



035188 - תורת הבקרה

תרגול 5

4 במאי 2025

שאלה מספר 1

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{Ts + 1} = P(s)e^{-s}$$

1. מצאו קרוב פאדה מסדר $[2, 3]$ עבור ההשהיה $\tau = 1$.

2. השוו את השגיאות בין פונקציית התמסורת המקורית (מהסעיף הקודם) וקרוב פאדה שחושב, לבין פונקציית התמסורת המקורית וקרוב פאדה לחלק של ההשהיה בלבד מוכפל ב $P(s)$.

3. כיצד משתנה השגיאה בין $G(s)$ לקרוב הפאדה (לחלק של ההשהיה בלבד) כתלות ב T ?

פתרון שאלה מספר 1

1. נרצה לחשב את הקירוב הרציונאלי הטוב ביותר $G(s) \approx R_{[2,3]}(s)$, כאשר בקירוב יש $2 + 3 = 5$ פרמטרים. לשם כך נפתח את שני הביטויים לטור טיילור עד סדר חמישי ונשווה ביניהם. פיתוח טיילור של פונקציית התמסורת:

$$G(s) = G(0) + G'(0)s + \frac{G''(0)}{2!}s^2 + \frac{G^{(3)}(0)}{3!}s^3 + \frac{G^{(4)}(0)}{4!}s^4 + \frac{G^{(5)}(0)}{5!}s^5 + O(s^6)$$

הנגזרות בראשית הן :

$$\begin{aligned} G(0) &= 1 \\ G'(0) &= -\left. \frac{(s+2)e^{-s}}{(s+1)^2} \right|_{s=0} = -2 \\ G''(0) &= \left. \frac{(s^2+4s+5)e^{-s}}{(s+1)^3} \right|_{s=0} = 5 \\ G^{(3)}(0) &= -\left. \frac{(s^3+6s^2+15s+16)e^{-s}}{(s+1)^4} \right|_{s=0} = -16 \\ G^{(4)}(0) &= \left. \frac{(s^4+8s^3+30s^2+64s+65)e^{-s}}{(s+1)^4} \right|_{s=0} = 65 \\ G^{(5)}(0) &= -\left. \frac{(s^5+10s^4+50s^3+160s^2+325s+326)e^{-s}}{(s+1)^4} \right|_{s=0} = -326 \end{aligned}$$

והטור המתקבל הוא :

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s+1} = 1 - 2s + \frac{5}{2}s^2 - \frac{8}{3}s^3 + \frac{65}{24}s^4 - \frac{163}{60}s^5 + O(s^6)$$

נפתח טור טיילור של הקירוב הרצוי :

$$R_{[2,3]}(s) = R_{[2,3]}(0) + \frac{R'_{[2,3]}(0)}{1!}s + \frac{R''_{[2,3]}(0)}{2!}s^2 + \frac{R'''_{[2,3]}(0)}{3!}s^3 + \frac{R^{(4)}_{[2,3]}(0)}{4!}s^4 + \frac{R^{(5)}_{[2,3]}(0)}{5!}s^5 + O(s^6)$$

סדר הקירוב רצוי מכיל שלושה קטבים ושני אפסים, לכן ניתן לכתוב אותו בצורה פרמטרית בתור

$$R_{[2,3]}(s) = a \frac{s^2 + bs + c}{s^3 + ds^2 + es + f}$$

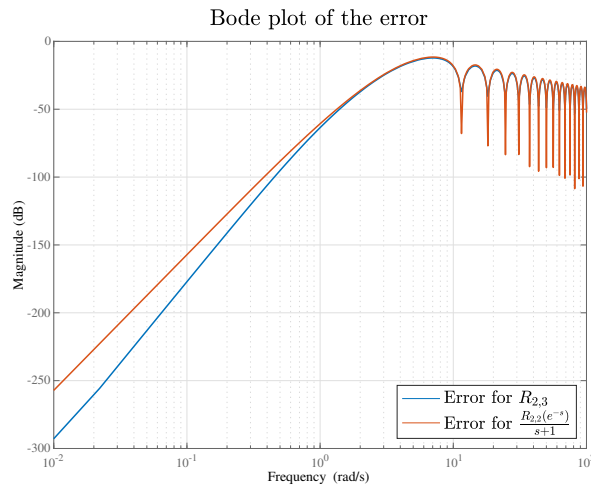
וכעת עלינו לחשב את הנגזרות בראשית. נעשה זאת:

