

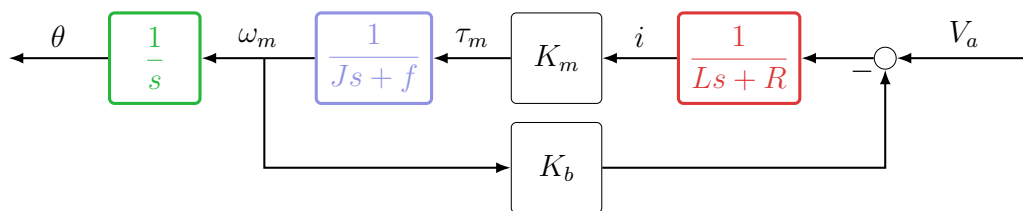


035188 - תורת הבקרה

תרגול 8

31 במאי 2025

שאלה מספר 1



איור 1: דיאגרמת בלוקים של מנוע חשמלי

באיור 1 מופיעה דיאגרמת בלוקים של מנוע DC, המורכבת מחלק חשמלי, חלק מכאני ואינטגטור, המסומנים באדום, כחול, וירוק בהתאמה.

1. כיתבו מימוש פיזיקלי למערכת, וייצגו את הכא"מ החוזר בתור משוב מצב.

2. האם ניתן למקדם את קטבי החוג באופן שרירותי? באם כן, תכננו למערכת משוב מצב הממקם את קטבי החוג הסגור ב

$$\lambda_{1,2,3} = \frac{-R}{L}, \frac{-f}{J}, -3$$

בעזרת נוסחת אקרמן.

3. חזרו על הסעיף הקודם מבלי להשתמש בנוסחת אקרמן (רמז: השתמשו במבנה המימוש).

4. ביחנו את תגובת המערכת עבור שלושה מקרים

$$\chi_{cl,a}(s) = (s + R/L)(s + f/J)(s + 3)$$

$$\chi_{cl,b}(s) = (s + R/L)(s + 3)^2$$

$$\chi_{cl,c}(s) = (s + 10)(s + 3)^2$$

בחנו גם את אות הבקרה וגם את היציאה. הסבירו את התוצאות.

$$K_m = 0.0396[\text{Nm/A}], \quad K_b = 0.0396[\text{Vs/rad}], \quad J = 0.125[\text{Kg} \cdot \text{m}^2],$$

$$f = 0.05[\text{Nm} \cdot \text{s/m}], \quad R = 6.8[\Omega], \quad L = 2.65 \times 10^{-4}[\text{H}]$$

פתרון שאלה מספר 1

1. ראשית נבחן את המערכת שלנו. אם לא היה כא"מ חוזר, המערכת הכוללת הייתה מורכבת פשוט משלוש מערכות דינאמיות מחוברות בטור, על הכא"מ החוזר ניתן לחשוב כעל הפרעה המשפיעה על אות הבקרה V_a הנכנס אל המערכת הטורית. לכן מימוש פיזיקלי נוח הוא לבנות פשוט את המימוש הטורי של שלוש המערכות, ואז לצרף את השפעת הכא"מ. לשם כך, נבנה מימוש לכל חלק דינמי בנפרד, ואז נחבר בטור את המימוש. מימוש לחלק החשמלי:

$$P_e(s) = \frac{K_m}{Ls + R} = \frac{K_m/L}{s + (R/L)} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_e(t) &= -\frac{R}{L}x_e(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ \tau_m(t) &= K_mx_e(t) \end{cases}$$

שימו לב שהמצב $x_e(t)$ הוא הזרם בסלילי המנוע והכניסה היא $u = V_a + V_b$ (למשוב השלילי נדאג בהמשך). הכא"מ החוזר הוא משוב המשתמש במהירות הזוויתית, לכן נבחר משתנה זה בתור משתנה המצב של מימוש החלק המכאני

$$P_m(s) = \frac{1}{Js + f} = \frac{1/J}{s + (f/J)} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_m(t) &= -\frac{f}{J}x_m(t) + (1/J)\tau_m(t) \\ \omega_m(t) &= x_m(t) \end{cases}$$

נחבר את שתי המערכות בטור

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{x}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & 0 \\ K_m/J & -f/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ \omega_m(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

