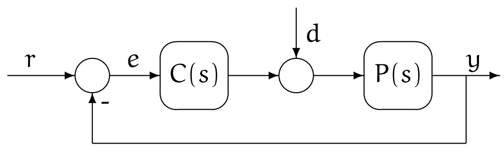
הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, הפקולטה להנדסת מכונות

TECHNION — Israel Institute of Technology, Faculty of Mechanical Engineering

מבוא לבקרה (034040)

גליון תרגילי בית מס' 5



ציור 1: דיאגרמת הבלוקים

שאלה מס' 1

נתונה המערכת המתוארת בציור 1.

1. מהי שגיאת המצב המתמיד כאשר $P(s)=\frac{s+1}{(s-2)(s+3)}$, $C(s)=1-\frac{3}{s+1}$, $r(t)=1(t)$ ו־$d(t)=0$?
2. מהי שגיאת המצב המתמיד כאשר $P(s)=\frac{s+10}{(s+1)^2}$, $C(s)=\frac{s+10}{s+1}$, $r(t)=1(t)$ ו־$d(t)=0$?
3. נתון כי: $P(s)=\frac{1}{(s+a)(s+3)}$, $C(s)=1$, $r(t)=1(t)$ ו־$d(t)=0$. חשב את a אם נתון כי שגיאת המצב המתמיד הינה:
   (א) $e_{ss}=0.75$
   (ב) $e_{ss}=0$
4. נתון כי: $P(s)=\frac{1}{s(\tau s+1)(s+2)}$, $C(s)=K$.
   (א) האם יתכן מצב בו שגיאת המצב המתמיד הינה $e_{ss}=0.1$ כאשר $r(t)=0$ ו־$d(t)=1(t)$?
   (ב) מהי שגיאת המצב המתמיד כאשר $r(t)=0$ ו־$d(t)=t\cdot 1(t)$?
   (ג) חשב את K אם נתון כי שגיאת המצב המתמיד הינה $e_{ss}=-0.1$ כאשר $r(t)=0$ ו־$d(t)=1(t)$. מה ניתן לומר על τ במקרה זה?
   (ד) האם τ משפיע על שגיאת המצב המתמיד כאשר:
      i. $r(t)=t1(t)$ ו־$d(t)=0$.
      ii. $r(t)=0$ ו־$d(t)=t1(t)$.

   הסבר.
5. נתון כי: $P(s)=\frac{1}{0.2(0.2s+1)}$, $C(s)=\frac{2(0.5s+1)}{s}$. מצא את שגיאת המצב המתמיד עבור הכניסות הבאות:
   (א) $r(t)=2$, $d(t)=0.5$.
   (ב) $r(t)=2t$, $d(t)=0.5$.
   (ג) $r(t)=2$, $d(t)=0.5t$.
   (ד) $r(t)=2t$, $d(t)=0.5t$.

פתרון לשאלה מס' 1

1. $C(s)=\frac{s-2}{s+1}$ $\Leftarrow$ החוג הסגור לא יציב (יש צמצום לא יציב) $\Leftarrow$ $e_{ss}\to\infty$.
2. פ"א של המערכת בחוג סגור: $\chi_{cl}(s)=(s+1)^3+(s+10)^2=s^3+4s^2+23s+101$. נבדוק את היציבות לפי קריטריון ראוט:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 23 \\ s^2 & 4 & 101 \\ \hline s^1 & -9/4 & \\ s^0 & 101 & \end{array}$$

יש החלפת סימן $\Leftarrow$ החוג הסגור לא יציב $\Leftarrow$ $e_{ss} \to \infty$.

3. נמצא את המשוואה האופיינית של החוג הסגור:

$$\chi_{cl}(s) = s^2 + (a+3)s + 3a + 1 \quad \Longleftarrow \quad \frac{e}{r} = \frac{1}{1+P}$$

החוג הסגור יציב עבור $a > -\frac{1}{3}$. במקרה זה: $e_{ss} = \frac{1}{1+\frac{1}{3a}} = \frac{3a}{3a+1}$.

- כאשר: $a = 1 \Leftarrow e_{ss} = 0.75$
- כאשר: $a = 0 \Leftarrow e_{ss} = 0$ (אינטגרטור ב־P)

4. נמצא את פ"ת $\frac{e}{r}$ ו־$\frac{e}{d}$:

$$\frac{e}{r} = \frac{1}{1+CP} = \frac{s(\tau s+1)(s+2)}{s(\tau s+1)(s+2)+K} \qquad \frac{e}{d} = -\frac{P}{1+CP} = \frac{-1}{s(\tau s+1)(s+2)+K}.$$

הפ"א של המערכת בחוג סגור: $\chi_{cl}(s) = \tau s^3 + (2\tau+1)s^2 + 2s + K$. נבדוק את היציבות לפי קריטריון ראוט:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & \tau & 2 \\ s^2 & 2\tau+1 & K \\ \hline s^1 & 2 - \frac{\tau K}{2\tau+1} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

בהנחה ש־$\tau > 0$ נקבל ש־$\chi_{cl}(s)$ יציב אמ"מ $\frac{2}{\tau} + 4 > K > 0$.