$$\begin{aligned}
 R_{[2,3]}(0) &= \frac{ac}{f} \\
 R'_{[2,3]}(0) &= \frac{1}{f} \left(ba - ac \frac{e}{f} \right) \\
 R''_{[2,3]}(0) &= \frac{2}{f} \left(a - \frac{acd}{f} - \frac{a(bf - ce)e}{f^2} \right) \\
 R'''_{[2,3]}(0) &= \frac{6}{f} \left(-\frac{ac}{f} - \frac{a(bf - ce)d}{f^2} + \frac{a(bef - cdf - e^2 - f^2)e}{f^3} \right) \\
 R^{(4)}_{[2,3]}(0) &= \frac{24}{f} \left(-\frac{a(bf - ce)}{f^2} + \frac{a(bef + cdf - ce^2 - f^2)d}{f^3} + \frac{a(bdf^2 - be^2f - 2cdef + ce^3 + cf^2 + ef^2)e}{f^4} \right) \\
 R^{(5)}_{[2,3]}(0) &= \frac{120}{f} \left(\frac{a(bef + cdf - ce^2 - f^2)}{f^3} + \frac{ae}{f^5} (bdf^2 - be^2f - 2cdef + ce^3 + cf^2 + e + cd^2f^2 - \right. \\
 &\quad \left. - 3cde^2f + ce^4 - bf^3 + 2cef^2 - df^3 + e^2f^2) \right)
 \end{aligned}$$

כעת כל שנותר זה להציב את המקדמים בפיתוח טיילור של הקירוב, ולהשוות לפיתוח טיילור של פונקציית התמסורת. לאחר שנעשה זאת נקבל מערכת משוואות, נפתור אותה, ונקבל את ערכי הפרמטרים a, b, c, d, e, f . עבור המקרה דנן, מתקבל הקירוב הבא:

$$\frac{e^{-s}}{s+1} \approx \frac{3(29s^2 - 184s + 380)}{106s^3 + 693s^2 + 1728s + 1140}$$

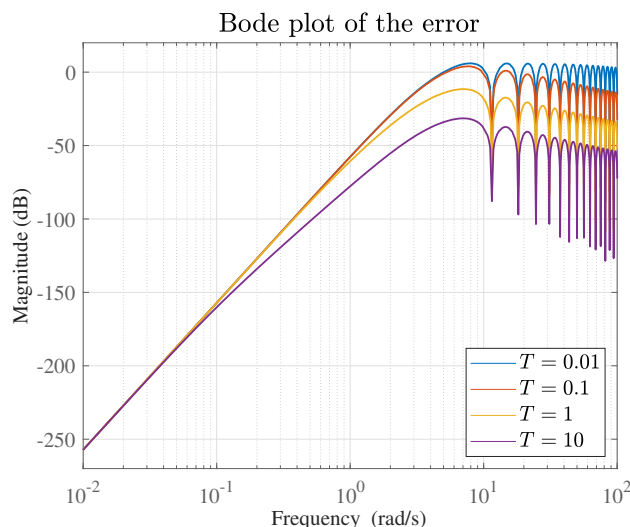
2. דיאגרמת בודה של השגיאה בין המערכת המקורית לשני הקירובים מוצגת באיור 1



