מבוא לבקרה (034040)

גליון תרגילי בית מס' 3

שאלה מס' 1

אות עובר דרך מערכת LTI יציבה, $G(s)$. עבור הצרופים הבאים של u ו־G מצאו את ספקטרום ($y = Gu$), וציירו כפונקציה של ω:

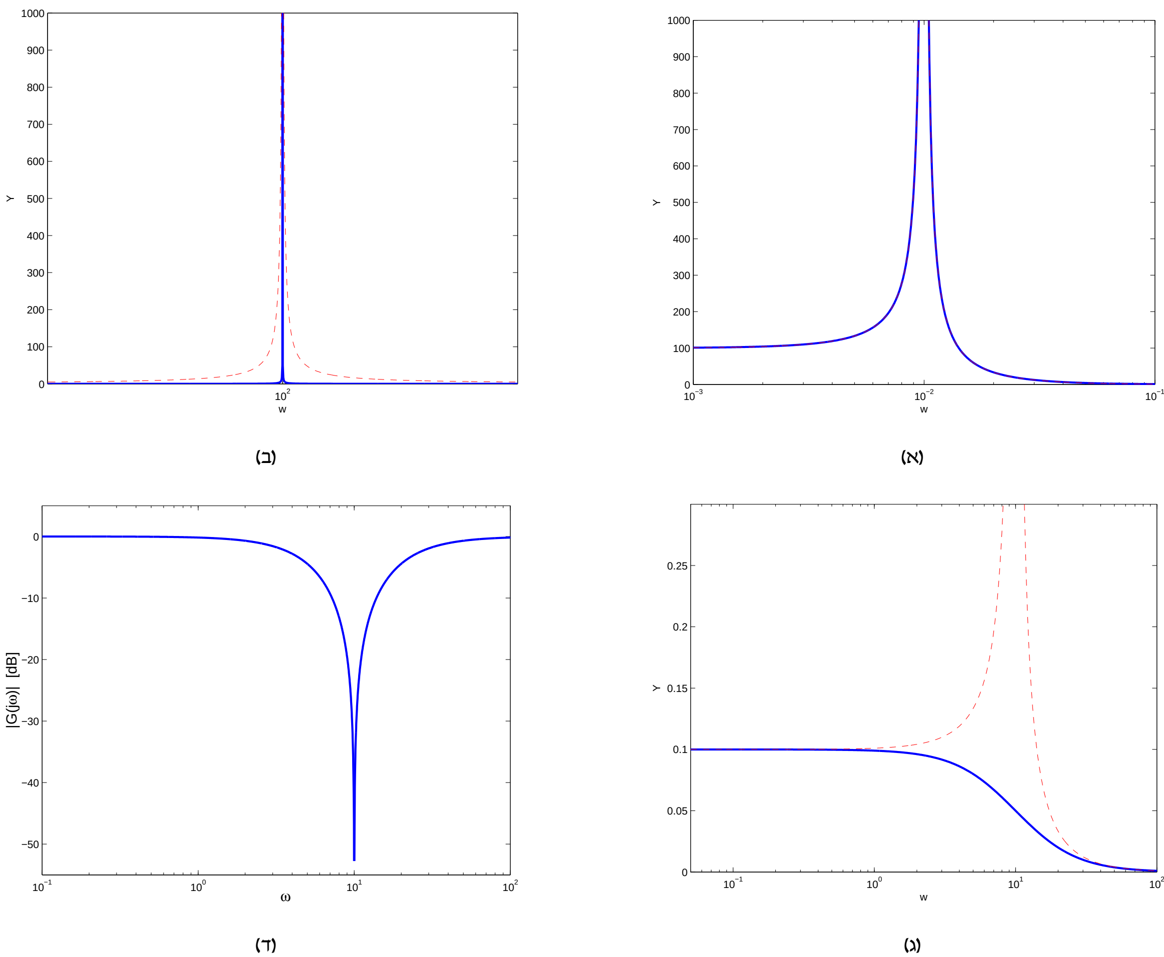
1. $u(t) = \sin(.01t) \times 1(t)$ ו־ $G(s) = \frac{1}{s+1}$
2. $u(t) = \sin(100t) \times 1(t)$ ו־ $G(s) = \frac{1}{s+1}$
3. $u(t) = \sin(10t) \times 1(t)$ ו־ $G(s) = \frac{s^2+100}{(s+10)^2}$

ניתן למצוא את $u(j\omega)$ בטבלאות התמרות פוריה.

