



035188 - תורת הבקרה

תרגול 9

4 ביוני 2025

חזרה על משוב LQR

בקר LQR הוא משוב מצב המייצב את המערכת אסימפטוטית וממזער את פונקציית המחיר

$$J = \int_0^\infty (x^T(t) \quad u^T(t)) \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^\infty (x^T Q x + x^T S u + u^T S^T x + u^T R u) dt$$

כאשר המטריצות Q, S, R הן פרמטרי תכן הממשקלים את מאמץ הבקרה, הצימוד בין וקטור המצב למאמץ הבקרה, ואת משתני המצב השונים, בהתאמה. תחת שלוש ההנחות הבאות

1. הזוג (A, B) ניתן לייצוב (Stabilizable).

2. משקל אות הבקרה מוגדר חיובי, $R > 0$, והמטריצה $Q - S R^{-1} S^T \geq 0$ מוגדרת אי שלילית (מבטיח אות בקרה חסום).

3. למטריצה

$$\begin{bmatrix} A - j\omega I & B \\ Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$$

יש דרגת עמודות מלאה.

אזי המשוב האופטימלי נתון על ידי

$$u_{\text{opt}}(t) = K_{\text{opt}} x(t) = -R^{-1}(S^T + B^T \bar{X})x(t)$$

כאשר $\bar{X} = \bar{X}^T \geq 0$ הוא הפתרון המייצב של משוואת ריקאטי האלגברית

$$A^T \bar{X} + \bar{X} A + Q - (S + \bar{X} B) R^{-1} (S^T + B^T \bar{X}) = 0$$

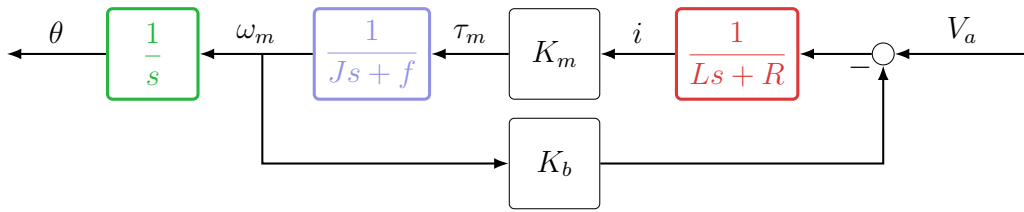
במאטלב ניתן למצוא את הפתרון למשוואה בעזרת הפעולה `icare()`.

```
[X,K] = icare(A,B,Q,R,S);
```

```
[X,K] = icare(A,B,Q,R); %when S = 0
```

שימו לב שהפונקציה יכולה להוציא גם את הפתרון $\bar{X}$ וגם את מטריצת ההגברים K . מטריצת ההגברים המתקבלת היא בסימן הפוך להגדרה בקורס!

שאלה מספר 1



איור 1: דיאגרמת בלוקים של מנוע חשמלי

באיור 1 מופיעה דיאגרמת בלוקים של מנוע DC, המורכבת מחלק חשמלי, חלק מכאני ואינטגטור, המסומנים באדום, כחול, וירוק בהתאמה. המימוש הפיזיקלי שמצאנו למערכת במרחב המצב בתרגול הקודם הוא

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{x}_m(t) \\ \dot{x}_\theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -K_b/L & 0 \\ K_m/J & -f/J & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ x_m(t) \\ x_\theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ \theta(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ x_m(t) \\ x_\theta(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

1. נסחו בעיית LQR עבור הקריטריון

$$J = \int_0^\infty \theta^2(t) + \rho u^2(t) dt$$

בחנו את השפעת ρ על תגובת המערכת.

2. נסחו בעיית LQR עבור הקריטריון

$$J = \int_0^\infty q \omega_m^2(t) + (1 - q) \dot{\omega}_m^2(t) + \rho u^2(t) dt$$

בחנו את השפעת q על תגובת המערכת.