(א) אם החוג הסגור יציב: $T_{ed}(0) = -\frac{1}{K}$. היות ו־$K > 0$ (אחרת $e_{ss} \to \infty$) $e_{ss} < 0$. לא ייתכן $e_{ss} = 0.1$.

(ב) $e_{ss} = \infty$ (אין אפילו אינטגרטור אחד בבקר).

(ג) $e_{ss} = -0.1 \Leftarrow K = 10 \Leftarrow \frac{1}{3} > \tau > 0$ (אחרת החוג הסגור לא יציב).

(ד) מטבלה בשקף 18 פרק מס' 5:

i. מע' מסוג 1 $\Leftarrow$ עבור כניסת ריצה $e_{ss} = \frac{\alpha}{K_v} = \frac{2}{K}$. בוודאי ש־$\tau$ משפיע. היות והחוג הסגור יציב רק עבור $\frac{2}{\tau} + 4 > K > 0$, τ קובע את השגיאה המינימלית במצב מתמיד.

ii. פ"ת מ־d ל־e מסוג $0 \Leftarrow$ עבור כניסת ריצה $e_{ss} \to \infty$. τ לא משפיע.

5. כדי למצוא את e_{ss} נשתמש בטבלאות שבשקפים 18־19 בפרק 5.

- שגיאת המצב המתמיד עקב הכניסה בערך הרצוי: יש ב־CP אינטגרטור, ולכן $\frac{e}{r}$ מע' מסוג 1: עבור כניסה $r(t) = 2$ נקבל $e_{ss} = 0$ ועבור $r(t) = 2t$ נקבל $e_{ss} = 0.2$.
- שגיאה במצב מתמיד עקב כניסת ההפרעה: $R = -1$, $F = P$, $B = C \Leftarrow$ מע' מסוג 1: עבור כניסה $d(t) = 0.5$ נקבל $e_{ss} = 0$ ועבור $d(t) = 0.5t$ נקבל $e_{ss} = -0.25$.

המערכת ליניארית, לכן ניתן לעשות סופרפוזיציה: $e_{ss} = e_{ss}^r + e_{ss}^d$.

(א) $e_{ss} = 0 + 0 = 0$.

(ב) $e_{ss} = 0 + 0.2 = 0.2$.

(ג) $e_{ss} = -0.25 + 0 = -0.25$.

(ד) $e_{ss} = -0.25 + 0.2 = -0.05$.

שאלה מס' 2

נתונה סכימת הבקרה בציור 1. בכל אחד מהסעיפים הבאים עליכם לקבוע את מספר האינטגרטורים <u>המינימלי</u> האפשרי ב־$P(s)$ ו־$C(s)$ כך שתתקבלנה התגובות הבאות:

א. תגובת המערכת עבור כניסת מדרגה, $r(t)=1(t)$, היא $y(t)=1(t)-e^{-2t}\left(\cos(2t)+0.01\sin(2t)\right)$ ותגובת אותה מערכת עבור כניסת מדרגה בהפרעה, $d(t)=1(t)$, היא $y(t)=e^{-2t}\sin(2t)$.

ב. שגיאת המערכת לכניסת מדרגה $r(t)=1(t)$, היא $e(t)=1(t)-1.2e^{-3t}\left(\cos(2t)+0.01\sin(2t)\right)$ ושגיאת אותה מערכת להפרעת מדרגה $d(t)=1(t)$, היא $e(t)=-0.5e^{-3t}\sin(2t)$.

ג. שגיאת המערכת לכניסת ריצה $r(t)=t$, היא $e(t)=0.85e^{-3t}\sin(10t)$ ושגיאת אותה מערכת להפרעת מדרגה $d(t)=1(t)$, היא $e(t)=-0.5e^{-3t}\sin(10t)$.

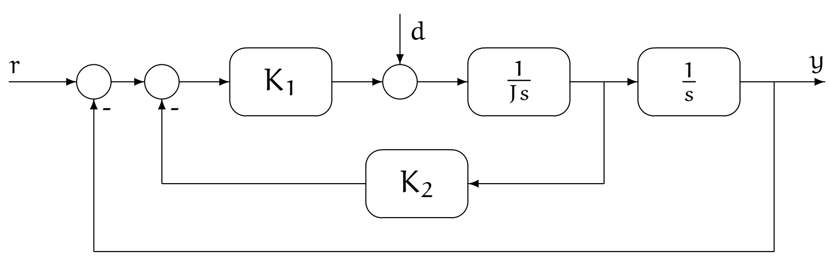
פתרון לשאלה מס' 2

<u>הערה</u>: היות ובכל סעיפי השאלה כל התגובות בזמן חסומות ברור שהחוג הסגור צריך להיות יציב.

