והראו כי אם $n - m > 2$ אזי תמיד קיים ערך של K שמעליו החוג הסגור אינו יציב.

פתרון לשאלה מס' 6

למג"ש יש $n-m$ אסימפטוטות בזוויות $\gamma = \frac{180^o+360^o(l-1)}{n-m}$. עבור $l = 0,1$ נקבל מתקבלת זווית $\gamma_{0,1} = \frac{\pm 180^o}{n-m}$. שהיא זווית קטנה מ-$90^o$ כאשר $n-m > 2$. ולכן הענפים לאורך אסימפטוטות אלה בהכרח מסתיימים ב-RHP.

שאלה מס' 7

בציור 10 מתוארת מערכת בקרת מיקום.



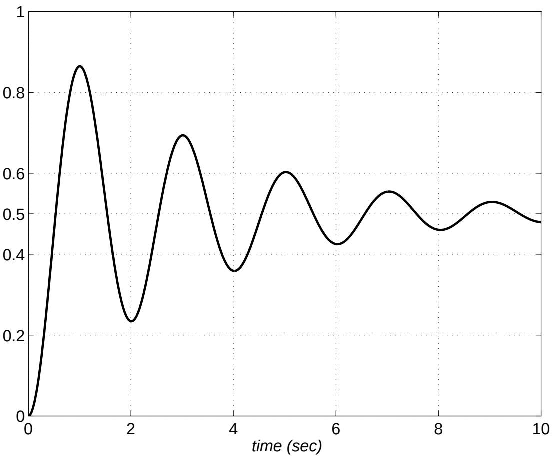
ציור 10: דיאגרמת בלוקים.

1. הבקר $C(s)$ היינו בקר פרופורציונלי בעל הגבר K והטכומטר אינו מותקן ($K_T = 0$). ציירו מג"ש של המערכת ביחס ל-K וציינו עליו את קטבי החוג הסגור עבור $K = 4$.
2. עבור הקטבים הנ"ל העריכו את זמן העליה, את זמן הרגיעה ואת תגובת היתר של תגובת המערכת.
3. עם בקר $C(s) = 4$ מחברים את הטכומטר בעל הגבר K_T כמוראה בציור 2(א). ציירו מג"ש של המערכת כפונקציה של הגבר הטכומטר. הראו שקטעי המג"ש שאינם על הציר הממשי נמצאים על פני מעגל.
4. מהמג"ש מצאו את K_T שיבטיח $OS \approx 0.05$ ($\zeta \approx 0.7$). מהם קטבי החוג הסגור עם K_T הנ"ל? העריכו את זמן העליה ואת זמן הרגיעה של החוג הסגור.
5. מציעים לבטל את הטכומטר ולהציב כבקר $C(s)$ בקר מסוג PD הנתון על ידי $C(s) = K(s+a)$. השתמשו בשיקולי המג"ש ומצאו את a ואת K שיבטיחו לחוג הסגור אותם קטבים כמו בסעיף 4.

פתרון לשאלה מס' 7

1. נבנה מג"ש:
   - פ"א של המערכת בחוג סגור: $\chi_{cl}(s) = s(s+2)+K$.
   - למערכת בחוג פתוח יש 2 קטבים $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$. היות ואין אפסים ל־$P(s)$, למג"ש יש 2 ענפים שמסתיימים ב־∞.
   - מרכז הכובד: $\sigma = \frac{[0+(-2)]-[0]}{2} = -1$. זווית האסימפטוטות: $\gamma = \frac{180^o+360^o(l-1)}{n-m} \Rightarrow \gamma_{1,2} = \pm 90^o$.
   - נקודות הסתעפות: $\frac{d}{ds}\frac{1}{P(s)} = N\frac{dD}{ds} - D\frac{dN}{ds} = 2s+2 = 0 \Rightarrow s=-1$

את המג"ש שמתקבל אפשר לראות בציור 11.



ציור 11: מג"ש של $KP(s) = K\frac{1}{s(s+2)}$.

נחשב את קטבי החוג הסגור עבור $K=4$: $\chi_{cl}(s)|_{K=4} = s(s+2)+4 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}j \approx -1 \pm 1.73j$.