פתרון לשאלה מס' 1

נסמן ב־$\mathcal{F}(\xi)$ את התמרת פוריה של אות $\xi(t)$ וב־$Y(\omega) = |\mathcal{F}(y)|$ ו־$U(\omega) = |\mathcal{F}(u)|$ את הספקטרומים של $y(t)$ ו־$u(t)$. ידוע ש־$Y(\omega) = |G(j\omega)|U(\omega)$. גם נזכיר ש

$$\mathcal{F}\big(\sin(\omega_0 t) \times 1(t)\big) = \frac{\omega_0}{-\omega^2 + \omega_0^2}.$$



ציור 1:

1. במקרה הזה:

$$Y(\omega)=\frac{1}{|j\omega+1|}\frac{0.01}{|\omega^2-0.01^2|}=\frac{0.01}{\sqrt{\omega^2+1}\,|\omega^2-0.01^2|}\quad\Leftarrow\quad U(\omega)=\left|\frac{0.01}{0.01^2-\omega^2}\right|=\frac{0.01}{|\omega^2-0.01^2|}$$

הגרף של y נתון בציור 1(א) (בכחול). היות ועיקר הספקטרום של u מרוכז באזור $\omega=0.01$ והיות ו־$G(j0.01)\approx 1$, לא ניתן להבחין למעשה בין ספקטרום y לבין זה של u (ראו קו אדום בציור 1(א)). הווה אומר – u עובר דרך $G(s)$ כמעט ללא שינוי.

2. במקרה הזה:

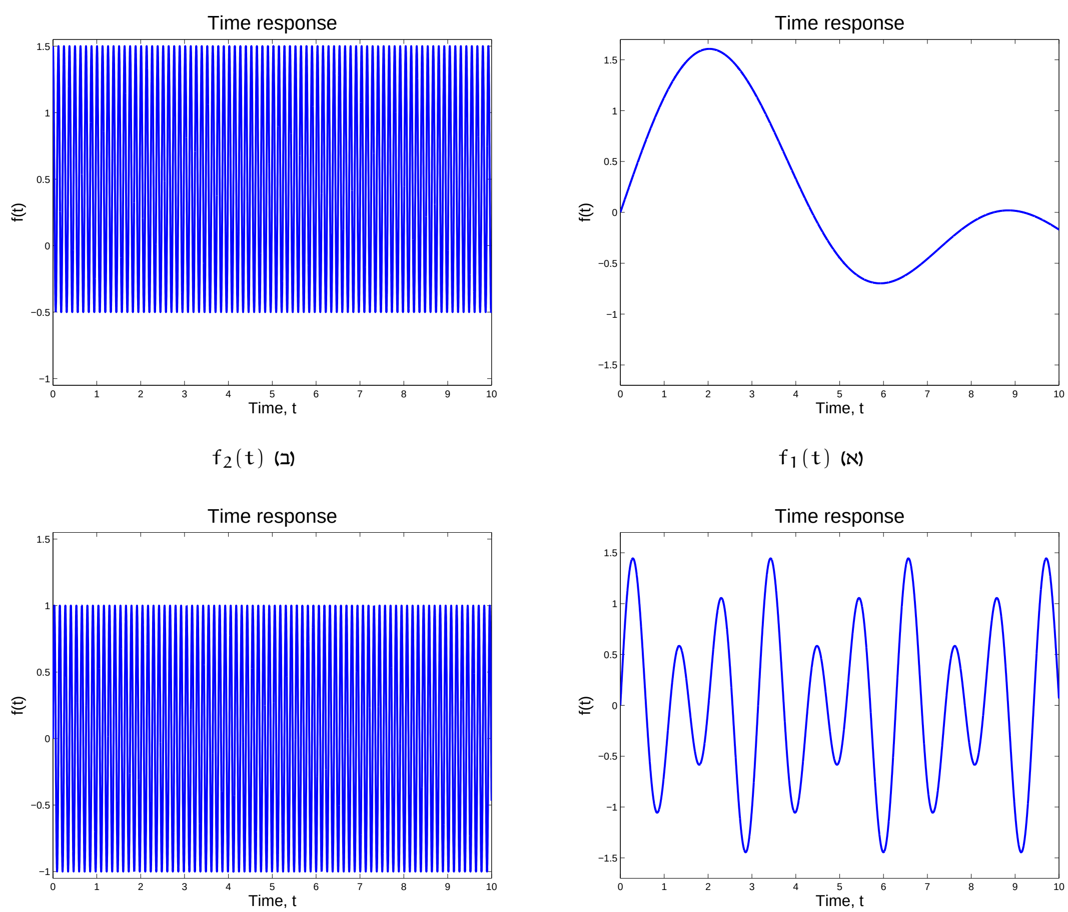
$$Y(\omega)=\frac{1}{|j\omega+1|}\frac{100}{|\omega^2-100^2|}=\frac{100}{\sqrt{\omega^2+1}\,|\omega^2-100^2|}\quad\Leftarrow\quad U(\omega)=\left|\frac{100}{100^2-\omega^2}\right|=\frac{100}{|\omega^2-100^2|}$$

