



035188 - תורת הבקרה

תרגול 12

21 ביוני 2025

משוב מבוסס משערך

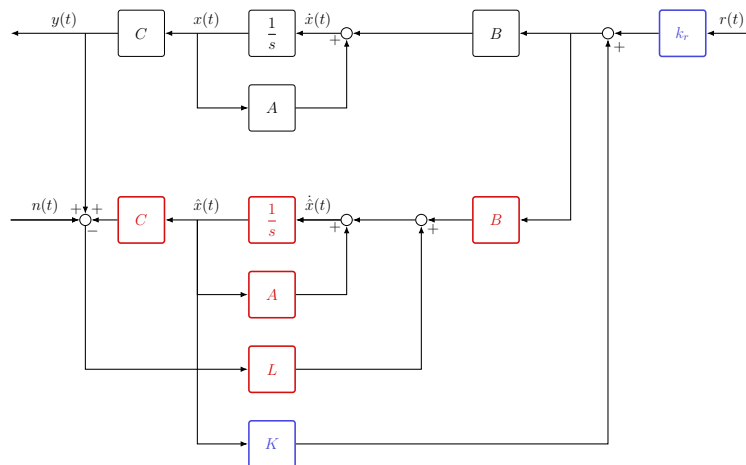
הרעיון: בהינתן מערכת לינארית קבועה בזמן שלא כל וקטור המצב שלה ניתן למדידה

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(d(t) + u(t)) \\ y(t) = Cx(t) + n(t) \end{cases}$$

נרצה לתכנן בקר דינאמי ששיחזר את וקטור המצב כולו, כך שנוכל לתכנן חוק בקרה בסגנון של משוב מצב, $u(t) = K\hat{x}(t)$ ועדיין להבטיח יציבות. לשם כך נבנה לתהליך משערך לונברגר המקבל בתור כניסה את היציאה מהתהליך ואת אות הבקרה והיציאה ממנו היא אות הבקר הרצוי, כלומר מערכת מהצורה

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ u(t) = K\hat{x}(t) \end{cases}$$

דיאגרמת בלוקים המתארת את הבקר נתונה באיור 1 כאשר בכחול מתוארת הבקרה ובאדום השיערוך.



איור 1: סכימת משוב מצב מבוסס משערך

את החוג הסגור ביחד עם בקר מבוסס משערך ניתן לכתוב במרחב המצב בתור

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & -BK \\ 0 & A_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_r B & B & 0 \\ 0 & B & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t) \\ d(t) \\ n(t) \end{bmatrix}$$

כאשר

$$A_K := A + BK, \quad A_L := A + LC, \quad \epsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

מסנן קלמן

מסנן קלמן הוא פתרון לבעיית השיערוך לינארי-ריבועי (אנלוגי לבקר LQR) תוך הנחה שהרעשים וההפרעות ניתנים למידול בתור רעשים לבנים בעלי עוצמות σ_n ו- σ_d בהתאמה. תחת הנחה זו מדובר במשערוך האופטימלי הממזער את פונקציית המחיר

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty (x(t) - \hat{x}(t))' (x(t) - \hat{x}(t)) dt$$

אם מתקיימים התנאים

1. הצמד (A, C) דיטקטבילי

2. $\sigma_n > 0$

3. לצמד $(A, B\sigma_d)$ אין מודים לא קונטרולביליים על הציר המדומה

אזי הגבר השיערוך האופטימלי נתון על ידי

$$L = -\sigma_n^{-1} \bar{Y} C'$$

כאשר $\bar{Y}$ הוא הפתרון המייצב של משוואת ריקאטי הבאה

$$\bar{Y} A' + A \bar{Y} + \sigma_d B B' - \sigma_n^{-1} \bar{Y} C' C \bar{Y} = 0$$

שימו לב שזה שקול לתכנון בקר אופטימלי עבור

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A' \tilde{x}(t) + C' \tilde{u}(t), \quad \left(\begin{array}{c|c} Q & S \\ \hline S' & R \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \sigma_d B B' & 0 \\ \hline 0 & \sigma_n \end{array} \right)$$