ולבסוף נחבר אליהן את האינטגרטור בטור

$$\begin{cases} P_\theta(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_\theta(t) &= u(t) \\ \theta(t) &= x_\theta(t) \end{cases} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{x}_m(t) \\ \dot{x}_\theta(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -R/L & 0 & 0 \\ K_m/J & -f/J & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ x_m(t) \\ x_\theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ \theta(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ x_m(t) \\ x_\theta(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

את המשוב הפנימי שנובע מהכא"מ המושרה ניתן לתאר בתור משוב מצב חלקי מהצורה

$$V_b(t) = -\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & K_b & 0 \end{bmatrix}}_{K_b} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ x_m(t) \\ x_\theta(t) \end{bmatrix}$$

נמצא את המימוש המלא על ידי הצבה של V_b במשוואות המצב

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \hat{A}x(t) + Bu(t) \\ u(t) &= V_a(t) + V_b(t) \implies \dot{x}(t) = \hat{A}x(t) + BV_a(t) + BV_b(t) \\ \dot{x}(t) &= \hat{A}x(t) - BK_b x(t) + BV_a(t) = \underbrace{(\hat{A} - BK_b)}_A x(t) + BV_a(t) \\ \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{x}_m(t) \\ \dot{x}_\theta(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -R/L & -K_b/L & 0 \\ K_m/J & -f/J & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ x_m(t) \\ x_\theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ \theta(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ x_m(t) \\ x_\theta(t) \end{bmatrix} \end{cases}\end{aligned}$$

2. על מנת למקם את קטבי החוג באופן שרירותי על המערכת להיות קונטרולבילית, זה גם תנאי לשימוש בנוסחת אקרמן. נחשב את מטריצת הקונטרולביליות של המערכת (פעולת $\text{ctrb}(A, B)$ במאטלב)

$$M_c = \frac{1}{LJ} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{RJ}{L} & \frac{JR^2 - LK_b K_m}{L^2} \\ 0 & K_m & -\frac{K_m(R+f/J)}{L} \\ 0 & 0 & K_m \end{bmatrix}$$

וזו מטריצה מדרגה מלאה כל עוד הפרמטרים שונים מאפס, לכן המערכת קונטרולבילית וניתן למקום את הקטבים באופן שרירותי. נוסחת אקרמן נתונה על ידי

$$K = - \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} M_c^{-1} \chi_{cl}(A)$$

כאשר $\chi_{cl}(A)$ הוא הפולינום האופייני הרצוי כאשר המטריצה A מוצבת בו בתור משתנה, שימו לב כי נוסחת אקרמן לא באמת משתמשת בכל המטריצה M_c^{-1} אלא בשורה האחרונה שלה בלבד. היות ומטריצת הקונטרולביליות היא משולשת עליונה גם ההופכית שלה היא משולשת עליונה, לכן אין לנו צורך להפוך את כל המטריצה שכן

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} M_c^{-1} = \left(\frac{1}{JL} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/K_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{LJ}{K_m} \end{bmatrix}$$

מכאן לפי נוסחת אקרמן ההגבר הדרוש על מנת למקם את הקטבים הוא

$$\begin{aligned}K &= -\frac{JL}{K_m} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (A + (R/L)I) (A + (f/J)I) (A + 3I) \\ K &= \begin{bmatrix} -3L & K_b - \frac{3JR}{K_m} & -\frac{3Rf}{K_m} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

וחוק הבקרה המתקבל הוא

$$V_a(t) = -3Lx_e(t) + \left(K_b - \frac{3JR}{K_m} \right) x_m(t) - \frac{3Rf}{K_m} x_\theta(t)$$

שימו לב שחוק הבקרה כולל פיצוי עבור המתח החוזר (Back EMF) של המנוע.

3. נשים לב כי למעשה התבקשנו לבטל את השפעת הכא"מ החוזר ולהזיז רק את הקוטב של האינטגרטור. אפשר בקלות לתכנן משוב מצב עבור המקרה הזה בלי להתחשב בכא"מ החוזר, כל מה שצריך לעשות זה לתכנן משוב עבור המערכת הטורית, $\tilde{K}$, ולהוסיף איבר שיבטל את השפעת הכא"מ - כלומר ההגבר הכולל יהיה מהצורה

$$K = \tilde{K} + \begin{bmatrix} 0 & K_b & 0 \end{bmatrix}$$

אבחנה שנייה היא כי היות והמערכת המקורית קונטרולבילית, אם נעביר את המטריצה A לצורה בלוק אלכסונית כאשר המוד המוד בראשית נמצא בבלוק השני, אז נוכל להשתמש פשוט בהגבר מהצורה