איור 1: דיאגרמת בודה עבור שגיאת הקירוב

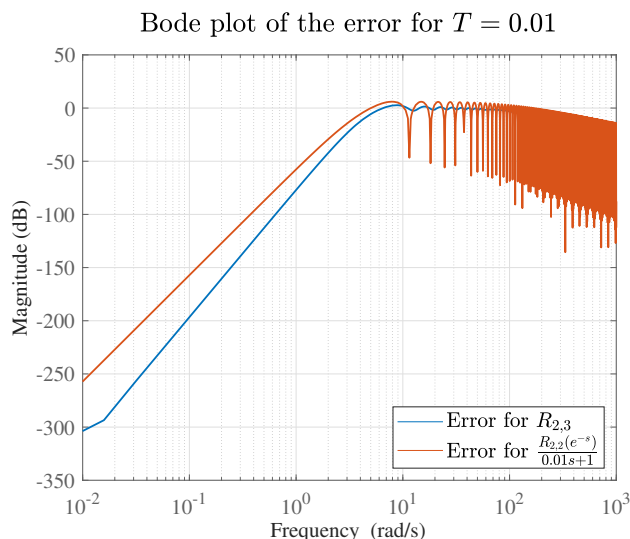
ניתן לראות כי שגיאת הקירוב למערכת הכוללת ולא להשהיה בלבד טובה יותר בתדרים נמוכים, גם בסקלות שקשה לראות מהגרף. לדוגמא בתדר 8 rad/s שגיאת הקירוב של $R_{[2,3]}(G(s))$ קטנה ב 15 אחוזים מאשר שגיאת הקירוב של $R_{[2,2]}(e^{-s})P(s)$, וזו התנהגות אופיינית גם למערכות סטריקטלי פרופר מסובכות יותר עם השהיה.

3. דיאגרמת בודה של השגיאה בין המערכת המקורית למערכת עם קירוב ההשהיה בלבד עבור קבועי זמן שונים נתונה באיור 2



איור 2: דיאגרמת בודה עבור שגיאת הקירוב וקבועי זמן שונים

ניתן לראות כי שגיאת הקירוב קטנה יותר ככל שקבוע הזמן של המערכת גדול יותר (כלומר היא איטית יותר). בשילוב עם תוצאות הסעיף הקודם ניתן להסיק כי ככל שהקוטב הרציונלי של המערכת מהיר יותר, עדיף לבצע קירוב פדה למערכת הכוללת ולא להשהיה בלבד. לדוגמא, באיור 3 ניתן לראות את השגיאה בין שני הקירובים עבור $T = 0.01$.



איור 3: דיאגרמת בודה עבור שגיאת הקירוב וקבוע זמן קצר

אינטואיטיבית ניתן לקשר את זה להתנהגות שראיתם בהרצאה, שם ראיתם שתגובת מדרגה של קירוב פדה של השהיה טהורה מתנהגת שונה באופן מהותי מאשר תגובת המדרגה של ההשהיה עצמה. התנהגות זו לא חזרה על עצמה כאשר היה למערכת קוטב נוסף. כאשר קבוע הזמן של הקוטב קטן יותר (הקוטב מהיר יותר) ביחס להשהיה אזי המערכת כולה מתנהגת דומה יותר ויותר להשהיה טהורה, ולכן כדאי לקרב את ההשהיה יחד עם קטבים מהירים של התהליך.

שאלה מספר 2

נתון מודל של מנוע זרם ישר בעל פונקציית תמסורת מקורבת

$$\tilde{P}(s) \approx \frac{10}{s(0.5s + 1)}$$

עם השהיה משוערת של $\tau = 5[\text{ms}]$.

1. תכננו בקר למערכת (בהזנחת ההשהיה) המקיים

(א) תדר מעבר פאזה $\omega_c \approx 70[\text{rad/s}]$

(ב) עודף פאזה $\mu_{\text{ph}} \geq 50^\circ$ על מנת לפצות על הזנחת ההשהיה.