זהו מקרה פרטי של הפורמליזם הכללי יותר

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + D_w w(t) \end{cases}$$

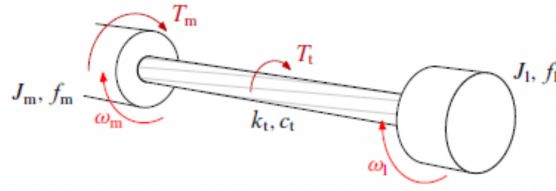
כאשר כל רכיב של $w(t)$ הוא רעש לבן בעל עוצמת יחידה. במקרה זה תנאי הקיום של הפתרון שונים מעט, וההגבר נתון על ידי

$$L = -(D_w D_w')^{-1} (D_w B_w' + \bar{Y} C')$$

כאשר הוא הפתרון המייצב של משוואת ריקאטי עבור הנתונים

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A' \tilde{x}(t) + C' \tilde{u}(t), \quad \left(\begin{array}{c|c} Q & S \\ \hline S' & R \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} B_w \\ D_w \end{array} \right) (B_w' \quad D_w')$$

שאלה מספר 1



איור 2: מנוע חשמלי עם עומס גמיש

באיור 2 מופיע איור סכמטי של מנוע DC המניע עומס דרך תמסורת גמישה, משוואות התנועה הן

$$\begin{aligned} J_m \dot{\omega}_m + c_t (\omega_m - \omega_l) + k_t (\theta_m - \theta_l) &= \tau_m = k_i i \\ J_l \dot{\omega}_l - c_t (\omega_m - \omega_l) - k_t (\theta_m - \theta_l) &= 0 \end{aligned}$$

כאשר J_m הוא מומנט האינרציה של המנוע, J_l מומנט האינרציה של העומס ו- k_t, c_t הם מקדמי הריסון והקשיחות של התמסורת הגמישה. יחד עם ההגדרה $\theta_\delta = \theta_m - \theta_l$, מימוש של המערכת במרחב המצב הוא

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_\delta(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \dot{\omega}_l(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -k_t/J_m & -c_t/J_m & c_t/J_m \\ k_t/J_l & c_t/J_l & -c_t/J_l \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J_m \\ 0 \end{bmatrix} \tau_m(t) \\ y(t) &= [0 \ 0 \ 1] x(t) \end{aligned}$$

ולאורך השאלה נשתמש בערכים המספריים

$$J_m = 10/9, J_l = 10, k_t = 1, c_t = 0.1, k_i = 1$$

המימוש במרחב המצב הוא

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -0.9 & -0.09 & 0.09 \\ 0.1 & 0.01 & -0.01 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [0 \ 0 \ 1] x(t) \end{aligned}$$

אנו מעוניינים לבקר את המערכת בחוג סגור באמצעות משוב מצב, אך נניח שלא ניתן למדוד את כל ווקטור המצב אלא רק את היציאה $y(t) = \omega_l(t)$. נצטרך לשערך את ווקטור המצב והבקר יקבל את הווקטור המשוער. נתון וקטור ההגברים K שהתקבל מפתרון בעיית LQR:

$$Q = 40 \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix} \quad R = 1 \implies \begin{cases} K = -[25.1382 & 9.905 & 190.195] \\ k_r = 200.1 \end{cases}$$

ויש לעקוב אחר האות $r(t) = \sin(2t)$

1. תכננו למערכת משערך מסוג מסנן קלמן ובחנו את טיב השערוך עבור תנאי ההתחלה $x_0 = [1 \ 1 \ 1]^T$ וללא רעש מדידה. קבעו את B_w ובדקו ערכים שונים של σ .