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & K_1 \end{bmatrix}$$

על מנת להזיז רק את הקוטב בבלוק התחתון. שימו לב כי זה אפשרי גם עבור מימוש משולש בהנחה והמודים קונטרולביליים בנפרד ובסדר הנכון. במקרה הנדון קל מאוד לחשב טרנספורמציה מתאימה, לדוגמא

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{LK_m}{Rf} & \frac{J}{f} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_t = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -R/L & 0 & 0 \\ 1/J & -f/J & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_t = TB = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ K_m/(Rf) \end{bmatrix}$$

המוד אותו אנחנו רוצים להזיז נמצא בבלוק התחתון לכן עבור משוב מהצורה לעיל נקבל מטריצת חוג סגור

$$A_t + B_t \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & 0 & (1/L)K_1 \\ 1/J & -f/J & 0 \\ 0 & 0 & (K_m/Rf)K_1 \end{bmatrix}$$

שהיא משולשת עליונה, והערכים העצמיים שלה נתונים על ידי

$$\lambda_{1,2,3} = \frac{-R}{L}, \frac{-f}{J}, \frac{K_m}{Rf} K_1 \Rightarrow K_1 = -3 \frac{Rf}{K_m}$$

כעת נשתמש בטרנספורמציה חזרה לקוארדינטות המקוריות ונאפס את השפעת הכא"מ, כלומר הגבר המשוב שלנו הוא

$$K = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \frac{Rf}{K_m} \end{bmatrix} T + \begin{bmatrix} 0 & K_b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3L & K_b - \frac{3JR}{K_m} & -\frac{3Rf}{K_m} \end{bmatrix}$$

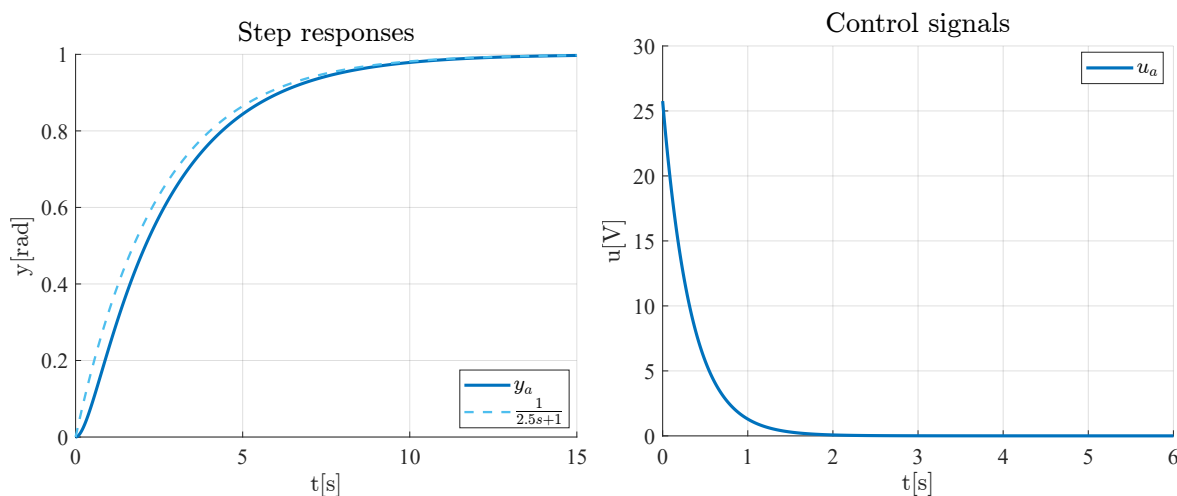
בדיוק כפי שקיבלנו בעזרת נוסחת אקרמן.

4. נבחן את התנהגות היציאה בתגובה לכניסת מדרגה באות הייחוס ואת התנהגות אות הבקרה בתגובה לאותה הכניסה.

(א) עבור הפולינום האופייני

$$\chi_{cl,a}(s) = (s + R/L)(s + f/J)(s + 3)$$

נקבל שהקוטב האיטי ביותר יהיה הקוטב $s = -\frac{f}{J} = -0.4$. כך שביחס לקטבים האחרים הוא יהיה הדומיננטי בתגובת המערכת. נשווה את תגובת החוג לתגובת המדרגה של $G_a(s) = \frac{1}{2.5s+1}$ באיור 2א.