א. מתגובת המערכת $y_s(t)$ הנתונה עבור כניסת מדרגה, $r(t)=1(t)$, ניתן לראות כי $y_{ss}^r=y(t\to\infty)=1$ ולכן שגיאת המצב המתמיד עבור כניסה זו היא $e_{ss}^r=0$. לפי הטבלה הכללית לשגיאת המצב המתמיד, עבור כניסת מדרגה מספר האינטגרטורים המינימלי הדרוש ב־$B(s)=C(s)P(s)$ הוא 1 (או ב־$P(s)$ או ב־$C(s)$). תגובת אותה מערכת לכניסת מדרגה בהפרעה, $d(t)=1(t)$, נתונה כ־$y_{ss}^b=y(t\to\infty)=0$. מאחר והתגובה להפרעה היא עבור $r=0$, אזי שגיאת המצב המתמיד עבור כניסת הפרעה היא $e_{ss}^d=0$. מהטבלה הכללית לשגיאת המצב המתמיד, עבור כניסת מדרגה מספר האינטגרטורים המינימלי הדרוש ב־$B(s)=C(s)$ הוא 1 ע"מ לקבל $e_{ss}^d=0$. משתי הדרישות הנ"ל מס' האינטגרטורים <u>המינימלי</u> הוא אינטגרטור אחד ב־$C(s)$ ואפס אינטגרטורים ב־$P(s)$.

ב. משגיאת המערכת עבור כניסת מדרגה, $r(t)=1(t)$, מתקבל כי שגיאת המצב המתמיד היא $e_{ss}^d=e(t\to\infty)=1$. מהטבלה הכללית, $0<|e_{ss}^r|<\infty$ (סופית אך שונה מאפס) מתקבלת אם ל־$B(s)=C(s)P(s)$ אין אינטגרטורים. מתגובת אותה מערכת לכניסת מדרגה בהפרעה, $d(t)=1(t)$, מתקבל ש־$e_{ss}^d=e(t\to\infty)=0$. לכן נדרש שב־$B(s)=C(s)$ יהיה אינטגרטור אחד לפחות. דבר זה סותר את הנתון ($e_{ss}^r=1$). לפיכך, לא ניתן לקיים את שתי הדרישות בו זמנית.

ג. משגיאת המערכת עבור כניסת ריצה, $r(t)=t$, מתקבל $e_{ss}^r=e(t\to\infty)=0$. לשם כך נדרש שמספר האינטגרטורים המינימלי ב־$B(s)=C(s)P(s)$ יהיה 2. מתגובת אותה מערכת עבור כניסת מדרגה בהפרעה, $d(t)=1(t)$, מתקבל $e_{ss}^d=e(t\to\infty)=0$. לכן דרוש שמספר האיטגרטורים המינימלי ב־$B(s)=C(s)$ יהיה 1. לפיכך, יש שתי אפשרויות: שני אינטגרטורים ב־$C(s)$ או אינטגרטור אחד ב־$C(s)$ ואינטגרטור אחד ב־$P(s)$. ס"ה מספר אינטגרטורים מינימלי 2.

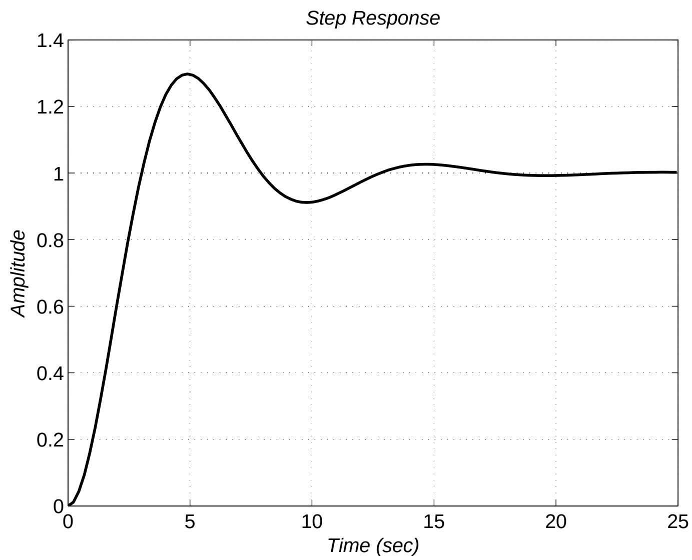


ציור 2: דיאגרמת הבלוקים

שאלה מס' 3

ציור 2 מתאר מערכת לבקרת מתקן "הליכה" בחלל. $J=25\,(kg\ m^2)$ הינו מומנט האינרציה של האסטרונאוט כולל הציוד.

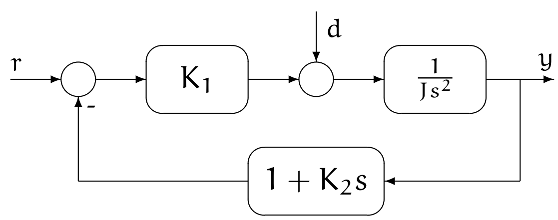
1. חשבו את פונקציות התמסורת הבאות: $\frac{e}{r}$, $\frac{e}{d}$ ($e=r-y$).
2. מצאו את תחום ערכי K_1, K_2 המבטיח את יציבות החוג הסגור.
3. בציור 3 נתונה תגובת המערכת לכניסת מדרגה בערך הרצוי. מצאו את ערכי K_1, K_2 המתאימים לתגובה זו.
4. עבור הפרעת מדרגה בעוצמת יחידה $d=1(t)$ ו־K_1, K_2 שמצאתם בסעיף 3, חשבו את שגיאת המצב המתמיד, תגובת היתר, זמן הרגיעה ל־$\pm5\%$ מערך המצב המתמיד.
5. ציירו במישור הפרמטרים את תחום ערכי K_1, K_2 בו שגיאת המצב המתמיד $e_{ss}<0.05$ כאשר $d=1(t)$ ו־$r=t\cdot 1(t)$.
6. בנוסף לסעיף 5 דרישות הביצועים עבור כניסת מדרגה בערך הרצוי הן: תגובת יתר $OS<15\%$, וזמן רגיעה $t_s<15(sec)$ (לרמת הרגיעה של $\pm5\%$). רשמו את התנאים שעל K_1, K_2 לקיים.