הגרף של $Y(\omega)$ נתון בציור 1(ב) (בכחול). שלא כמו במקרה הקודם ההגבר של $G(j\omega)$ בתדר בו מרוכז הספקטרום של u הוא קרוב ל־0 כך ש u מסונן (מונחת) כמעט לחלוטין ע"י $G(s)$. בתדר $\omega=100$ ל־$U(\omega)$ גודל אינסופי ולכן גם $Y(\omega)$ כך. אבל בכל שאר התדרים מונחת הספקטרום של y כמעט לאפס (ראו קו אדום מקווקו בציור 1(ב)).

3. במקרה הזה:

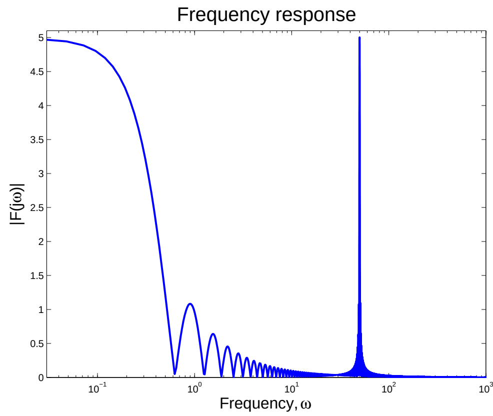
$$Y(\omega)=\frac{|-\omega^2+100|}{|j\omega+10|^2}\frac{10}{|\omega^2-10^2|}=\frac{10}{\omega^2+100}\quad\Leftarrow\quad U(\omega)=\left|\frac{10}{10^2-\omega^2}\right|=\frac{10}{|\omega^2-10^2|}$$

הגרף של $Y(\omega)$ נתון בציור 1(ג) (בכחול). במקרה זה ל־$G(j\omega)$ הגבר אפס בתדר בו מרוכז הספקטרום של u ($\omega=10$) ולכן מונחת תדר זה לחלוטין ב־y. מסננים כאלו נקראים מסנן בורר ("notch filters") ותפקידו לחסום תדרים נבחרים. דיאגרמת בודה של ההגבר של $G(s)$ מופיעה בציור 1(ד).