(ב) אות הבקרה u_a עבור הפולינום האופייני $\chi_{cl,a}(s)$. (א) השוואת היציאה y_a עם היציאה של $G_a(s)$.

איור 2: תגובות עבור $\chi_{cl,a}(s)$.

ניתן לראות כי תגובת המערכת היא איטית ונשלטת על ידי הקוטב המכאני שאותו לא הזנו כך שהתגובה יחסית איטית ודורשת מאמץ בקרה יחסית נמוך. כמו כן, ניתן לראות כי התגובה דומה לתגובת המערכת $G_a(s)$ כאשר הקוטב אותו בחרנו $s = -3$ משפיע קצת על התגובה.

(ב) עבור הפולינום האופייני

$$\chi_{cl,b}(s) = (s + R/L)(s + 3)^2$$

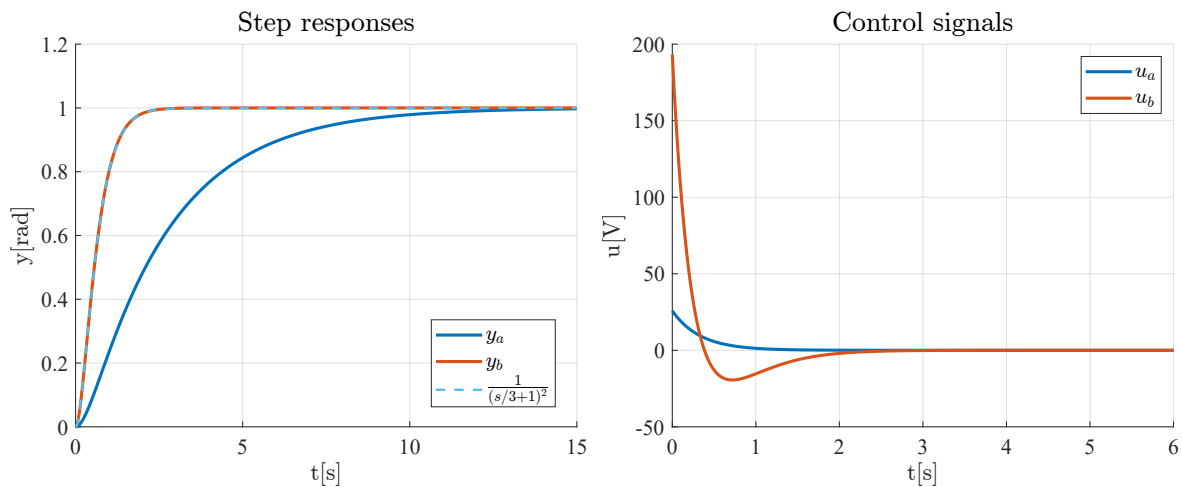
נצפה לקבל של מערכת מסדר משני מכיוון שהקוטב החשמלי מהיר מאוד

$$\lambda_e = -2.566 \cdot 10^4$$

ושני הקטבים האחרים דומיננטיים ביחס אליו. נשווה את תגובת החוג לתגובת המדרגה של

$$G_b(s) = \frac{1}{(s/3+1)^2} \quad \text{באיור 3א}$$

ניתן לראות כי זירוז הקוטב המכאני גרם למערכת להגיב יותר מהר ואכן הקטבים $s = -3$ הם הדומיננטיים ותגובת המערכת נראית דומה מאוד לתגובת המערכת $G_b(s)$ ("קו על קו"). עם זאת, הזירוז של הקוטב המכאני גרם לכך שנדרש אות בקרה גבוה מאוד כיוון שהבקרה נדרש לגרום לאינרציה J לזוז מהר בזמן קצר.