2. חזרו על סעיף א' כאשר קיים רעש מדידה $n(t) = \sin(20t)$

3. ידוע כי קיים במערכת רעש מדידה שאינו לבן אלא רעש שהספקטרום שלו מרוכז בתדר

$$\omega = 20[\text{rad/s}]$$

הציעו דרך למדל את הרעש ובצעו שערוך של ווקטור המצב באמצעות מסנן קלמן מורחב מתאים. בדקו את תוצאת השערוך עבור רעש המדידה מהסעיף הקודם.

פתרון שאלה 1 סעיף 1

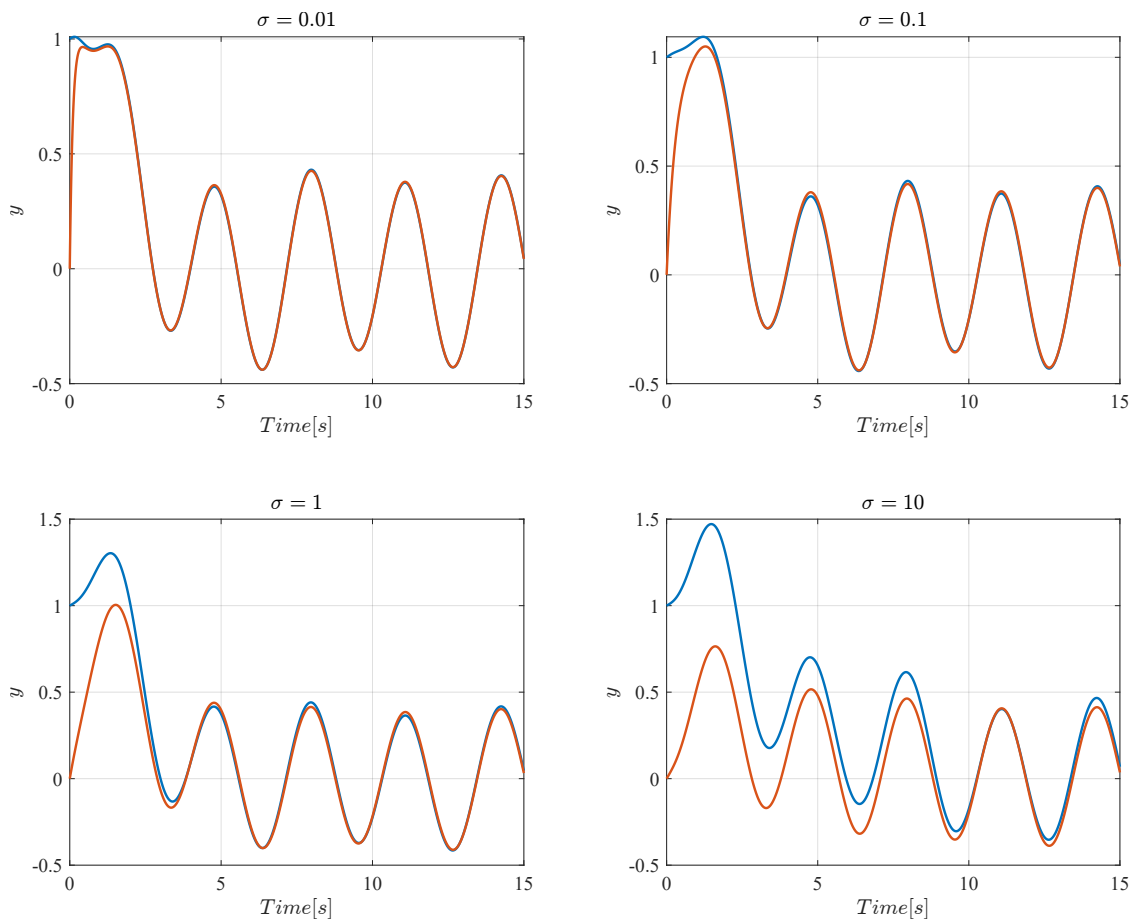
תנאי ההתחלה ניתן להצגה כהפרעת תהליך מסוג פונקציית הלם (שהיא גם רעש לבן):

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow w(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t)$$