2. מהמג"ש שקיבלנו בסעיף הקודם נקבל: $\omega_d = \sqrt{3}$, $\omega_n = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$. $\sqrt{1-\zeta^2} = \frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \zeta = 0.5$. נקבל: $OS = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.163$, $t_s \approx \frac{4.6}{\zeta\omega_n} = 4.6\,(\mathrm{sec})$, $t_r = \frac{\pi - \arccos(\zeta)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.21\,(\mathrm{sec})$.

3. פ"ת של החוג הפנימי:

$$G_{in}(s) = \frac{\frac{1}{s+2}}{1+\frac{K_T}{s+2}} = \frac{1}{s+2+K_T}$$

פ"ת של החוג החיצוני:

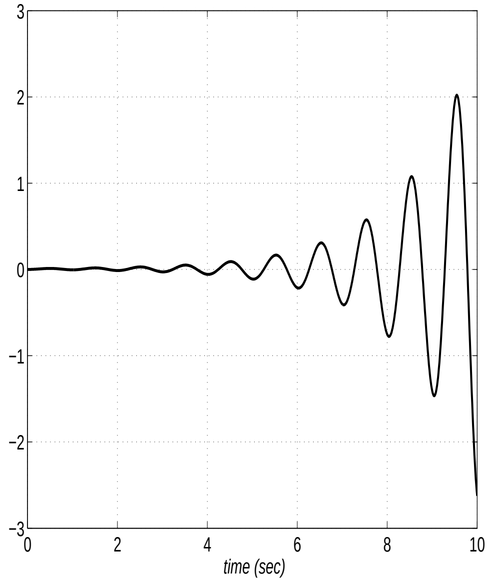
$$G_{cl}(s) = \frac{\frac{K}{s(s+2+K_T)}}{1+\frac{K}{s(s+2+K_T)}} = \frac{K}{s^2+(2+K_T)s+K}$$

פ"א של המערכת בחוג סגור עבור $K=4$:

$$\chi_{cl}(s)|_{K=4} = s^2+(2+K_T)s+4 = 0 \Rightarrow \chi_{cl,1}(s) = 1+K_T\frac{s}{s^2+2s+4}$$

המג"ש עבור $\tilde{G}(s) = \frac{s}{s^2+2s+4}$ יתאר את קטבי המערכת המקורית כתלות ב־K_T. נבנה מג"ש:

- פ"א של המערכת בחוג סגור: $\chi_{cl}(s) = s^2+2s+4+K_Ts$.
- למערכת בחוג פתוח 2 קטבים ($\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$) ואפס אחד ($z_1 = 0$), למג"ש יש ענף אחד שמסתיים באינסוף.
- זווית עזיבה מהקוטב $\lambda = 1+\sqrt{3}j$: $\varphi_d = 120^o - 90^o - 180^o = -150^o$
- נקודות הסתעפות: $\frac{d}{ds}\frac{1}{P(s)} = s^2+2s+4-2s^2-2 = -s^2+4 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm 2$. הנקודה $+2$ לא מתאימה כי היא לא שייכת למג"ש.



ציור 12: מג"ש של $K_T\tilde{G}(s) = K_T\frac{s}{s^2+2s+4}$

המג"ש המתקבל נתון בציור 12.

נחשב את קטבי החוג הסגור כפונקציה של K_T: $\Leftarrow s^2+(2+K_T)s+4=0$

$$s_{1,2} = -\frac{2+K_T}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2+K_T)^2-16}$$

אם $-6<K_T<2$ הקטבים של החוג הסגור קומפלקסיים והמג"ש לא על הציר הממשי. במקרה זה:

$$s = -\frac{2+K_T}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{16-(2+K_T)^2}$$

$$\mathrm{Re}^2(2)+\mathrm{Im}^2(s) = \left(\frac{2+K_T}{2}\right)^2 + 4 - \left(\frac{2+K_T}{2}\right)^2 = 4$$

דהיינו, הקטבים הקומפלקסיים נמצאים על מעגל בעל רדיוס 2.

4. $\Leftarrow \sqrt{|\mathrm{Im}(s)|^2+|\mathrm{Re}(s)|^2} = \sqrt{2}|\mathrm{Re}(s)| = 2 \Leftarrow |\mathrm{Im}(s)| = |\mathrm{Re}(s)| \Leftarrow \alpha = \arccos(0.7) \approx 45^o \Leftarrow \zeta = 0.7$
$s = -\sqrt{2}\pm\sqrt{2}j$. נקבל: $K_T = 2\sqrt{2}-2 = 0.828 \Leftarrow |\mathrm{Re}(s)| = \frac{2+K_T}{2} = \sqrt{2}$. $t_r = \frac{\pi-\arccos(\zeta)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.64\,(\mathrm{sec})$, $t_s \approx \frac{4.6}{\zeta\omega_n} = 3.29\,(\mathrm{sec})$.