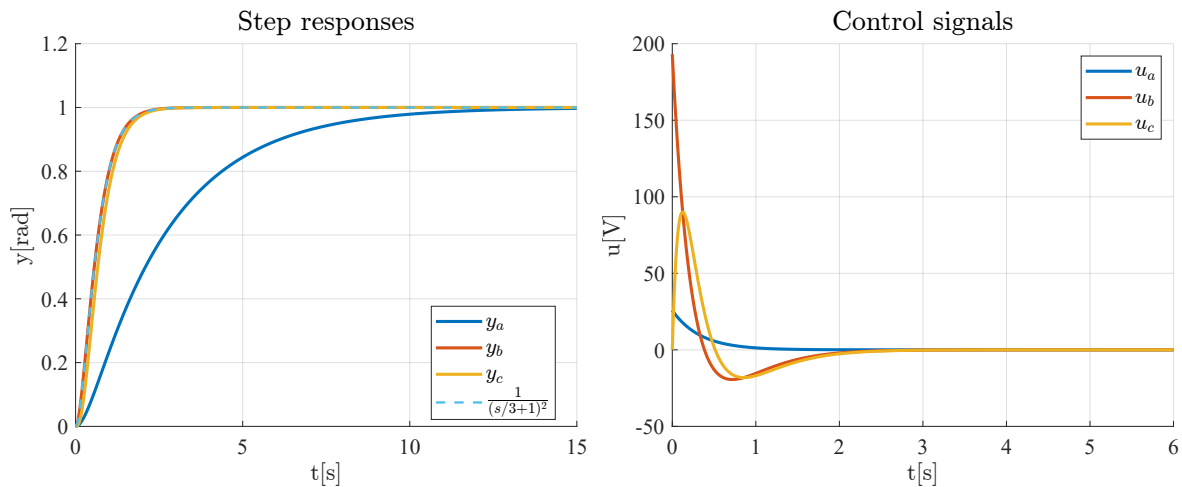


(א) השוואת היציאה y_b עם היציאה של $G_b(s)$. (ב) אות הבקרה u_b עבור הפולינום האופייני $\chi_{cl,b}(s)$.

איור 3: תגובות עבור $\chi_{cl,b}(s)$

(ג) עבור הפולינום האופייני

$$\chi_{cl,c}(s) = (s + 10)(s + 3)^2$$



(א) השוואת היציאה y_c עם היציאה של $G_b(s)$. (ב) אות הבקרה u_b עבור הפולינום האופייני $\chi_{cl,c}(s)$.

איור 4: תגובות עבור $\chi_{cl,c}(s)$

עבור מקרה זה, קיבלנו שאות הבקרה מתחיל מאפס, תונד ואז מתכנס. בניגוד לשני המקרים האחרים בהם קיבלנו אותות בקרה שאינם תונדים בכלל ומתכנסים לאפס. כדי להסביר זאת, התבוננו בפונקציית התמסורת מאות היחס לאות הבקרה

$$T_{ur}(s) = \frac{k_r D_P(s)}{\chi_{cl}(s)}$$

קטביה הם אכן קטבי החוג הסגור, אבל אפסיה הם קטבי התהליך המקורי. כאשר הזנו את כל קטבי החוג לנקודות שמאליות יותר מאשר הקטבים המקוריים, (האינטגרטור והקוטב המכאני) למעשה יצרנו שני אפסים דומיננטיים הגורמים לתנודות. יחד עם זאת, האפס שנגרם מהקוטב

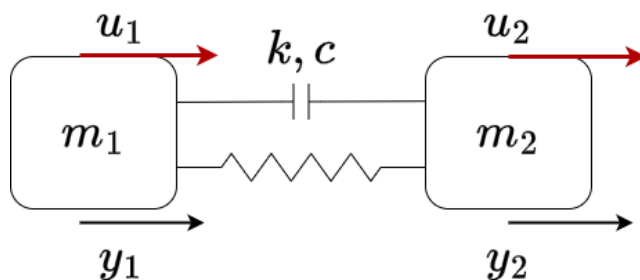
החשמלי רחוק מאוד מהקטבים החדשים, כלומר ישנו תחום תדרים רחב יחסית בו למערכת יש roll-off של 1. היות וההגבר בתדרים גבוהים פרופורציונאלי לערך ההתחלתי של אות הבקרה, במקרה זה נקבל כי אות הבקרה יתחיל סביב אפס, אבל יתנווד כתוצאה מהאפסים. בשני המקרים האחרים לא הזזנו את הקוטב החשמלי כלל, כלומר הוא יצטמצם מפונקציית התמסורת של אות הבקרה, ובחרנו את שאר קטבי החוג הסגור לא שמאלה מדי בייחס לקטבי החוג הפתוח. במקרה הראשון למעשה אנחנו כמעט ומצמצמים את הקוטב המכאני, והדבר היחיד שמונע זאת הוא השפעת הכא"מ החוזר. במקרה זה קירוב טוב לפונקציית התמסורת של אות הבקרה הוא

$$T_{ur,1}(s) \approx \frac{k_{r,1}s}{s+3}$$

הגוזר אכן דומיננטי, אבל שאר האפסים אפקטיבית צומצמו, לכן לא נקבל תנודות. יחד עם זאת, במקרה זה אין לנו תחום תדרים בו יש roll-off, לכן הגבר אות הבקרה בזמן אפס יהיה גבוה יחסית.