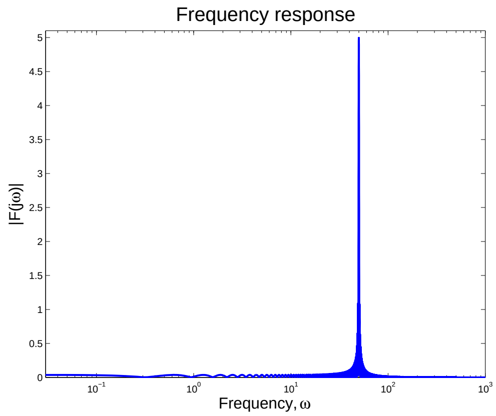


(א) $f_1(t)$ (ב) $f_2(t)$ (ג) $f_3(t)$ (ד) $f_4(t)$

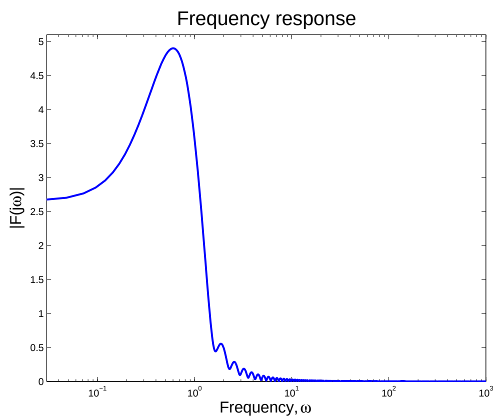
ציור 2: אותות בשאלה מס' 2



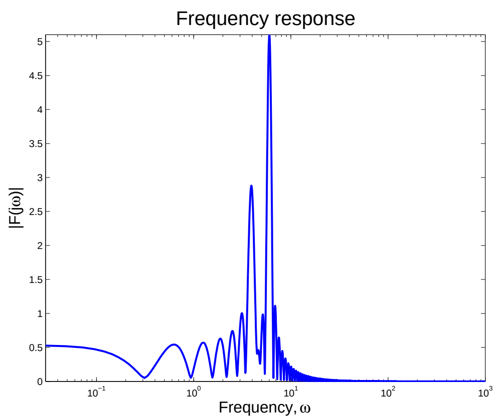
$|\Phi_1(j\omega)|$ (א)



$|\Phi_2(j\omega)|$ (ב)



$|\Phi_3(j\omega)|$ (ג)



$|\Phi_4(j\omega)|$ (ד)

ציור 3: הספקטרומים של אותות בשאלה מס' 2

שאלה מס' 2

בציור 2 מוצגים ארבע אותות בזמן ובציור 3 נתונים הספקטרומים של האותות. התאימו בין הציורים. הסבירו.

פתרון לשאלה מס' 2

	f_1	f_2	f_3	f_4
Φ_1		$\times$		
Φ_2				$\times$
Φ_3	$\times$			
Φ_4			$\times$	

טבלה 1:

התוצאות נתונות בטבלה 1.

- לאות האיטי ביותר, $f_1(t)$, מתאים ספקטרום בעל רוחב סרט הקטן ביותר והוא Φ_3.
- האות האיטי הבא הינו $f_3(t)$ ולו ספקטרום בעל רוחב סרט הקטן הבא – Φ_4.
- $f_2(t)$ ו־$f_4(t)$ נראים דומים בזמן. ואכן לספקטרומים Φ_1 ו־Φ_2 אמפליטודות צרות וגבוהות באותו תדר ($\omega = 50$), אבל בעוד ש־$f_4(t)$ תונד סביב 0 התנודות של $f_2(t)$ הינן סביב 0.5. פרוש הדבר הוא של־$f_2(t)$ רכיב DC (קבוע) המתאים לספקטרום עם אמפליטודות בתדרים נמוכים כפי שיש ב־Φ_1.

שאלה מס' 3

אות נמדד עם רעש:

$$n(t) = \sin(\omega_n t) \quad \text{עם} \quad \omega_n \geqslant 20\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}, \text{ אבל לא ידוע}$$

1. הציעו מסנן מסדר ראשון המסנן לפחות 90% מ-n לכל ω_n אפשרי. מה רוחב הסרט של מסנן זה?
2. הציעו מסנן מסדר שני המסנן לפחות 90% מ-n לכל ω_n אפשרי, בעל רוחב סרט מקסימלי וללא תהודות.