לפיכך, המטריצה דרכה ההפרעה נכנסת למערכת, $B_w = I$, הינה מטריצת היחידה, $B_w = I$. נשתמש בסכימת הבקרה והשערוך מאיור 1 עם ווקטור הבקרה הנתון K . את הגבר המשערוך L נמצא לפי משוואת ריקטי

$$\bar{Y}A^T + A\bar{Y} + I - \frac{1}{\sigma}\bar{Y}C^T C\bar{Y} = 0 \quad L = -\frac{1}{\sigma}\bar{Y}C^T$$

עבור הערכים $\sigma = 0.01, 0.1, 1, 10$ נקבל את התוצאות הבאות עבור משתנה המצב השלישי $x_3(t) = \omega_l(t)$:

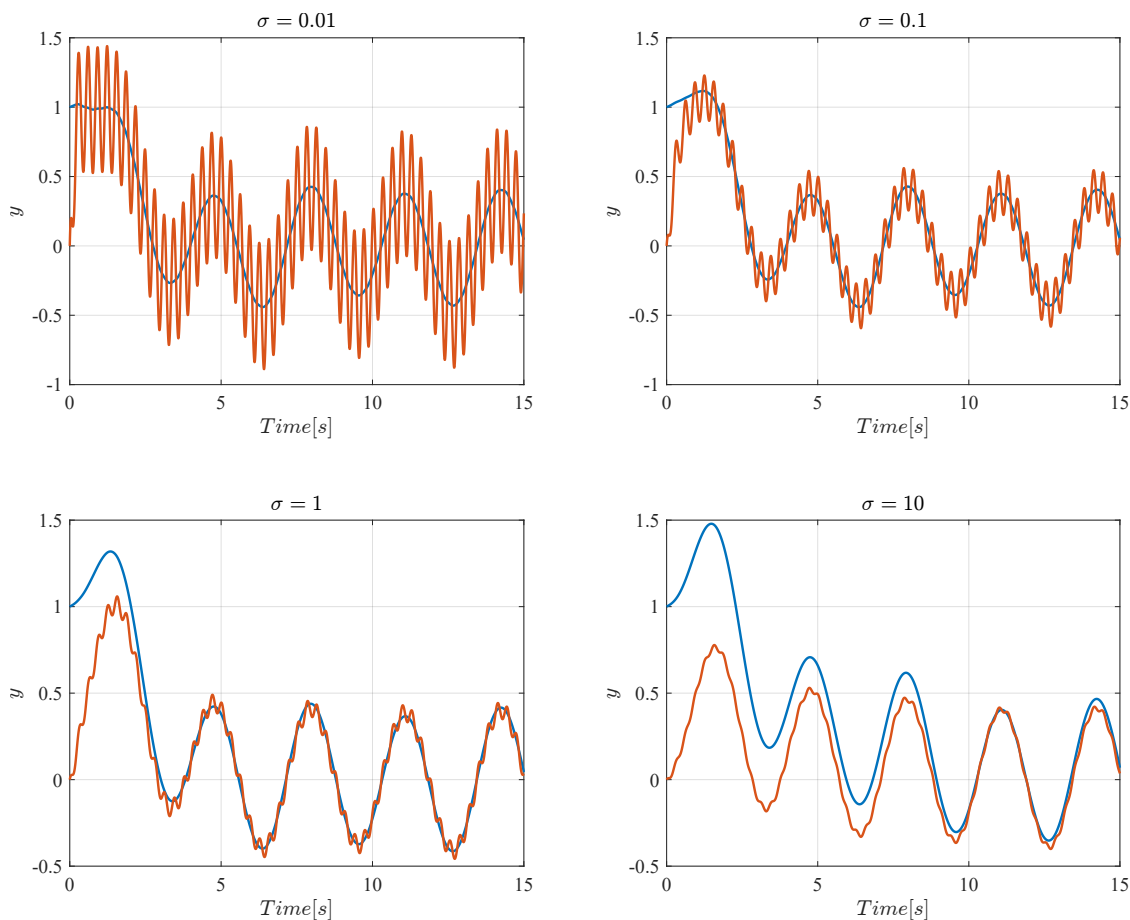


איור 3: תוצאות שערוך עבור ערכי σ שונים.