שאלה מספר 2

נתונה מערכת של שתי מסות לא זהות עם קפיץ ומרסן:



איור 5: מערכת שתי מסות קפיץ ומרסן

עם שני כוחות חיצוניים $u_1(t), u_2(t)$. משוואות התנועה הן:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

1. כתבו מימוש פיזיקאלי למערכת כאשר ווקטור המצב הוא המיקום של המסות.

2. נתון שהכוחות החיצוניים מקיימים

$$u_1 = \alpha_1 u \quad u_2 = \alpha_2 u$$

עבור איזה ערכים של α_1, α_2 מאבדת המערכת קונטרולביליות?

3. איזה מודים מאבדים קונטרולביליות עבור ערכים אלו?

פתרון שאלה מספר 2

1. נגדיר את ווקטור המצב להיות

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}$$

נציב אותו במשוואות התנועה

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & c \\ c & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k & k \\ k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

נקבל

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

אם נבחר שהיציאה תהיה y_1 נקבל שמשוואת היציאה תהיה

$$y_1(t) = C_1 x(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

ואם נבחר שהיציאה תהיה y_2 נקבל שמשוואת היציאה תהיה

$$y_2(t) = C_2 x(t) = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

2. תחילה נעדכן את משוואות המצב עבור הנתון

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\alpha_1}{m_1} \\ \frac{\alpha_2}{m_2} \end{bmatrix} u(t)$$

ונמצא את הדטרמיננטה של מטריצת הקונטרולביליות

$$\det M_c = -\frac{k^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2(\alpha_1 m_2 - \alpha_2 m_1)^2}{m_1^4 m_2^4}$$

מטריצת הקונטרולביליות תהיה מדרגה לא מלאה כאשר הדטרמיננטה שלה תתאפס, לכן המערכת תאבד קונטרולביליות עבור

$$\alpha_2 = -\alpha_1 \quad \alpha_2 = \frac{m_2}{m_1} \alpha_1$$

3. נסתכל על שני המקרים שקיבלנו ונבדוק את הקונטרולביליות בעזרת מבחן PBH. הערכים העצמיים של המערכת הם

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = -\frac{c m_1 + c m_2 \pm \sqrt{(m_1 + m_2)(c^2 m_1 + c^2 m_2 - 4 k m_1 m_2)}}{2 m_1 m_2}$$

עבור $\alpha_2 = -\alpha_1$ ועבור $\lambda_{1,2} = 0$ נקבל במבחן PBH

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} & \frac{\alpha_1}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} & -\frac{\alpha_1}{m_2} \end{bmatrix} = 3$$

קיבלנו ששתי השורות האחרונות תלויות לינארית, הדרגה יורדת ומודי התנועה המתאימים לערכים העצמיים $\lambda_{1,2}$ לא קונטרולבילים.

עבור $\alpha_2 = \frac{m_2}{m_1} \alpha_1$ ועבור $\lambda_{4,3}$ נקבל במבחן PBH

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} -\lambda_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_3 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & -\lambda_3 - \frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} & \frac{\alpha_1}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & \frac{c}{m_2} & -\lambda_3 - \frac{c}{m_2} & \frac{\alpha_1}{m_1} \end{bmatrix} = 3$$

קיבלנו שעבור קומבינציה לינארית של שורות $[\lambda I - A \quad B]$ מתקבל וקטור האפס.

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{\lambda_3 m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)} \\ \frac{\lambda_3 m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)} \end{bmatrix} \implies v_1 r_1 + v_2 r_2 + v_3 r_3 + v_4 r_4 = 0$$

כאשר r_i הן השורות של $[\lambda I - A \quad B]$. לכן הדרגה יורדת ומודי התנועה המתאימים לערכים העצמיים $\lambda_{3,4}$ לא קונטרולבילים.