ציור 3: תגובת המדרגה

פתרון לשאלה מס' 3

1. נעביר את הדיאגרמת הבלוקים לצורה הבאה:



ציור 4: דיאגרמת הבלוקים האקוויולנטית

נקבל:

$$T_{yr} = \frac{y}{r} = \frac{\frac{K_1}{Js^2}}{1 + K_1(1 + K_2 s)\frac{1}{Js^2}} = \frac{\frac{K_1}{J}}{s^2 + \frac{K_1K_2}{J}s + \frac{K_1}{J}}, \quad T_{yd} = \frac{y}{d} = \frac{\frac{1}{Js^2}}{1 + K_1(1 + K_2 s)\frac{1}{Js^2}} = \frac{\frac{1}{J}}{s^2 + \frac{K_1K_2}{J}s + \frac{K_1}{J}}$$

$$T_{er} = \frac{e}{r} = \frac{r - y}{r} = \frac{s^2 + \frac{K_1K_2}{J}s}{s^2 + \frac{K_1K_2}{J}s + \frac{K_1}{J}}, \quad T_{ed} = \frac{e}{d} = \frac{-y}{d} = \frac{-\frac{1}{J}}{s^2 + \frac{K_1K_2}{J}s + \frac{K_1}{J}}$$

2. הפ"א של המערכת בחוג הסגור: $\chi_{cl}(s) = s^2 + \frac{K_1K_2}{J}s + \frac{K_1}{J}$ מערכת מסדר שני: יציבות מובטחת כאשר $\frac{K_1}{J} > 0$, $\frac{K_1K_2}{J} > 0$
$\Leftarrow K_1 > 0 \cup K_2 > 0$.

3. מציור 2 שבגליון תרגילים 5 ניתן לחלץ את שני הפרמטרים: $OS = 0.3$, $t_p = 5(sec)$. נקבל:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln^2(OS)}{\pi^2 + \ln^2(OS)}} \quad \Leftarrow \quad \ln^2(OS) - \zeta^2 \ln^2(OS) = \pi^2\zeta^2 \quad \Leftarrow \quad \ln(OS) = \frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \Leftarrow \quad OS = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \Leftarrow \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

נציב מספרים $\zeta = 0.36$, $\omega_n = 0.67$ ונקבל:

$$\boxed{K_2 = \frac{2J\zeta\omega_n}{K_1} = 1.06} \quad \Leftarrow \quad \frac{K_1K_2}{J} = 2\zeta\omega_n \qquad , \boxed{K_1 = J\omega_n^2 = 11.32} \quad \Leftarrow \quad \frac{K_1}{J} = \omega_n^2$$

4. כדי למצוא את שגיאת המצב המתמיד נשתמש במשפט הערך הסופי עבור פה"ת מ־d ל־e שמצאנו בסעיף 1:

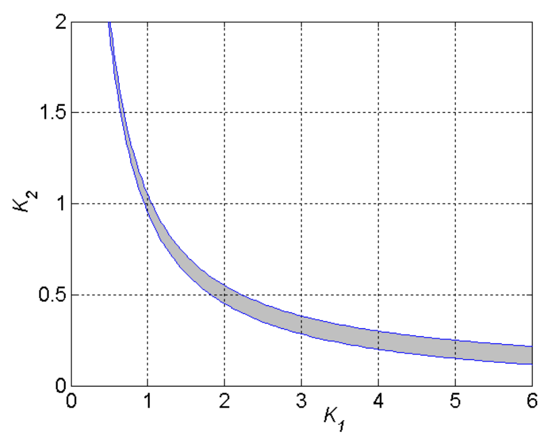
$$e_{ss}^d = T_{ed}(0) = -\frac{1}{K_1} = -0.0883$$

מכיוון שבמקרה שלנו לפונקציות התמסורת T_{yr} ו־T_{yd} יש אותם קטבים ואפסים, תגובת היתר עבור כניסת הפרעה וכניסה בערך הרצוי היא אותה תגובת יתר $OS = 0.3$ וזמן הרגיעה ל־$\pm 5\%$ הוא $ST = \frac{3}{\omega_n \zeta} = 12.44$.