כאשר המשקל על הרעש σ קטן, כך המשערוך "מניח" שהמדידה טובה ומסתמך יותר על המדידה. כיוון שבפועל לא היה רעש מדידה כלל, משקל קטן יותר משקף את המציאות טוב יותר ולכן קיבלנו שערוך שמתכנס מהר יותר. σ גדול יותר פירושו שהשערוך מתכנס לאט.

פתרון שאלה 1 סעיף 2

נבחן את תוצאות השערוך בנוכחות הרעש $n(t) = \sin(20t)$



איור 4: תוצאות שערוך עבור ערכי σ שונים ורעש.

במקרה זה רעש המדידה קיים, לכן המשקל הקטן על הרעש לא מספיק את המדידות הרועשות ותוצאות השערוך בפועל אינן טובות. לעומת זאת, משקל גדול על הרעש תואם את המצב הנוכחי, כך שהמדידות צריכות להיות מסוננות יותר. לכן, השערוך מתכנס לאט כמו בסעיף הקודם אך הרעש מסונן בצורה יותר טובה.

פונקציית תמסורת של המסנן

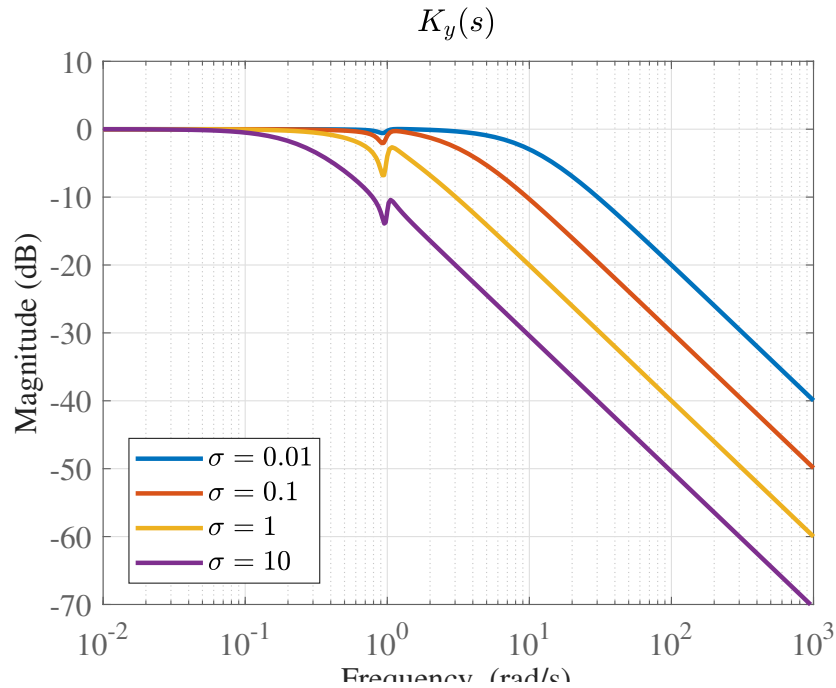
נרשום את פונקציית התמסורת מהיציאה המדודה y אל משתנה המצב המשוערך שמעניין אותנו $x_3(t) = \omega_l(t)$, כאשר אצלנו

$$\omega_l(t) = Cx(t)$$

ביצוע התמרת לפס על משוואת המשערך נותן:

$$K_y(s) = C(sI - A - LC)^{-1}L$$

נצייר את תגובת התדר של המסנן עבור ערכי σ מהסעיף הקודם:



איור 5: תגובת תדירות של המשערך עבור ערכי σ שונים.

ככל שהפרמטר σ קטן יותר, כך רוחב הסרט של המשערך גדול יותר, כלומר השערוך מתכנס מהר יותר. מצד שני, הרעש בתדר $20[rad/s]$ מונחת פחות ככל ש- σ גדל, רוחב הסרט של המשערך קטן אך ההנחתה של הרעש טובה יותר.