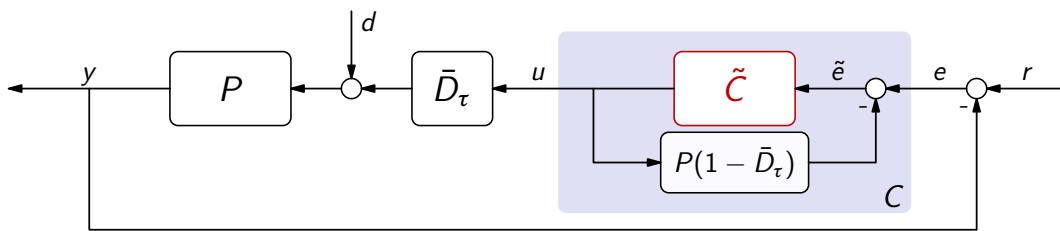
(ג) שגיאת מצב מתמיד אפס להפרעת מדרגה.

2. בחנו את ביצועי המערכת עם הבקר בנוכחות ההשהיה.

3. האם ניתן להשתמש בבקר שתוכנן בתור בקר ראשי $\tilde{C}$ לחזאי סמית' (מז"מ)?

4. התברר כי ההשהיה בפועל גדולה משמעותית מההשהיה המשוערת, בחנו את המערכת עבור ההשהיות

$$\tau = \{0.02, 0.04, 0.06\}[\text{s}]$$



איור 4: חוג בקרה עם חזאי סמית' (מז"מ).

פתרון שאלה מספר 2

1. נתכנן את הבקר בצורה סטנדרטית עם רשת קידום-פיגור. בהתאם לדרישה (א) נבחר את ההגבר להיות

$$k_p = \frac{1}{|\tilde{P}(j\omega)|} = 245.1$$

נוסיף בקר פיגור על מנת לענות על דרישה (ג)

$$C_{\text{lag}}(s) = \frac{10s + 70}{10s}$$

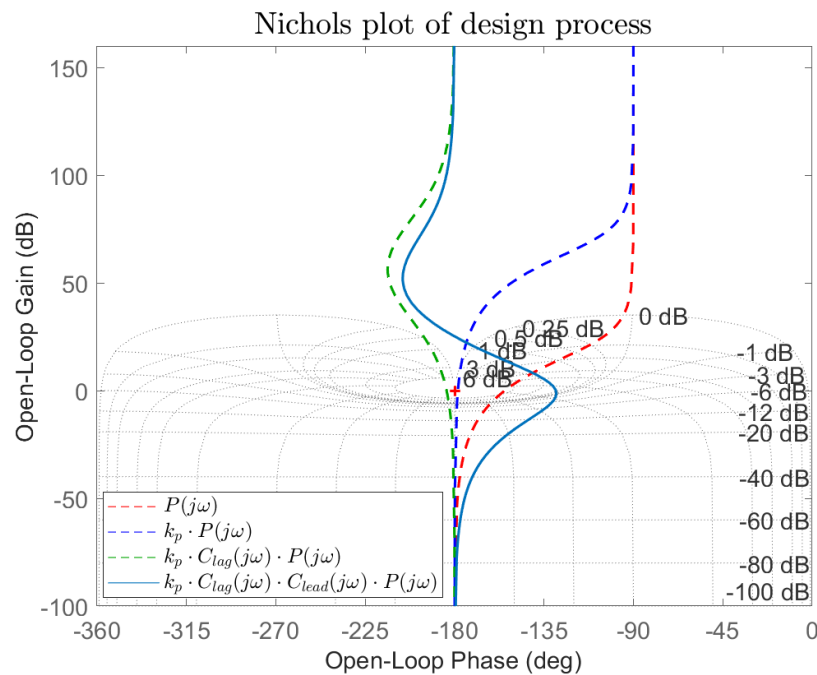
ובקר קידום על מנת לעמוד בדרישה (ב)

$$\phi_m = 55^\circ \Rightarrow \alpha = 10.06 \Rightarrow C_{\text{lead}}(s) = \frac{3.172s + 70}{s + 222}$$