3. נסחו בעיית LQR עבור הקריטריון

$$J = \int_0^\infty e^{2\alpha t} (\theta^2(t) + \rho u^2(t)) dt$$

בחנו את השפעת α על תגובת המערכת.

$$K_m = 0.0396[\text{Nm/A}], \quad K_b = 0.0396[\text{Vs/rad}], \quad J = 0.125[\text{Kg} \cdot \text{m}^2], \\ f = 0.05[\text{Nm} \cdot \text{s/m}], \quad R = 6.8[\Omega], \quad L = 2.65 \times 10^{-4}[\text{H}]$$

$$A = \begin{bmatrix} -2.566 \cdot 10^4 & -149.4 & 0 \\ 0.3168 & -0.4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3.7736 \cdot 10^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

פתרון שאלה מספר 1

1. ראינו בתרגול הקודם שהמערכת קונטרולבילית ולכן היא גם ניתנת לייצוב. מכיוון שאנו מעוניינים למזער רק את θ מתוך וקטור המצב, נשתמש במטריצה C מתוך המימוש הפיזיקלי.

$$\begin{aligned} \theta^2 + \rho u^2 &= x_\theta^2 + \rho u^2 = x_\theta^T x_\theta + \rho u^T u = x^T C^T C x + u^T \rho u = \\ &= x^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + u^T \rho u = \begin{bmatrix} x^T & u \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \rho \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ולכן פונקציית המחיר תהיה

$$J = \int_0^\infty \begin{bmatrix} x^T(t) & u(t) \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} Q_1 & 0 \\ \hline 0 & \rho \end{array} \right] \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt$$

ומשוואת ריקאטי (CARE) תהיה

$$A^T \bar{X} + \bar{X} A + Q_1 - \frac{1}{\rho} \bar{X} B B^T \bar{X} = 0$$

זוהי משוואה מטריצית. נפתור אותה בעזרת מאטלב עם הפונקציה icare^1 עבור ערכים שונים של ρ ונקבל את הפתרון המייצב $\bar{X}$ ומשוב המצב האופטימלי יהיה

$$u(t) = f_r r(t) + K x(t) \quad K = -\frac{1}{\rho} B^T \bar{X} \quad f_r = -\frac{1}{C(A + BK)^{-1} B}$$

דינמיקת המערכת בחוג סגור תהיה

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + B f_r u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

על מנת למצוא את אות הבקרה נגדיר את מטריצת היציאה C להיות $C_u = K$.

תגובת המערכות בחוג סגור לתנאי התחלה $\theta(0) = 1[\text{rad}]$ מוצגות באיור 2.

שימו לב שבהתאם לציפיה, ככל שהמשקל על מאמץ הבקרה בפונקציית המחיר הוא גבוה יותר, כך מקבלים התכנסות איטית יותר של זווית המנוע ל-0 אך מאמץ הבקרה קטן יותר.

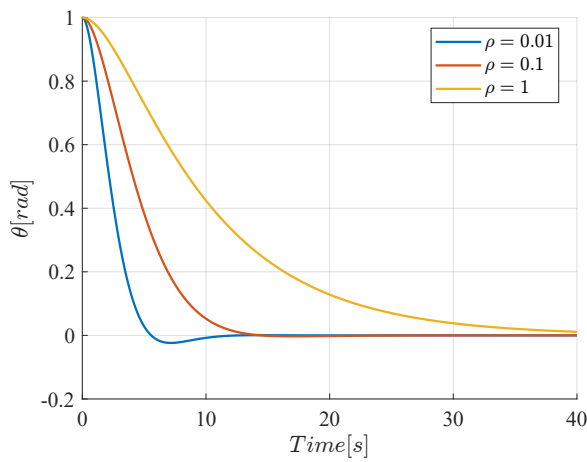
2. כעת פונקציית המחיר כוללת משקל יחסי q על מהירות המנוע ועל תאוצת המנוע ואת אותו משקל ρ על מאמץ הבקרה. על מנת למזער מהירות הציר $\omega_m(t)$ נגדיר