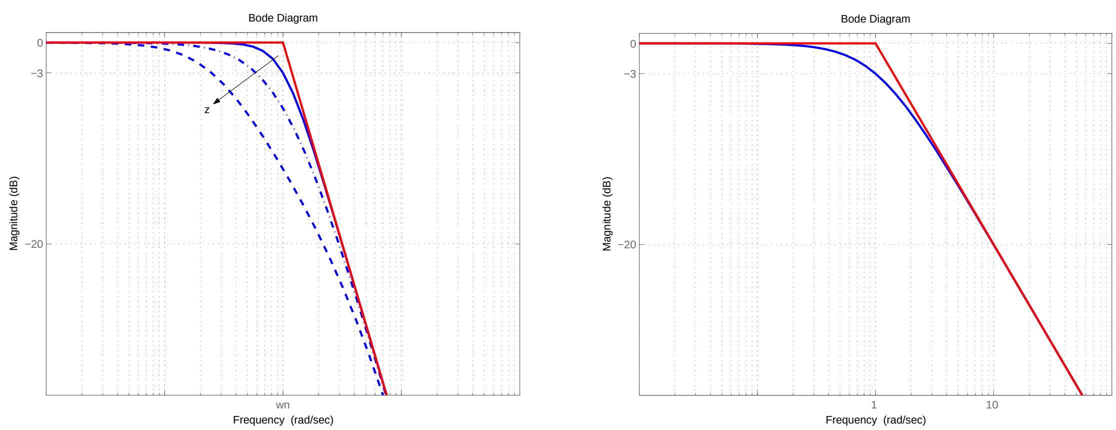
פתרון לשאלה מס' 3

ברור שמסנן לסינון n כזה צריך להיות מעביר תדרים נמוכים (low-pass filter).

1. הצורה הכללית של מעביר תדרים נמוכים מסדר ראשון היא $F(s) = \frac{1}{\tau s+1}$ (רוחב הסרט של מסנן זה הוא $\omega_b = \frac{1}{\tau}$). המטרה היא לבחור τ כך ש-$|F(j\omega)| \leqslant 0.1$ לכל $\omega \geqslant 20$. היות ו-$|F(j\omega)|$ יורד מונוטונית התנאי לעיל אקויולנטי ל-$|F(j20)| = 0.1$. היות ו-$|F(j\omega)| = 1/\sqrt{\tau^2\omega^2+1}$ נקבל

$$\tau^2 20^2 + 1 = 100 \quad \Rightarrow \quad 20\tau = \sqrt{99} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\sqrt{99}}{20} \approx 0.5$$

ורוחב הסרט של $F(s)$ הוא $\omega_b = 2$. את הנ"ל ניתן גם לקבל משיקולי דיאגרמת בודה (אפילו אסימפטוטית). בציור 4(א) נתון



(ב) (א)

ציור 4:

בודה של הפילטר מסדר ראשון. תדירות הפינה היא $\omega = \frac{1}{\tau}$ והשיפוע מימין לה הוא -20 dB/dec. הנחתה של -20 dB (כלומר, 0.1) מתקבלת דקדה אחת מימין לתדר הפנה (דהיינו ב-$\frac{1}{\tau}$) ומכאן $\frac{10}{\tau} = 20$.