5. פ"א של החוג הסגור: $(s+a)G=-1 \Leftarrow 1+CG=0$. אנו רוצים למקם קטבים ב־$s_{1,2} = -\sqrt{2}\pm\sqrt{2}j$. נקבל:

$$(s+a)G(s)|_{s=-\sqrt{2}+\sqrt{2}j} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}j+a}{(2-\sqrt{2}+\sqrt{2}j)(-\sqrt{2}+\sqrt{2}j)} = \frac{(8-2\sqrt{2}a-4\sqrt{2})+(4a-2\sqrt{2}a-4\sqrt{2})j}{16\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}$$

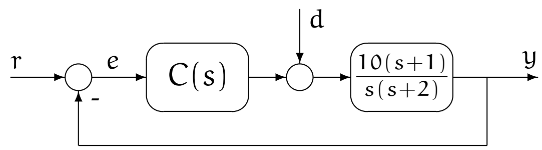
נשתמש בכלל הארגומנט :

$$\angle(s+a)G(s)|_{s=-\sqrt{2}+\sqrt{2}j} = \arctan\left(\frac{4a-a2\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{8-4\sqrt{2}-2\sqrt{2}a}\right) = -180 \Rightarrow \frac{4a-a2\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{8-4\sqrt{2}-2\sqrt{2}a} = 0$$

נקבל: $a = \frac{2}{\sqrt{2}-1} \Leftarrow (4-2\sqrt{2})a = 4\sqrt{2}$. לפי כלל המודול: $K = \frac{1}{|CG(s_{1,2})|} = 2(\sqrt{2}-1)$. ניתן לקבל את התוצאה גם באמצעות השוואה של פ"א: $K+2 = 2\sqrt{2} \Leftarrow s^2+2\sqrt{2}s+4 = s^2+2s+Ks+Ka$, $Ka = 4$.

שאלה מס' 8

בציור 13 מתוארת מערכת בחוג סגור.



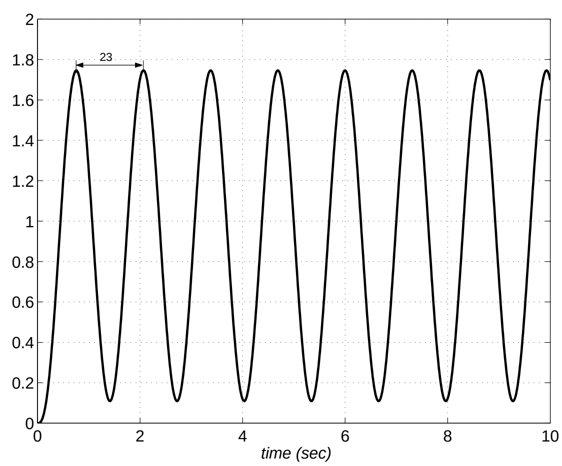
ציור 13: דיאגרמת בלוקים.

1. דרושה מערכת המתנהגת כמערכת מסדר שני עם יחס ריסון $\zeta = 0.55$. האם ניתן להשיג זאת באמצעות בקר פרופורציונלי $C(s) = K$? הסבירו באמצעות המג"ש. ציירו איכותית את תגובת המערכת לשינוי מדרגה בערך הרצוי עבור ערכים שונים של K. ציינו מהו ערך התגובה במצב מתמיד ואיך משתנה התגובה עם הגדלת K.
2. הוצע להשתמש בבקר $C(s) = \frac{K(s+b)}{s+a}$. חשבו את a, b, K הדרושים על מנת לקבל את קטבי החוג הסגור ב־(-3) וב־$(-1 \mp 1.5j)$. ציירו מג"ש איכותי וסמנו עליו את נקודות התכנון.

   (נתון: $s^4 + 5s^3 + 7.75s^2 - 4.5s - 10.5 = (s-1.04)(s+1.26)(s+2.39+1.5j)(s+2.39-1.5j)$).
3. חשבו את יחס הריסון ואת התדירות הטבעית המרוסנת של הקטבים הדומיננטיים.
4. מצאו את שגיאת המצב המתמיד להפרעה קבועה $d(t) = 3 \cdot 1(t)$ כאשר הבקר הוא זה שבסעיף 2.