והבקר הכולל יהיה

$$\tilde{C}(s) = k_p \cdot C_{\text{lead}}(s) \cdot C_{\text{lag}}(s)$$

תהליך התכנון מוצג באיור 5



איור 5: דיאגרמת ניקולס עבור תהליך התכנון

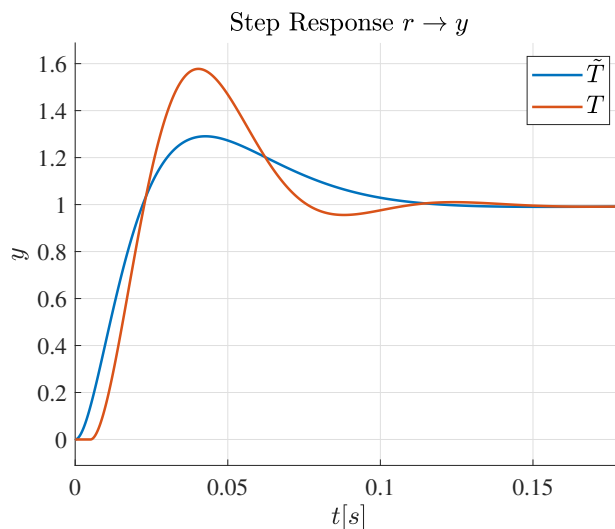
ניתן לראות כי התקבלו עודפי יציבות כפי שנדרש

$$\mu_{\text{ph}} = 50.9^\circ|_{\omega_c=70.3} \quad \mu_g = -25.2[\text{dB}]|_{\omega_{\text{ph}}=10.6}$$

2. כעת נבחן את השפעת הוספת ההשהיה על ביצועי החוג הסגור, נסמן את פונקציות הרגישות המשלימה

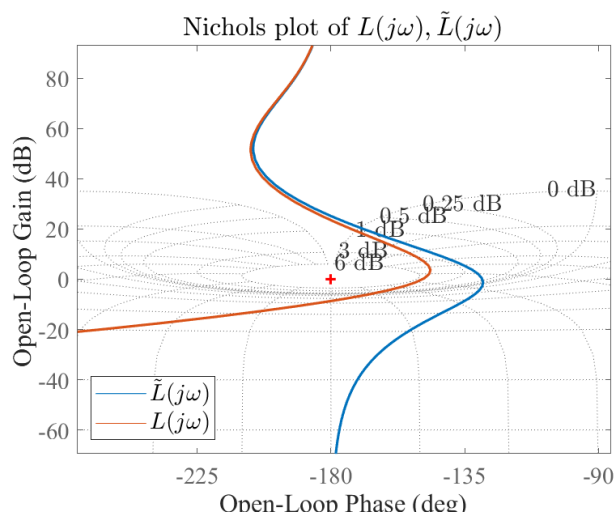
$$\tilde{T}(s) = \frac{\tilde{C}(s)\tilde{P}(s)}{1 + \tilde{C}(s)\tilde{P}(s)} \quad T(s) = \frac{\tilde{C}(s)\tilde{P}(s)e^{-\tau s}}{1 + \tilde{C}(s)\tilde{P}(s)e^{-\tau s}}$$

נשווה את תגובת התדירות ואת התגובה למדרגה בנוכחות ההשהיה באיור 6



איור 6: תגובת מדרגה של פונקציית הרגישות המשלימה עם ובלי השהיה בתהליך

ניתן לראות כי נוכחות ההשהיה שינתה את מאפייני תגובת המדרגה, בעיקר מבחינת תגובת היתר של המערכת שעלתה מ- $OS \approx 29\% \rightarrow 57\%$. ניתן להסביר זאת אינטואיטיבית בכך שההשהיה בכניסה לתהליך גרמה לבקר לצבור שגיאה לאורך כל זמן ההשהיה (אינטגרטור בבקר) שנפרק רק כאשר המערכת התחילה להגיב ואות הבקרה שנכנס היה גבוה ביחס לאות הבקרה בחוג ללא ההשהיה. נבחן את השפעת ההשהיה על החוג הפתוח בעזרת דיאגרמת ניקולס באיור 7