5. מערכת ליניארית, לכן מתוך סופרפוזיציה: $e_{ss} = e_{ss}^r + e_{ss}^d$. את e_{ss}^d מצאנו בסעיף 4, באותו אופן נמצא את e_{ss}^r:

$$e_{ss}^r = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2} s \frac{s^2 + \frac{K_1 K_2}{J} s}{s^2 + \frac{K_1 K_2}{J} s + \frac{K_1}{J}} = \frac{K_1 K_2}{K_1} = K_2$$

נקבל: $|e_{ss}| = \left|\frac{K_1 K_2 - 1}{K_1}\right| < 0.05 \Leftarrow -0.05 < \frac{K_1 K_2 - 1}{K_1} < 0.05$. נקבל שני אי שיוויונים: $\boxed{K_2 > \frac{1}{K_1} + 0.05}$ ו־$\boxed{K_2 > \frac{1}{K_1} - 0.05}$ (בנוסף לתנאי היציבות: $\boxed{K_1 > 0}$, $\boxed{K_2 > 0}$). תחום ערכי K_1, K_2 הדרוש נתון בציור מס' 5.



ציור 5: מישור הפרמטרים

6. עבור $OS < 0.15$ נקבל $0.52 = \sqrt{\frac{\ln^2(OS)}{\pi^2 + \ln^2(OS)}} < \zeta$ ועבור $t_s|_{\delta=0.05} < 15$ נקבל $\omega_n \zeta > \frac{3}{15} = 0.2$. בסעיף 3 מצאנו את הקשר $K_1 = J\omega_n^2$ ו־$K_2 = \frac{2J\omega_n\zeta}{K_1}$ ולכן נקבל $K_2 > \frac{2J}{K_1} 0.2 = \frac{10}{K_1}$ ו־$K_1 > J\left(\frac{0.2}{0.52}\right)^2 = 3.7$. לכן: $\boxed{K_1 > 3.7}$ ו־$\boxed{K_2 > \frac{10}{K_1}}$.

שאלה מס' 4

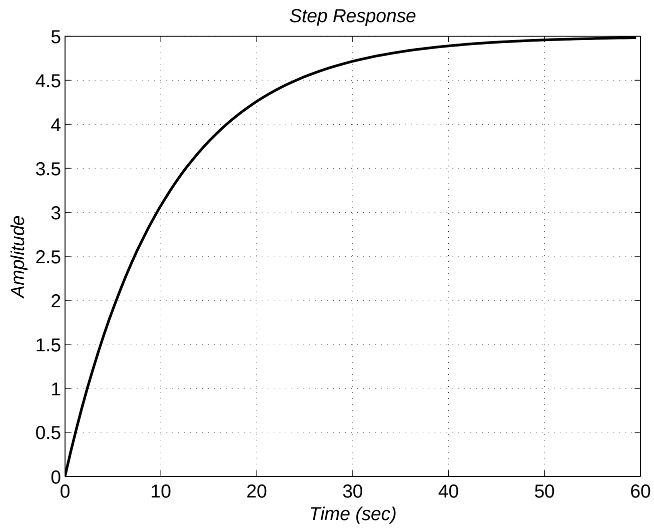
בציור מס' 6 נתונה תגובה למדרגת יחידה של מערכת מסוימת.

1. מהו סדר המערכת המינימלי?
2. תכננו בקר כך ש: $e_{ss} = 0$ עבור כניסות מדרגה בערך הרצוי ובהפרעה, $OS < 10\%$ עבור כניסות מדרגה בערך הרצוי.

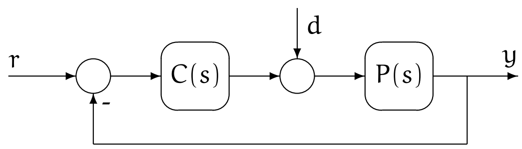
פתרון לשאלה מס' 4

1. התגובה של המערכת היא תגובה אופיינית למערכת מסדר ראשון מהצורה: $P(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$. ברור ש־$K = 5$, נמצא τ: עבור מערכת מסדר ראשון זמן הרגיעה ל־37% שווה ל־τ. מציור רואים שב־10 שניות תגובת המערכת שווה בערך ל־3.15,כלומר $\tau = 10$.

2. כדי לאפס את שגיאת המצב המתמיד עבור כניסת מדרגה בערך הרצוי ובהפרעה נשתמש בבקר עם אינטגרטור מהצורה: $C(s) = \frac{k_i}{s}$. פה"ת של המערכת בחוג סגור: $G(s) = \frac{CP}{1+CP} = \frac{5k_i}{10s^2 + s + 5k_i} = \frac{0.5k_i}{s^2 + 0.1s + 0.5k_i}$. מהדרישה $OS < 0.1$ נחשב את ערכו של ζ: $\zeta = \sqrt{\frac{\ln^2(OS)}{\pi^2 + \ln^2(OS)}} > 0.59$, $\omega_n > 0.08 \Leftarrow 2\zeta\omega_n = 0.1$, $k_i > 0.01 \Leftarrow 0.5k_i = \omega_n^2$. קיבלנו את הבקר הבא: $\boxed{C(s) = \frac{0.02}{s}}$.