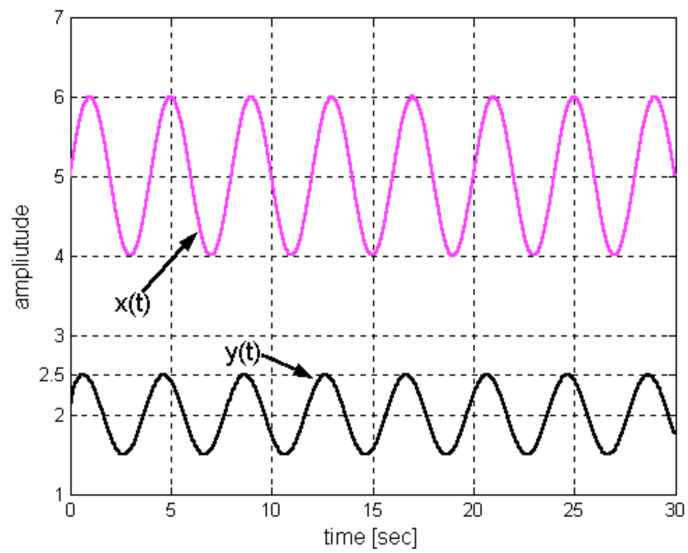
2. מסנן מעביר נמוכים מסדר שני ניתן לכתוב כ-$F(s) = \frac{\omega_n^2(\tau s+1)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$. לקבלת רוחב סרט מקסימלי נדרוש שפוע מקסימלי בתדרים מעבר לרוחב הסרט ולכן $\tau = 0$. בציור 4(ב) נתון בודה אסימפטוטי (קו אדום) של $F(s)$ עם $\tau = 0$ ובודה המלא (קוים כחולים) עם ζ שונים. במרחק מה מימין לתדר הפנה הקוים הכחולים קרובים לקו האדום היורד בשפוע של -40 dB/dec. על מנת להנחית הרעש דרוש $|F(j\omega)| \leqslant 0.1$ לכל $\omega \geqslant 20$. לכן $\omega = 20$ צריך להיות חצי דקדה ימינה יחסית ל-ω_n. מכאן

$$\omega_n = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}.$$

מציור 4(ב) רואים שככל ש-ζ קטנה כך מתקרב תיאור בודה המלא לזה האסימפטוטי ולכן על מנת לקבל רוחב סרט מקסימלי יש לבחור ζ קטן ככל האפשר. מצד שני, היות ו

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{1}{(1-\hat{\omega}^2)^2 + 4\zeta^2\hat{\omega}^2} = \frac{1}{1-2(1-2\zeta^2)\hat{\omega}^2+\hat{\omega}^4}, \quad \text{כאשר} \quad \hat{\omega} \doteq \frac{\omega}{\omega_n}$$

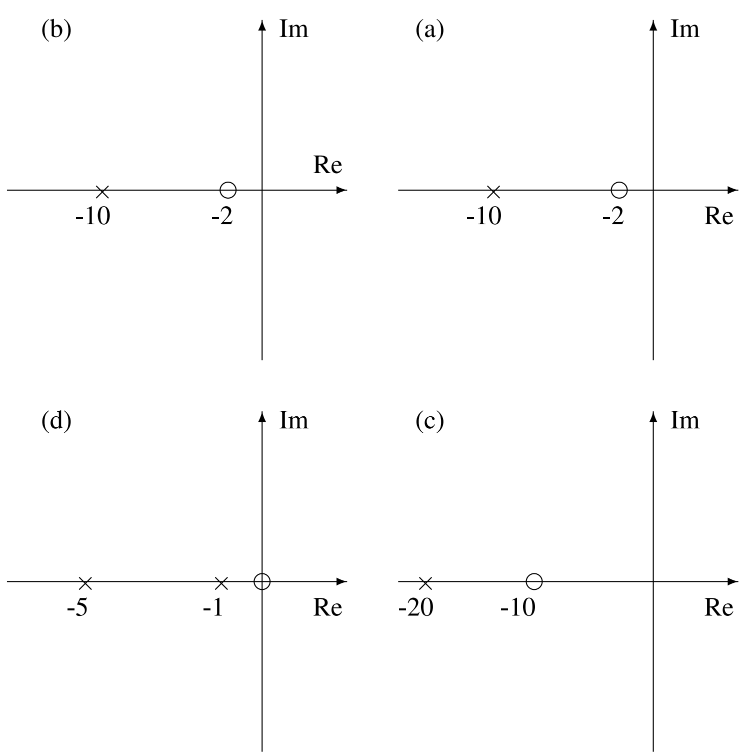
אזי כדי להמנע מתהודות ב-$|F(j\omega)|$ יש להגביל את ζ מלמטה ע"י $\sqrt{0.5}$. לכן נבחר $\zeta = \sqrt{0.5}$. בבחירה זו נקבל ש-$|F(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\hat{\omega}^4}$, כך ש-$|F(j\omega)| = \sqrt{0.5}$ ב-$\hat{\omega} = 1$. לכן, $\omega_b = \omega_n = 2\sqrt{10}$.