מסנן קלמן מורחב

כאשר הרעש אינו לבן, (נקרא רעש צבעוני, בעל תגובת תדר לא אחידה) ניתן לייצגו על ידי רעש לבן העובר דרך מסנן מסוים, כלומר:

$$n(s) = W_n(s)\tilde{n}(s)$$

כאשר n הינו רעש צבעוני ו $\tilde{n}$ הוא רעש לבן. נגדיר מימוש של המסנן $W_n(s)$ במרחב המצב:

$$\begin{cases} \dot{x}_n = A_n x_n + B_n \tilde{n} \\ n = C_n x_n + \tilde{n} \end{cases}$$

על ידי הרחבת ווקטור המצב מצרפים את המימוש של המסנן אל המימוש של המערכת ונקבל ביטוי עבור המשערך:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\hat{x}}_n(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{\sigma}}B_n C & A_n - B_n C_n \end{bmatrix}}_{A_{au}} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{x}_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{au}} u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\sigma}}B_n \end{bmatrix}}_{B_y} y + \underbrace{\begin{bmatrix} L \\ L_n \end{bmatrix}}_{L_{au}} \left(y - \underbrace{\begin{bmatrix} C & \sqrt{\sigma}C_n \end{bmatrix}}_{C_{au}} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{x}_n(t) \end{bmatrix} \right)$$

הערה: נשים לב כי ישנו הבדל מהמשערך הרגיל. בנוסף לכניסה u הכניסה הידועה למשערך המורחב כוללת גם את היציאה המדודה y .

את הגבר המשערך L_{au} נקבל מפתרון משוואת ריקאטי:

$$\bar{Y} A_{au}^T + A_{au} \bar{Y} + B_w B_w^T - \frac{1}{\sigma} \bar{Y} C_{au} C_{au}^T \bar{Y} = 0 \quad L_{au} = -\frac{1}{\sigma} \bar{Y} C_{au}^T$$

פתרון שאלה 1 סעיף 3

כאשר ידוע שספקטרום הרעש מרוכז בתדר מסוים, מקובל למדל אותו באמצעות המסנן הבא:

$$W_n(s) = \frac{s^2 + \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} \quad \omega_0 = 20[\text{rad/s}]$$

בפועל הרעש אינו זהה למודל, אך המודל טוב כי גם הספקטרום שלו מרוכז בתדר ω_0 . מימוש המסנן במרחב המצב:

$$\begin{cases} \dot{x}_n = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{bmatrix} x_n + \begin{bmatrix} \sqrt{2}\omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{n} \\ n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_n + \tilde{n} \end{cases}$$

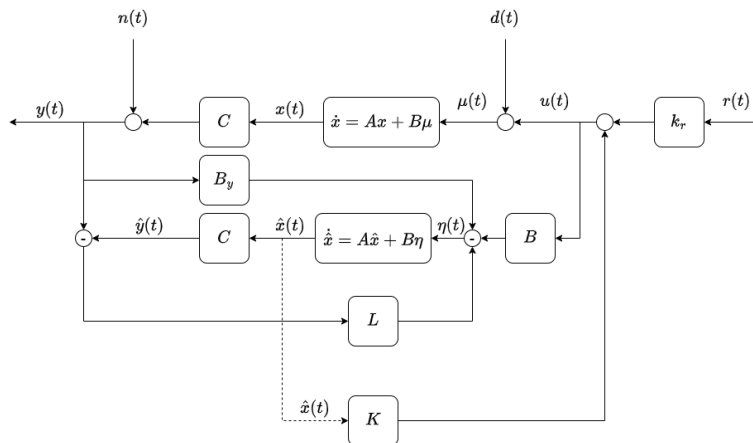
משוואת המשעריך המורחב:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\hat{x}}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 \\ -0.9 & -0.09 & 0.09 & | & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.01 & -0.01 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\sigma}}70.71 & | & -70.71 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & | & -50 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{x}_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\sigma}}70.71 \\ 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} L \\ L_n \end{bmatrix} \left(y - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & | & \sqrt{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{x}_n(t) \end{bmatrix} \right)$$