פתרון לשאלה מס' 8

1. מהמג"ש רואים שהקטבים של המערכת בחוג סגור תמיד על הציר הממשי עבור כל K ולכן לא ניתן להשיג זאת באמצעות בקר פרופורציונלי.



ציור 14: מג"ש של $KP(s) = K\frac{10(s+1)}{s(s+2)}$

תגובת המדרגה: במצב מתמיד $y_{ss} = r$ בגלל האינטגרטור בתהליך. ככל ש־K גדל, הקטבים של החוג הסגור זזים שמאלה על הציר הממשי השלילי ולכן התגובה מהירה יותר (ראה ציור מס' 15). עם הגדלת K הקוטב הדומיננטי הולך ומתקרב לאפס ב־(-1) והקוטב הנוסף מתרחק שמאלה. כאשר K גדול מאד הקוטב הראשון מתקרב לאפס ב־(-1) והשפעתו על התגובה נעלמת (עקב "כמעט" צמצום עם האפס) והקוטב השני מתקרב ל־$-\infty$. המשמעות היא שהמערכת בחוג הסגור מתנהגת "כמעט" כמו הגבר סטטי.

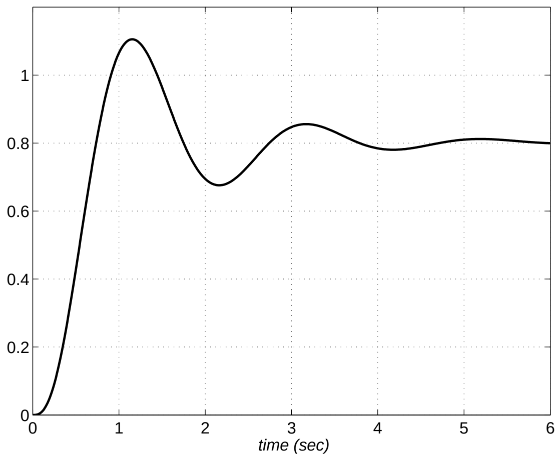
2. פ"א של המערכת בחוג סגור:

$$\begin{aligned}\chi_{cl}(s) &= (s+a)s(s+2) + K(s+b)10(s+1) = s^3 + (a+2)s^2 + 2as + 10K(s^2 + (b+1)s + b) \\ &= s^3 + (a+2+10K)s^2 + (2a + 10Kb + 10K)s + 10Kb\end{aligned}$$

רוצים לקבל פ"א: $\chi_{cl}(s) = (s+3)(s+2s+3.25) = s^3 + 5s^2 + 9.25s + 9.75$ מתוך השוואת מקדמים נקבל:

$$\begin{cases} a + 2 + 10K = 5 \\ 2a + 10Kb + 10K = 9.25 \\ 10Kb = 9.75 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -3.5 \\ K = 0.65 \\ b = 1.5 \end{array}$$

ניתן לקבל את התוצאה גם באמצעות כללי מודול וארגומנט. כעת נבנה מג"ש:



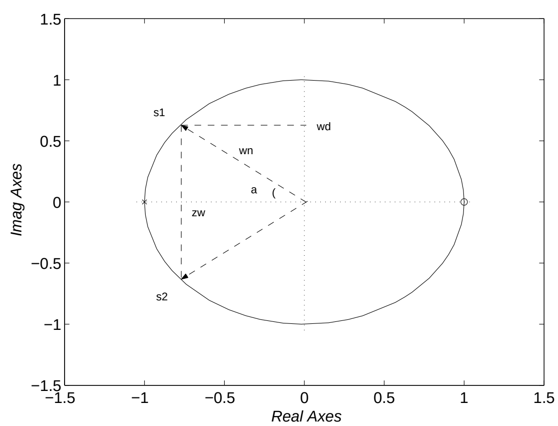
ציור 15: תגובת המדרגה

- פ"א של המערכת בחוג סגור: $\chi_{cl}(s) = (s-3.5)(s+2)s + 10K(s+1.5)(s+1)$.
- למערכת בחוג פתוח יש 3 קטבים $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3.5$ ושני אפסים: $z_1 = -1.5$, $z_2 = -1$. $\Leftarrow$ למג"ש יש ענף אחד שמסתיים ב־∞.
- נקודות הסתעפות:

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{P(s)} = \frac{10(3s^2-3s-7)(s^2+2.5s+1.5)-10(2s+2.5)(s^3-1.5s^2-7s)}{100(s^2+2.5s+1.5)^2} = \frac{s^4+5s^3+7.75s^2-4.5s-10.5}{10(s^2+2.5s+1.5)^2} = 0$$

נקבל 4 פתרונות: $s_1 = 1.04$ – נקודת היציאה; $s_2 = -1.26$ – נקודת הכניסה; $s_{3,4} = -2.39 \pm 1.5j$ – לא שייכות למג"ש.