ציור 6: תגובת המדרגה



ציור 7: דיאגרמת הבלוקים

שאלה מס' 5

התהליך $P(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)}$ מבוקר בחוג סגור כמתואר בציור מס' 7. דרישות הביצועים הן:

- $e_{ss} = 0$ עבור כניסת מדרגה בערך הרצוי.
- $e_{ss} \leqslant 0.1A_d$ לכניסת מדרגה בגובה A_d בהפרעה.

1. עבור בקר P, $C(s) = k_p$:

(א) מצאו את כל ערכי k_p עבורם מתקיימות דרישות הביצועים.

(ב) מצאו את זמן הרגיעה t_s (מוגדר לפי רמת הרגיעה של $\pm 5\%$) ותגובת היתר אשר ניתן להשיג באמצעות בקר P עבור ערכו המינימלי של k_p המקיים את דרישות הביצועים.

(ג) מצאו את הערך המקסימלי של התגובה עם הבקר שהתקבל בסעיף ב' עבור:

i. $r = 2$, $d = 0$.

ii. $r = 0$, $d = 1$.

iii. $r = 2$, $d = 1$.

2. עבור בקר PD: $C(s) = k_p + k_d s$.

(א) מצאו את תחום ערכי k_p, k_d עבורם דרישות הביצועים מתקיימות.

(ב) $r = 0$, $d = 1$. בכל אחד מן המקרים הבאים חשבו את תגובת היתר, זמן העלייה וזמן הרגיעה ל־$\pm 1\%$ (מומלץ להשתמש ב־MATLAB). הסיקו מסקנות.

	1	2	3	4
k_p	10	1000	10	1000
k_d	0	0	1	1

פתרון לשאלה מס' 5

1. עבור בקר P: $C(s)=k_p$.

(א) נבדוק יציבות: הפ"א של המערכת בחוג סגור $\chi_{cl}(s)=s^2+10s+10k_p$, המערכת יציבה עבור $k_p>0$.

- $\frac{e}{r}=\frac{1}{1+CP}$: מערכת מסוג 1 $\Leftarrow e_{ss}^r=0$ שגיאת המצב המתמיד עבור כניסת מדרגה בערך הרצוי לא תלויה ב־k_p.
תשובה: כל k_p עבורו מערכת יציבה.
- $\frac{e}{d}=\frac{-P}{1+CP}$, $F=P$, $B=C$, $R=-1$: מערכת מסוג 0: $e_{ss}^d=\frac{R(0)}{F^{-1}(0)+k_p}=-\frac{R(0)}{k_p}$, נקבל: $\left|-\frac{R(0)}{K_p}\right|\leqslant 0.1R(0)$
$\Leftarrow -10\geqslant k_p\geqslant 10$ (נוסיף תנאי היציבות: $K_p>0$) $\Leftarrow K_p\geqslant 10$.

(ב) פה"ת של המערכת בחוג הסגור כאשר $k_p=10$: $\zeta=0.5$, $\omega_n=10 \Leftarrow \frac{y}{r}=\frac{CP}{1+CP}=\frac{10k_p}{s^2+10s+10k_p}=\frac{100}{s^2+10s+100}$.
$t_s|_{\delta=0.05}=\frac{3}{\omega_n\zeta}=0.6$, $OS=e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}=0.163$.

(ג) לפי ההגדרה: $y_{max}=(1+OS)y_{ss}$.

i. $y_{max}=(1+0.163)2=2.326$

ii. $y_{max}=(1+0.163)0.1=0.1163$ (0.1 הינו ההגבר הסטטי של $\frac{y}{d}$)

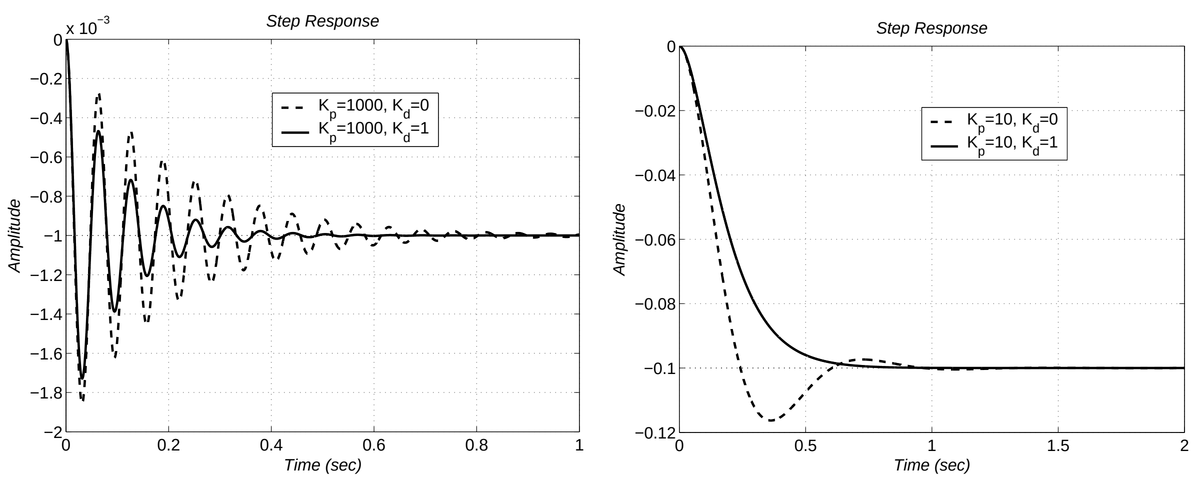
iii. לפונקציות התמסורת $\frac{y}{r}$ ו־$\frac{y}{d}$ יש אותם קטבים ואפסים ולכן לאחר כניסת המדרגה בערך הרצוי ובהפרעה תגובות המערכת מגיעות למקסימום בו זמנית. $y_{max}=(1+0.163)(2+0.1)=2.4423$

2. עבור בקר PD: $C(s)=k_p+k_ds$.