איור 7: דיאגרמת ניקולס של החוג הפתוח עם ובלי השהיה

ניתן לראות כי הפגיעה בפאזה הנובעת מההשהיה מקטינה את עודף הפאזה מ- $\mu_{ph} \approx 50.9^\circ \rightarrow 30.8^\circ$ וגורמת לחוג הפתוח לעבור קרוב מאוד למעגל M של $6[dB]$ באזור החציה כך שניתן לצפות שפונקציית

הרגישות המשלימה תהיה עם הגבר גבוה באזור זה ונקבל תגובה תנודתית יותר בהשפעת ההשהיה. כמו כן, הוספת ההשהיה גרמה להיווצרות של עודף הגבר חיובי כך שתדר המעבר שנוכל להגיע אליו הוא מוגבל. לכן, מומלץ לא להזניח את ההשהיה בתהליך התכן ולקחת בחשבון את ההשפעה שלו על המערכת כבר בשלב התכן, גם אם ההשהיה היא קטנה.

3. על מנת להשתמש בבקר שתוכנן עם החזאי של סמית', על החוג לקיים שני תנאים

□ על הבקר הראשי לייצב את החוג הנומינאלי ללא השהיה.

□ התהליך חייב להיות יציב או שכל הקטבים הלא יציבים יצומצמו ע"י $1 - e^{-s\tau}$.

ראינו שהתנאי הראשון מתקיים בסעיף הראשון. עם זאת, התהליך מכיל אינטגרטור ולכן אינו יציב בעצמו, נרצה לבדוק האם האינטגרטור מצומצם ע"י האפסים של החזאי. ראינו בהרצאה שהאפסים של החזאי מתקבלים עבור

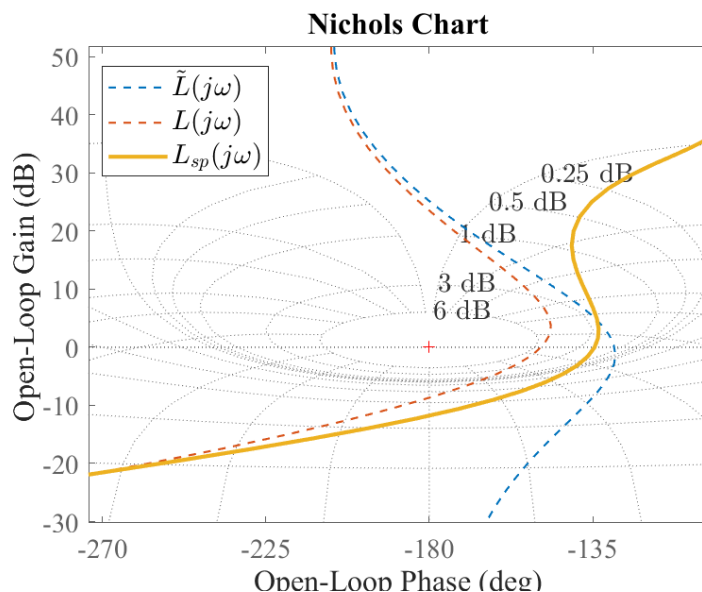
$$1 - e^{-s\tau} = 0 \implies s = j\frac{2\pi}{\tau}k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

לכן, עבור $k = 0$ נקבל כי הקוטב בראשית מצטמצם. כלומר, למרות שהחזאי מיועד לתהליכים יציבים, ניתן להשתמש בו גם לתהליכים עם אינטגרטור בודד. לכן, שני התנאים מתקיימים וניתן להשתמש בבקר שתוכנן $\tilde{C}(s)$ בתור בקר ראשי במסגרת החזאי של סמית'.