המג"ש עם הנקודות הנ"ל מוראה בציור 16.



ציור 16: מג"ש של $K\frac{10(s+1)(1+1.5)}{s(s-3.5)(s+2)}$.

3. הקטבים הדומיננטיים : $s_{1,2} = -1 \pm 1.5j \Leftarrow \omega_d = 1.5$, $\omega_n = \sqrt{1.5^2+1} \approx 1.8$. $\sqrt{1-\zeta^2} = \frac{\omega_d}{\omega_n} \Leftarrow \zeta = 0.555$.
4. נמצא את השגיאה במצב מתמיד עבור ההפרעה $d(t) = 3 \cdot 1(t)$: $F(s) = P(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+2)}$, $B(s) = C(s) = \frac{0.65(s+1.5)}{s-3.5}$, $R = -1 \Leftarrow$ מערכת מסוג 0 $\Leftarrow e_{ss} = \frac{R(0)}{F^{-1}(0)+k_p} = \frac{3}{0+0.2786} \approx 10.77$.

שאלה מס' 9

רובוט בעל פ"ת

$$P(s) = \frac{s+\alpha}{s^3+(1+\alpha)s^2+(\alpha-1)s+(1-\alpha)}$$

מבוקר באמצעות משוב יחידה עם $C(s)=1$. דרוש שהשגיאה במצב מתמיד לכניסת מדרגה בערך הרצוי תהיה קטנה מ־10% מגודל הכניסה.

1. מהו תחום ערכי α המבטיח יציבות החוג הסגור?
2. קבעו את תחום ערכי α המקיים הדרישה לשגיאה במצב המתמיד. מהו α^* המביא לשגיאת מצב מתמיד מינימלית?
3. ציירו מג"ש של החוג הסגור כפונקציה של α. (נתון כי שורשי המשוואה $x^3+x^2+1=0$ הם: $x_{1,2}=0.233\pm0.793j$ ו־$x_3=-1.47$, וש־$(s^4+2s^3+s^2-2s-1=(s-0.88)(s+0.47)(s-1.21+0.98j)(s-1.21-0.98j)$).
4. עבור α^* מסעיף 2, השתמשו במג"ש על מנת להעריך ולצייר את תגובת המדרגה של החוג הסגור. מהם תגובת היתר, זמן העליה וזמן הרגיעה של תגובה זו? הסבר.

   <u>רמז</u>: כאשר $\alpha=\alpha^*$ אחד מקטבי החוג הסגור בעל חלק ממשי -0.12.

פתרון לשאלה מס' 9

1. פ"א של המערכת בחוג סגור: $\chi_{cl}(s)=s^3+(1+\alpha)s^2+\alpha s+1$. נמצא את α עבורם המערכת יציבה בעזרת קריטריון ראוט:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & \alpha \\ s^2 & 1+\alpha & 1 \\ \hline s^1 & \frac{\alpha^2+\alpha-1}{\alpha+1} & \\ s^0 & 1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \{\alpha>-1\}\bigcap\{\alpha<\tfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\alpha>\tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\} \quad \Rightarrow \quad \alpha>\tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx0.62$$

2. נמצא את השגיאה במצב מתמיד עבור כניסת מדרגה בערך הרצוי: המערכת מסוג 0 $\Leftarrow$ $e_{ss}=\frac{1}{1+P(0)}=\frac{1}{1+\alpha/(1-\alpha)}=1-\alpha$.
   רוצים $|e_{ss}|<0.1$ $\Leftarrow$ $\alpha\in(0.9,1.1)$. שגיאה אפס מתקבלת כאשר $\alpha^*=1$.
3. פ"א של המערכת בחוג סגור: $\chi_{cl}(s)=s^3+(1+\alpha)s^2+\alpha s+1$. נקבל:

$$\chi_{cl,\alpha}(s)=\frac{\chi_{cl}(s)}{s^3+s^2+1}=1+\alpha\frac{s(s+1)}{s^3+s^2+1}$$