$$C_\omega = [0 \quad 1 \quad 0] \implies \omega_m(t) = C_\omega x(t)$$

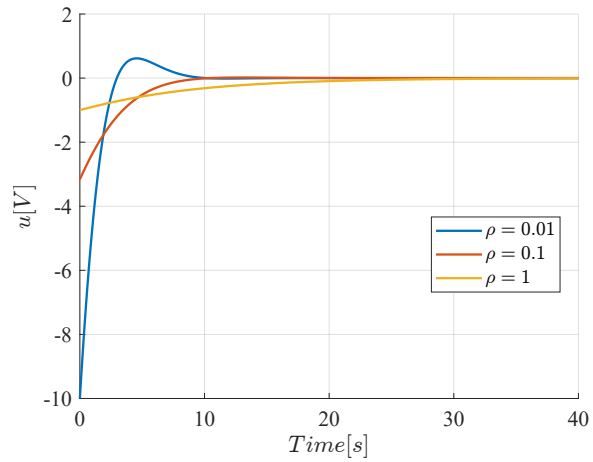
נגזור ונקבל

$$\dot{\omega}_m = C_\omega \dot{x}(t) = C_\omega (Ax(t) + Bu(t)) \underset{C_\omega B=0}{=} C_\omega Ax(t)$$

¹שימו לב שהפונקציה יכולה להוציא גם את הפתרון $\bar{X}$ וגם את מטריצת ההגברים K . מטריצת ההגברים המתקבלת היא בסימן הפוך להגדרה בקורס!



(א) זווית המנוע עבור ערכי ρ שונים.



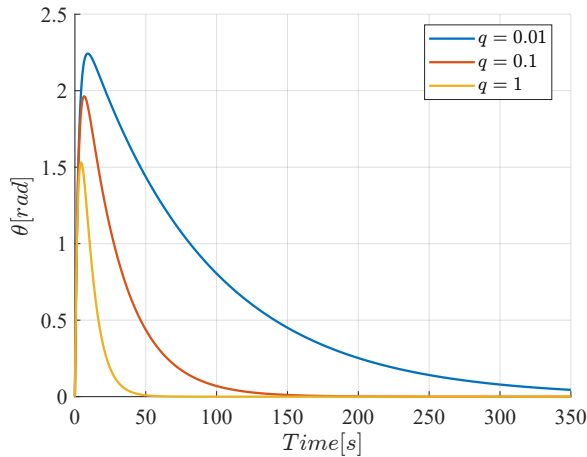
(ב) אות הבקרה עבור ערכי ρ שונים.

איור 2: תגובת החוג הסגור עם בקרת LQR

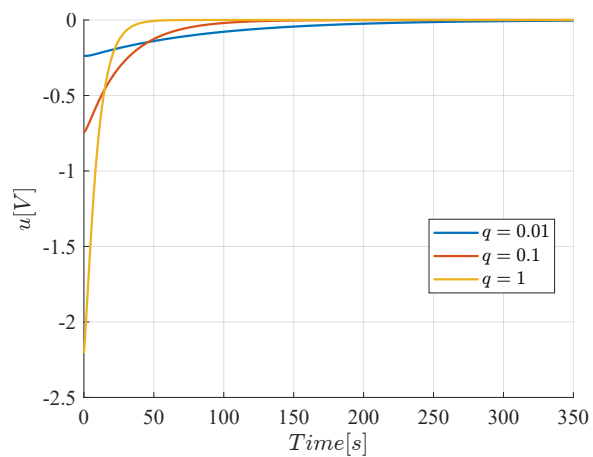
כעת ניתן למצוא את המטריצה Q_2

$$\begin{aligned} q\omega_m^T\omega_m + (1-q)\dot{\omega}_m^T\dot{\omega}_m + \rho u^2 &= qx^TC^TCx + (1-q)x^TA^TC_\omega^TC_\omega Ax + \rho u^T u = \\ &= x^T (qC^TC + (1-q)A^TC_\omega^TC_\omega A) x + \rho u^T u = \\ &= \begin{bmatrix} x^T & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (qC^TC + (1-q)A^TC_\omega^TC_\omega A) & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \\ Q_2 &= qC^TC + (1-q)A^TC_\omega^TC_\omega A \end{aligned}$$

תגובת המערכות בחוג סגור לתנאי התחלה $\dot{\omega}_m(0) = 1 [rad/s]$ מוצגות באיור 3א.