כאשר את וקטור ההגברים של המשעריך המורחב נקבל

$$\begin{bmatrix} L \\ L_n \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sigma} \bar{Y} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & | & \sqrt{\sigma} & 0 \end{bmatrix}^T$$

נקבל מפתרון משוואת ריקטי עבור ערכי $\sigma = 0.01, 0.1, 1, 10$. נשתמש בסכימה הבאה: פונקציית

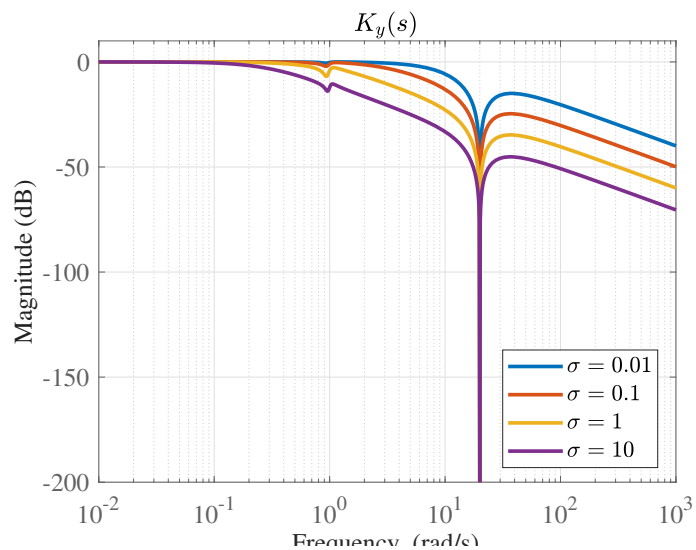


איור 6: סכימת משב מוצב מבוסס משעריך מצב מורחב

התמסורת של המסנן למצב $\omega_l(t) = x_3(t)$ תהיה

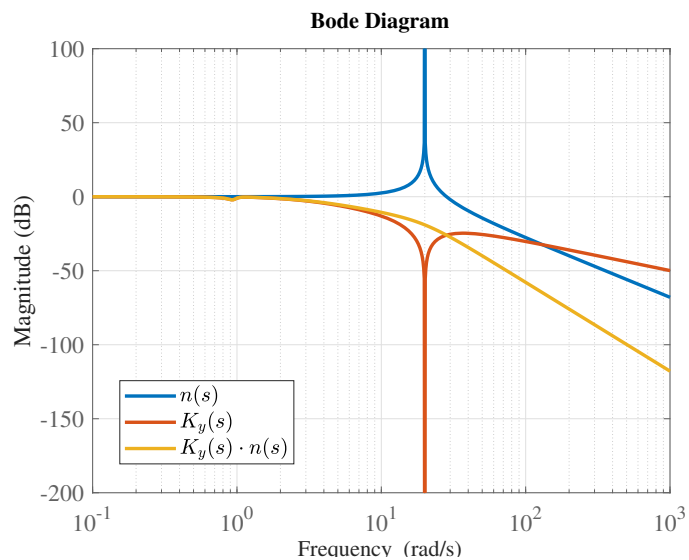
$$K_y(s) = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \end{bmatrix} (sI - (A_{au} + L_{au}C_{au}))^{-1} (L_{au} + B_y)$$

ותגובת התדר תהיה:



איור 7: תגובת תדירות של המשערך עבור ערכי σ שונים.

קיבלנו הנחתה מושלמה בתדר העיקרי של הרעש. עבור $\sigma = 0.1$ והרעש $n(s) = \frac{20^2}{s^2 + 20^2}$ נקבל:



תגובת המשתנה המשוער לרעש תהיה אות חלק ודועך. עבור השערוך של המצב השלישי בנוכחות רעש המדידה נקבל