ציור 5: אות $x(t)$ ו־$y(t)$ במצב מתמיד

שאלה מס' 4

אות $x(t)$ מוכנס למסנן בעל פונקצית תמסורת $F(s)$, והיציאה הינה $y(t)$. האותות $x(t)$ ו־$y(t)$ במצב מתמיד נתונים בציור 5. בציור 6 נתונות ארבע מפות קטבים ואפסים אפשרית של $F(s)$, איזו מהן מתאימה? נמקו ע"י חישובים.



ציור 6: מפות קטבים ואפסים

פתרון לשאלה מס' 4

מתוך ציור 5 ניתן לראות כי האותות הם בעלי זמן מחזור של $T = 4$ (5 מחזורים ב־20 שניות) לכן בעלי תדירות של $\omega_o = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right]$. אנו רואים כי האמפליטודה של אות הכניסה $x(t)$ היא 1, ושל אות היציאה $y(t)$ היא 0.5. מאחר שהאותות הם במצב מתמיד, ע"פ משפט תגובת התדירות ניתן לקבוע את ההגבר של המסנן בתדר ω_o: $|F(j\omega_o)| = 0.5$. בנוסף נשים לב כי האות $x(t)$ מכיל רכיב קבוע בגודל 5, והאות $y(t)$ מכיל רכיב קבוע בגודל 2. מכאן ניתן לקבוע את ההגבר הסטטי של המסנן: $|F(0)| = 0.4$. נשים לב כי מתוך מפות הקטבים לא ניתן לקבוע את ההגברים $|F(j\omega_o)|$ ו־$|F(0)|$ מכיוון ש־$|F(j\omega)|$ יכול להיות מוכפל בכל סקלר קבוע c, אבל היחס $R = \left|\frac{F(j\omega_o)}{F(0)}\right|$ אינו תלוי ב־c. המשמעות של העובדה כי $R > 1$, הי כי המסנן הוא מסוג "מעביר תדרים גבוהים". נחשב את ערך היחס R עבור כל אחת ממפות הקטבים ואפסים שבציור 6.

אפשרות א': $F(s) = c\frac{s+2}{s+10}$, ומכאן מתקבל $R = \frac{\sqrt{\omega_o^2+4}}{\sqrt{\omega_o^2+100}}\frac{10}{2} = 1.256$.

אפשרות ב': $F(s) = c\frac{s+0.2}{s+0.5}$, ומכאן מתקבל $R = \frac{\sqrt{\omega_o^2+0.2^2}}{\sqrt{\omega_o^2+0.5^2}}\frac{0.5}{0.2} = 1.256$.

אפשרות ג': $F(s) = c\frac{s+10}{s+20}$, ומכאן מתקבל $R = \frac{\sqrt{\omega_o^2+100}}{\sqrt{\omega_o^2+400}}\frac{20}{10} = 1.009$.

אפשרות ד': נפסלת מיידית, כי $F(s)$ מכיל גוזר ולכן ההגבר הסטטי הוא ומכאן מתקבל $F(0) = 0$.

התשובה הקרובה ביותר הינה <u>אפשרות א'</u> (שגיאה של פחות מ־5 אחוז). ניתן לוודא את נכונות החישוב באמצעות הפקודות הבאות ב־Matlab:

```
s  = tf('s');
F  = (s+2)/(s+10);
m1 = bode(F,0);
m2 = bode(F,pi/2);
R  = m2/m1
```