(א) נבדוק יציבות: הפ"א של המערכת בחוג סגור $\chi_{cl}(s)=s^2+10(1+k_d)s+10k_p$, מערכת יציבה עבור $k_p>0$ ו־$k_d>-1$.

- $\frac{e}{r}=\frac{1}{1+CP}$: מערכת מסוג 1 $\Leftarrow e_{ss}^r=0$ שגיאת המצב המתמיד עבור כניסת מדרגה בערך הרצוי לא תלויה ב־k_p ו־k_d. תשובה: כל k_p ו־k_d עבורם מערכת יציבה.
- $\frac{e}{d}=\frac{-P}{1+CP}$, $F=P$, $B=C$, $R=-1$: מערכת מסוג 0: $e_{ss}^d=\frac{R(0)}{F^{-1}(0)+k_p}=-\frac{R(0)}{k_p}$, נקבל: $\left|-\frac{R(0)}{k_p}\right|\leqslant 0.1R(0)$
$\Leftarrow -10\geqslant k_p\geqslant 10$ (נוסיף תנאי היציבות: $k_p>0$, $k_d>-1$) $\Leftarrow k_p>10$ ו־$k_d>-1$.

(ב) בציור 8 מתוארת תגובת המערכת לכניסת מדרגה בהפרעה עבור k_p ו־k_d שונים.



(ב) (א)

ציור 8: תגובת המערכת עבור K_p ו־K_d שונים

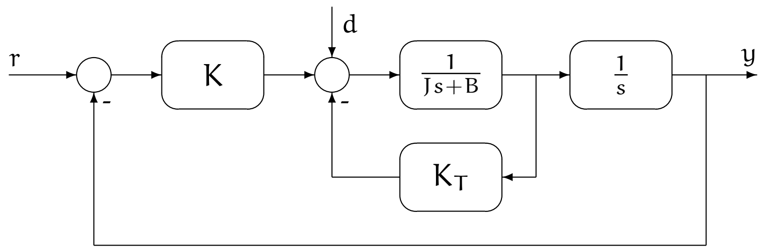
הנתונים שהתקבלו מ־MATLAB:

	OS(%)	t_r(sec)	t_s(sec)
1	16.3	0.165	0.878
2	85.4	0.0106	0.915
3	0	0.336	0.664
4	72.9	0.011	0.448

ע"י שינוי k_p ניתן לשנות את ה־ t_r ואת שגיאת המצב המתמיד של המערכת. ע"י שינוי k_d ניתן להשפיע על הריסון של המערכת ובכך לשנות את ה־OS.

כדי לחשב את תגובת המערכת ב־MATLAB ניתן להשתמש בתוכנית הבאה:

```
Kp = 1000;
Kd = 1;
P = tf([1],[0.1 1 0]);     % Process
C = tf([Kd Kp],[1]);       % Controller
%%%%%% another way to define P and C : %%%%%%
%
% s=tf('s'); P=1/(0.1*s^2+s); C=Kp+Kd*s;
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Ted = -P/(1+C*P);          % TF from d to e
t = 0:0.0005:1;            % time
step(Ted,t);               % Step response of Ted
```



ציור 9: דיאגרמת הבלוקים

שאלה מס' 6

ציור מס' 9 מתאר מערכת סרוו בעלת שני משובים: משוב מהירות ומשוב מקום. נתונים $B = 1\,[\frac{Nm}{rad/sec}]$ ו־$J = 1\,[kg\ m^2]$. הבקרים K ו־K_T ניתנים לכיוונון.

1. חשבו את פונקציות התמסורת $\frac{y}{r}$, $\frac{y}{d}$.
2. מהם ערכי K ו־K_T המבטיחים את יציבות החוג הסגור?
3. מצאו ערכי K ו־K_T המבטיחים זמן שיא ראשון של $t_p \approx 0.57(sec)$ וזמן רגיעה של $t_s \approx 2.86(sec)$ (לרמת הרגיעה של $\pm 5\%$).
4. מהו ה־OS הצפוי בתגובה לכניסת מדרגה בערך הרצוי עם K ו־K_T שחושבו בסעיף 3?
5. מהן שגיאות המצב המתמיד לכניסת מדרגה בערך הרצוי? בהפרעה? $(e = r - y)$.
6. מהן שגיאות המצב המתמיד לכניסת ריצה בערך הרצוי? בהפרעה?