(א) זווית המנוע עבור ערכי ρ שונים.



(ב) אות הבקרה עבור ערכי ρ שונים.

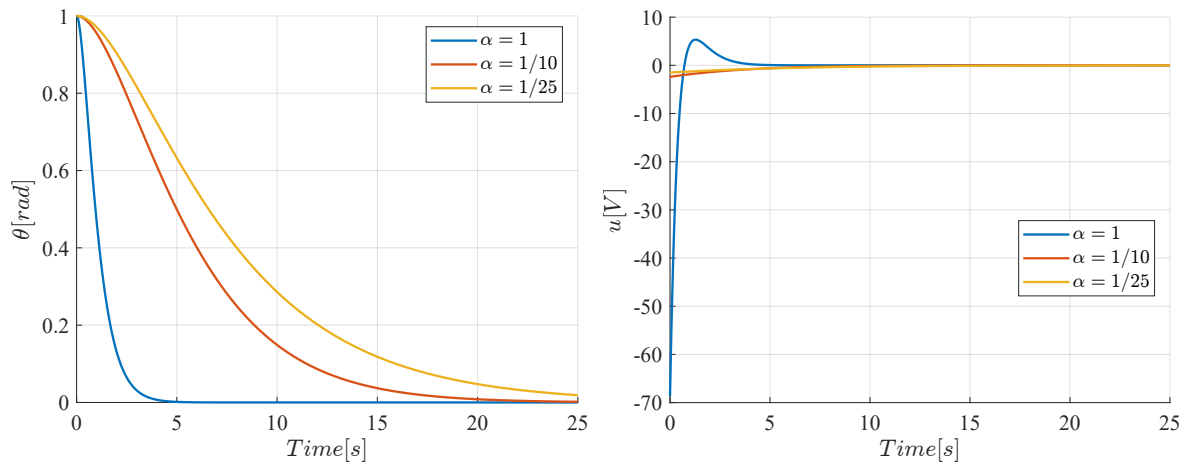
איור 3: תגובת החוג הסגור עם בקרת LQR

ככל שהמשקל על התאוצה הזוויתית גדול יותר (q קטן יותר) כך התגובה איטית יותר על מנת להקטין את התאוצה ולהיפך. כמו כן, ככל ש q גדל, כך המשקל היחסי על אות הבקרה קטן ($\rho = 1$) ומקבלים מאמץ בקרה גבוה יותר.

3. קריטריון זה מבטיח כי וקטור המצב $x(t)$ מתכנס בקצב מהיר יותר מ $e^{-\alpha t}$. נגדיר את המשקלים על המצב ואות הברה להיות כמו בסעיף 1, אך כעת עלינו לפתור את משוואת ריקאטי הבאה:

$$(\alpha I + A)^T \bar{X} + \bar{X}(\alpha I + A) + Q_1 - \frac{1}{\rho} \bar{X} B B^T \bar{X} = 0$$

ועבור הפתרון המייצב $\bar{X}$ נקבל את התגובות הבאות עבור ערכי α שונים באיור 4 ($\rho = 1$).



(א) זווית המנוע עבור ערכי ρ שונים.

(ב) אות הבקרה עבור ערכי ρ שונים.

איור 4: תגובת החוג הסגור עם בקרת LQR

ניתן לראות שההוספה של הפרמטר המשקל על זמן ההתכנסות אכן מאלצת את זמן ההתכנסות של המערכת להיות מהיר יותר מ- $1/\alpha$ כפי שנדרש גם בעלות של שימוש באות בקרה גבוה יותר.

שאלה מספר 2

נתון התהליך :

$$P(s) = \frac{1}{s+1}$$

1. כתבו למערכת מימוש במרחב המצב ומצאו משוב מצב הממקם את קוטב החוג הסגור בנקודה 2-.