בהתאם לדיאגרמה המוצגת באיור 4, נקבל שהבקר הכולל יחד עם החזאי יהיה

$$C(s) = \frac{\tilde{C}(s)}{1 + \tilde{C}(s)\tilde{P}(s)(1 - e^{-s\tau})}$$

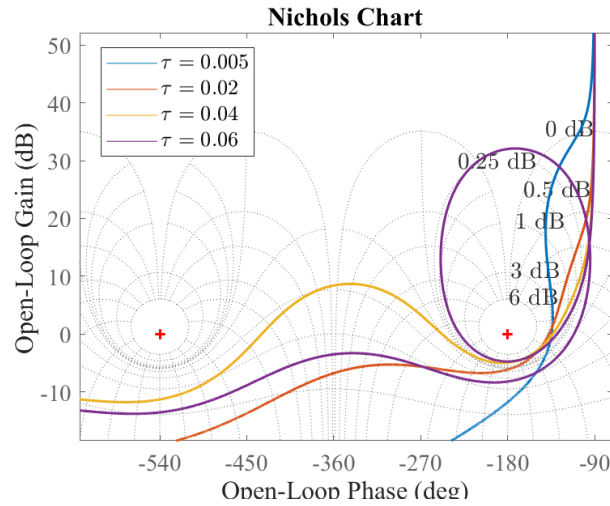
איור 8 מציג את דיאגרמת ניקולס של החוג הפתוח יחד עם החזאי



איור 8: דיאגרמת ניקולס של החוג הפתוח עם חזאי סמית'

ניתן לראות שהשימוש בחזאי הביא לשיפור עודף הפאזה ביחס לחוג הכולל את ההשהיה. כמו כן, החוג הפתוח שוב לא חוצה את המעגל המתאים ל $3[dB]$ כמו בתכן המקורי.

4. נסתכל על דיאגרמת ניקולס של החוגים הפתוחים המתקבלים בנוכחות ההשהיות הנתונות



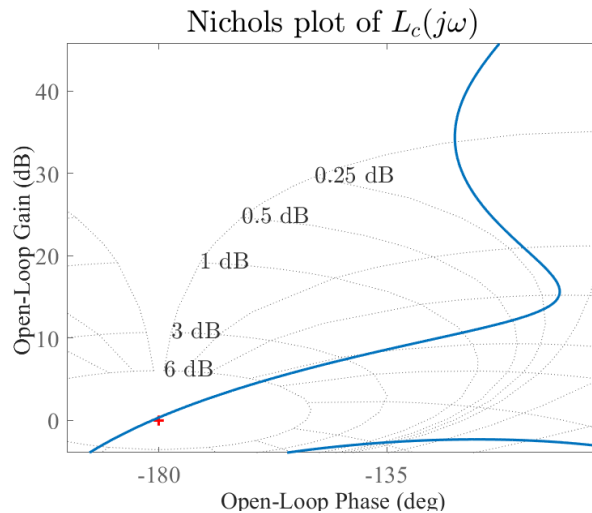
איור 9: דיאגרמת ניקולס של החוג הפתוח עם חזאי סמית' עבור השהיות שונות

ניתן לראות שעם הגדלת ההשהיה, נוספים תדרי חציה נוספים לחוג, אך עדיין החוג אינו יוצא מיציבות. ניתן לראות שעבור השהיות $\tau \geq 0.06[s]$ החוג הפתוח מתחיל להקיף את הנקודה הקריטית (חציה חיובית). מכיוון שלתהליך אין קטבים לא יציבים, אז הבקר אינו יציב ולכן נרצה לוודא כמה קטבים לא יציבים יש לבקר עם חזאי סמית'.

כפי שמתואר באיור 4, הבקר בנוי מחיבור משווי כך שניתן להסתכל על החוג הפתוח

$$L_c(s) = \tilde{C}(s) \cdot \tilde{P}(s)(1 - e^{-s\tau}) \quad \tau = 0.06$$

ולמצוא את מספר הקטבים הלא יציבים של הבקר לפי דיאגרמת ניקולס.



איור 10: דיאגרמת ניקולס של $L_c(j\omega)$

קיבלנו חציה שלילית אחת, כך שלבקר הכולל יש שני קטבים לא יציבים והחוג הכולל המלא יציב גם עבור $\tau = 0.06[s]$.