פתרון לשאלה מס' 6

1. נמצא את פה"ת של החוג הפנימי:

$$G_{in}(s) = \frac{\frac{1}{Js+b}}{1 + K_T \frac{1}{Js+b}} = \frac{1}{Js + (B + K_T)}$$

נקבל:

$$\frac{y}{r} = \frac{K \frac{1}{Js+(B+K_T)} \frac{1}{s}}{1 + K \frac{1}{Js+(B+K_T)} \frac{1}{s}} = \frac{K}{Js^2 + (B + K_T)s + K} = \frac{K}{s^2 + (1 + K_T)s + K}, \quad (1)$$

$$\frac{y}{d} = \frac{\frac{1}{Js+(B+K_T)} \frac{1}{s}}{1 + K \frac{1}{Js+(B+K_T)} \frac{1}{s}} = \frac{1}{Js^2 + (B + K_T)s + K} = \frac{1}{s^2 + (1 + K_T)s + K}. \quad (2)$$

2. הפ"א של המערכת בחוג הסגור: $\chi_{cl}(s) = s^2 + (1 + K_T)s + K$. המערכת יציבה עבור: $K > 0$ ו־$K_T > -1$.

3. אנו יודעים ש

$$t_s|_{\delta=0.05} \approx \frac{2.88}{(-\zeta^3+0.64\zeta^2+0.96\zeta)\omega_n} \quad \text{ו־} \quad t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}$$

מכאן נקבל:

$$\omega_n = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}t_p} = \frac{2.88}{(-\zeta^3+0.64\zeta^2+0.96\zeta)t_s}$$

או, בהצבת הערכים המספריים של t_p ו־t_s:

$$\omega_n = \frac{5.51}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1.01}{-\zeta^3+0.64\zeta^2+0.96\zeta}.$$

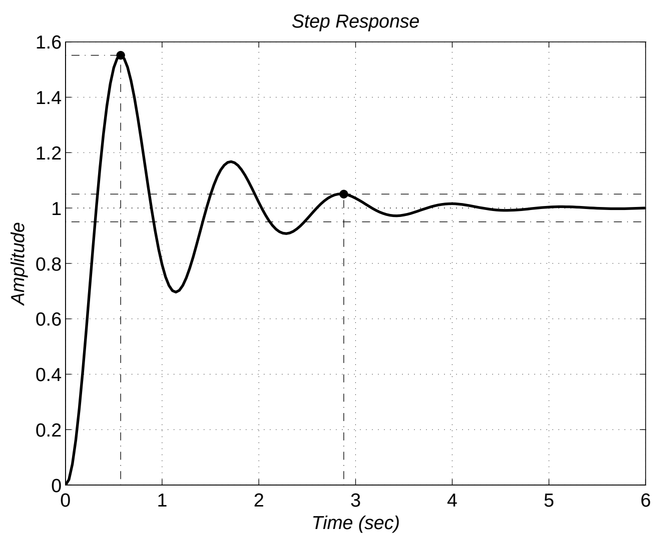
ניתן להיווכח כי הערך הממשי היחיד של ζ בתחום $(0,1)$ המתקבל מפתרון המשוואה הנ"ל הינו:

$$\zeta \approx 0.173$$

ומכאן:

$$\omega_n \approx 5.596.$$

ממשוואה (1) ניתן לראות ש־$K = \omega_n^2$ ו־$K_T = 2\zeta\omega_n - 1$. מכאן נמצא ש־$\boxed{K = 31.314}$ ו־$\boxed{K_T = 0.935}$. כדי לבדוק שפרמטרים שמצאנו אמנם נכונים נבצע סימולציה של המערכת בחוג הסגור עבור כניסת מדרגה. בציור מס' 10 ניתן לראות שהפרמטרים שמצאנו אכן מקיימים את הדרישות.



ציור 10: תגובת המדרגה

4. נמצא את תגובת היתר: $OS = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot 100\% \approx 57.6$.

5. נסמן $C(s) = K$ ו־$\breve{P}(s) = \frac{1}{s^2+(1+K_T)s}$.

- שגיאת המצב המתמיד עקב כניסת המדרגה בערך הרצוי: פ"ת מ־r ל־e: $\frac{e}{r} = \frac{1}{1+C\breve{P}}$ ⇐ מערכת מסוג 1 ⇐ $e_{ss}^r = 0$.
- שגיאת המצב המתמיד עקב כניסת המדרגה בהפרעה: פ"ת מ־d ל־e: $\frac{e}{d} = \frac{-\breve{P}}{1+C\breve{P}}$; $F = P$, $B = C$, $R = -1$ ⇐ מערכת מסוג 0 ⇐ $e_{ss}^d = \frac{R(0)}{L_f^{-1}(0)+k_p} = -\frac{1}{K} = -0.03$.

6.
- שגיאת המצב המתמיד עקב כניסת ריצה בערך הרצוי עבור מערכת מסוג 1: $e_{ss}^r = \frac{1}{k_v} = \frac{K_T+1}{K} = 0.07$.
- שגיאת המצב המתמיד עקב כניסת ריצה בהפרעה עבור מערכת מסוג 0: $e_{ss}^d = \infty$