2. מצאו משוב מצב הפותר את בעיית המינימום אנרגיה

$$J = \int_0^{\infty} u^2(t) dt$$

כלומר, מצאו בקר המייצב את המערכת במינימום הפעלה של אות בקרה.

3. מצאו משוב מצב הממזער את הקריטריון

$$J = \int_0^{\infty} y^2(t) + u^2(t) dt$$

פתרון שאלה מספר 2

1. מימוש אפשרי במרחב המצב:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = x \end{cases} \implies \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right)$$

מטריצת הקונטרולביליות עבור מערכת זו היא $M_c = B = 1$ כך שהזוג (A, B) קונטרולבילי. הפולינום האופייני הרצוי של החוג הסגור הוא

$$\chi_{cl}(s) = s + 2$$

ואת הגבר משוב המצב לפי נוסחת אקרמן הוא:

$$K = -1 \cdot M_c \cdot \chi_{cl}(A) = -1 + 2 = 1$$

2. לפני שנפתור את השאלה באופן פורמאלי, נסתכל על המערכת הנתונה ועל בעיית האופטימיזציה שאנו נדרשים לפתור. כיוון שהתהליך יציב, לייצב את המערכת במינימום מאמץ בקרה פירושו לא להפעיל בקרה בכלל! כלומר, נוכל לבחור את אות הבקרה להיות

$$u(t) = Kx(t) = 0 \implies K = 0$$

כעת, נפתור את הבעיה בצורה פורמאלית. עבור פונקציית המחיר

$$J = \int_0^\infty u^2(t) dt \implies \begin{cases} Q = 0 \\ \rho = 1 \end{cases}$$

ומשוואת ריקאטי תהיה

$$A^T \bar{X} + \bar{X} A - \bar{X} B B^T \bar{X} = 0$$

עבור $A = -1$, $B = 1$ נקבל

$$-2\bar{X} - \bar{X}^2 = -\bar{X}(2 + \bar{X}) = 0 \implies \bar{X} = 0, -2$$

אם נבחר את הפתרון $\bar{X} = -2$ נקבל

$$K = -\frac{1}{\rho} B^T \bar{X} = 2 \implies A_k = A + BK = -1 + 1 \cdot 2 = 1$$

והמערכת בחוג סגור תהיה לא יציבה, כך שפתרון זה אינו מייצב. בהרצאה ראינו שהפתרון המייצב צריך להיות אי-שלילי, ולכן נבחר $\bar{X} = 0$ ונקבל

$$K = -\frac{1}{\rho} B^T \bar{X} = 0 \implies u(t) = 0 \implies A_k = A + BK = -1$$

כך שקיבלנו שאות הבקרה האופטימלי הוא לא להפעיל בקרה בכלל כמו שציפינו.

3. במקרה זה, פונקציית המחיר היא

$$J = \int_0^\infty y^2(t) + u^2(t) dt = \int_0^\infty [x \quad u] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt \implies \begin{cases} Q = 1 \\ \rho = 1 \end{cases}$$

ומשוואת ריקאטי תהיה

$$A^T \bar{X} + \bar{X} A + Q - \bar{X} B B^T \bar{X} = -\bar{X}^2 - 2\bar{X} + 1 = 0 \implies \bar{X} = -1 \pm \sqrt{2}$$

לכן, הפתרון המייצב הוא $\bar{X} = -1 + \sqrt{2} > 0$ שנותן משוב מצב $F = 1 - \sqrt{2} \approx -0.414$. **הערה:** משוב זה ימקם את קוטב החוג הסגור בנקודה $A + BK = -\sqrt{2}$, לעומת הנקודה -2 , כמו שהזיז המשוב $K = 1$ בסעיף הראשון. כלומר, כאן הבקר "יתאמץ פחות" בהזזה של קוטב התהליך הנתון -1 . מצד שני, התגובה עם קוטב -2 תתכנס מהר יותר לעומת הקוטב $\sqrt{2}$. הנמכה של ההגבר מתחת ל 0.414 תגרום להקטנת מאמץ הבקרה להקטנת מאמץ הבקרה אך גם להאטת התגובה והאופטימום מתקבל עבור $F = -0.414$.