נצייר מג"ש:

- למערכת בחוג פתוח יש 3 קטבים לפי הנתון: $\lambda_{1,2}=0.233\pm j0.793$, $\lambda_3=-1.47$ ושני אפסים $z_1=0$, $z_2=-1$:
  למג"ש יש ענף אחד שמסתיים באינסוף.
- נקודות הסתעפות:

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{P(s)}=N\frac{dD}{ds}-D\frac{dN}{ds}=\frac{-(2s+1)(s^3+s^2+1)+(s^2+s)(3s^2+2s)}{(s^2+s)^2}=\frac{s^4+2s^3+s^2-2s-1}{(s^2+s)^2}$$

נקבל 4 פתרונות:$s_{1,2}=-1.21\pm0.98j$ – לא שייכות למג"ש, $s_3=0.88$ לא שייכת למג"ש, $s_4=-0.47$ – נקודת הכניסה.

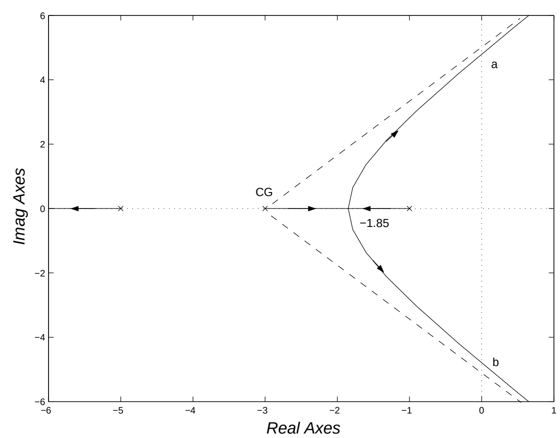
- זווית היציאה של המ"גש מקוטב $0.233+0.793j$:

$$\phi_{d,1}=\arctan(\tfrac{0.793}{0.233})+\arctan(\tfrac{0.793}{1.233})-\arctan(\tfrac{0.793}{0.233+1.47})-90^o+180^o=171.4^o,$$

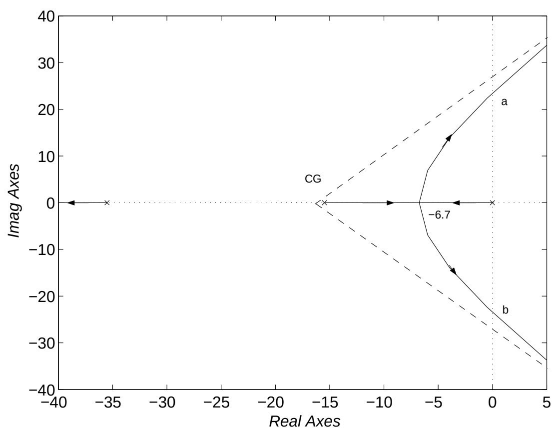
זווית היציאה של המ"גש מקוטב $0.233-0.793j$: $\phi_{d,2}=-171.4^o$.

המג"ש שמתקבל נתון בציור 17(א).

4. כאשר $\alpha=\alpha^*$ למערכת בחוג סגור יש קוטב אחד ממשי שלילי רחוק מהציר המדומה ושני קטבים מרכבים דומיננטייםבערך ב־ $s_{1,2}=-0.12\pm0.75j$. כמו כן כאשר $\alpha=\alpha^*$ אין שגיאת מצב מתמיד לכניסת מדרגה בערך הרצוי. $\zeta\omega_n=0.12$, $\omega_d=0.75$ $\Leftarrow$ $\omega_n=0.76$, $\zeta=0.16$. נקבל: $OS=e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}=0.6$, $t_s=\frac{4.6}{\zeta\omega_n}=38.3\,(sec)$, $t_r=\frac{\pi-\arccos(\zeta)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=2.3\,(sec)$, $T_p=\frac{\pi}{\omega_d}=4.2\,(sec)$. תגובת המדרגה המדויקת של המערכת בחוג סגור ותגובת המערכת המחושבת רק לפי קטבים הדומיננטיים אפשר לראות בציור מס' 17(ב).



(א) מג"ש של $K\frac{s(s+1)}{s^3+s^2+1}$



(ב) תגובות המדרגה

ציור 17: