



035188 - תורת הבקרה

תרגול 3

22 באפריל 2025

שאלה מספר 1

נתון התהליך $P(s) = 1/s^2$ כמו בתרגול הראשון.

1. תכננו בקר המקיים את הדרישות הבאות

(א) שגיאת מצב מתמיד אפס להפרעת מדרגה.

(ב) עודף פאזה $\mu_\phi \geq 35^\circ$.

(ג) הבקר סטריקטלי פרופר.

2. כפי שראיתם בהרצאה, אות ייחוס מדרגה אינו פיזיקלי ברוב המקרים. תכננו S-curve שיהווה אות ייחוס המגיע לערך סופי $y_f > 0$, ומקיים את החסמים $|\dot{r}(t)| \leq v_{\max}$ ו- $|\ddot{r}(t)| \leq a_{\max}$. הניחו כי

$$y_f > \frac{v_{\max}^2}{a_{\max}}$$

3. סמלצו את תגובות החוג הסגור לאות הייחוס שתיכננתם עבור

$$r_f = 5, \quad v_{\max} = 2, \quad a_{\max} = 1$$

והשוו לתגובות המתקבלות כתגובה למדרגה טהורה בגובה r_f .

4. תכננו חוג בארכיטקטורת שתי דרגות חופש המבטיח עקיבה מושלמת אחר אות הייחוס שתיכננתם.

פתרון שאלה מספר 1

1. נשים לב כי מדובר באותו תהליך עם אותן הדרישות מהתרגול הראשון, וראינו כי ניתן למלא אותן בעזרת אינטגרטור ובקר קידום מסדר שני. עבור בחירה של $\zeta = 1/\sqrt{2}$ מתקבל הבקר הבא

$$C(s) = \frac{9.2725(s^2 + 0.4644s + 0.1078)}{s(s^2 + 4.306s + 9.272)}$$

אשר מקיים את כל הדרישות.

2. בהרצאה למדתם אסטרטגיה "טבעית" לתכנון אותות יחוס תחת אילוצי מהירות ותאוצה בעזרת אינטגרציה של פולינומים. מתחילים בתאוצה המקסימלית, כלומר תנועה פרבולית, עד אשר המהירות מגיעה לערך המקסימלי המותר. כאשר מגיעים לערך המקסימלי המותר, עוברים למהירות קבועה ומקסימלית ללא תאוצה, כלומר לתנועה לינארית. מטעמי סימטריה, כאשר אנחנו במרחק שקול מהסוף למרחק בו הגענו למהירות המקסימלית, מתחילים להאט בתאוצה מקסימלית. אסטרטגיה זו מבטיחה שנגיע במהירות אפס לנקודה הרצויה. בצורה פרמטרית, אות הייחוס יהיה

$$r(t) = \begin{cases} \frac{a_{\max}}{2} t^2, & 0 < t < t_1 \\ \frac{v_{\max}^2}{2a_{\max}} + v_{\max}(t - t_1), & t_1 < t < t_2 \\ y_f - \frac{a_{\max}}{2}(t - t_f)^2, & t_2 < t < t_f \end{cases}$$

כאשר זמן החילוף הראשון $t_1 = \frac{v_{\max}}{a_{\max}}$, השני $t_2 = \frac{y_f}{v_{\max}}$, ומטעמי סימטריה $t_f = t_1 + t_2$. חשוב לשים לב כי אסטרטגיה זו בדרך כלל לא מבטיחה הגעה לנקודת היעד בזמן הקצר ביותר, ואיכות העקיבה תלויה גם בבקר שתוכנן. היתרון המרכזי של אסטרטגיה זו הוא שניתן לתכנן את אות הייחוס ללא תלות בדינמיקת התהליך עצמו או בבקר. החיסרון הוא שאות הייחוס הזה לא מבטיח שהחוג קיים את האילוצים הנתונים.

3. בהרצאה ראינו שדרך נוחה לממש אותות כאלו היא לייצר מערכת עזר, $T_r(s)$, שתגובת המדרגה שלה היא בדיוק האות הרצוי. ניתן לעשות זאת במספר דרכים. הדרך ה"ישירה", היא ביצוע התמרת לפס ישירות עבור אות הייחוס שבנינו. בצורה זו נקבל תמסורת מורכבת מאוד שעשויה להיות קשה למימוש ולגרוור בעיות נומריות (פיתוח מקוצר בדרך זו נמצא בנספח). דרך פשוטה יותר היא להשתמש בתכונות מוכרות של התמרת לפס, בשילוב עם הדרך בה בנינו את אות הייחוס. את אות הייחוס הגדרנו באמצעות חסמים על התאוצה והמהירות, כלומר את התאוצה המייצרת את $r(t)$ ניתן להציג בצורה פשוטה כפונקציה קבועה למקוטעין.

$$\ddot{r}(t) = \begin{cases} a_{\max}, & 0 < t < t_1 \\ 0, & t_1 < t < t_2 \\ -a_{\max}, & t_2 < t < t_f \end{cases}$$

כזכור ממערכות לינאריות (ומקורסי משוואות דפירנציאליות רגילות), אות קבוע למקוטעין שכזה ניתן להציג פשוט בתור סכום של מדרגות מוזזות.

$$\ddot{r}(t) = a_{\max} (\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t - t_1) - \mathbb{1}(t - t_2) + \mathbb{1}(t - t_f))$$

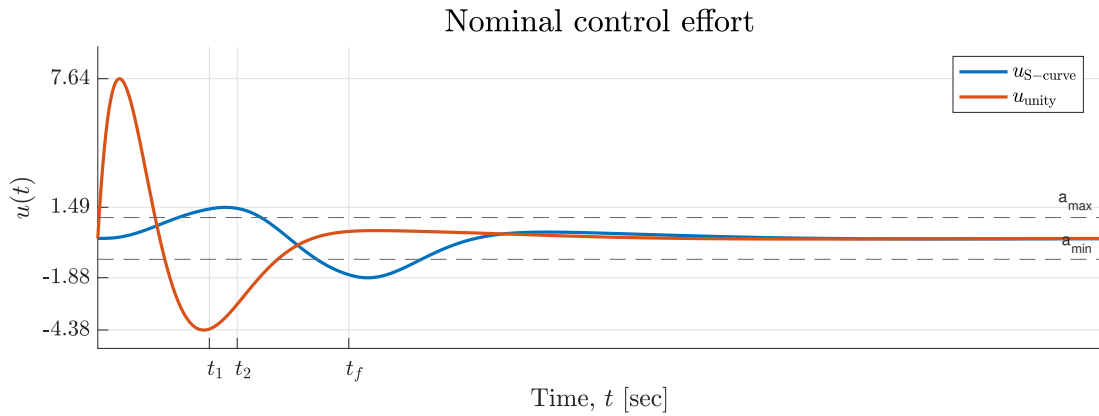
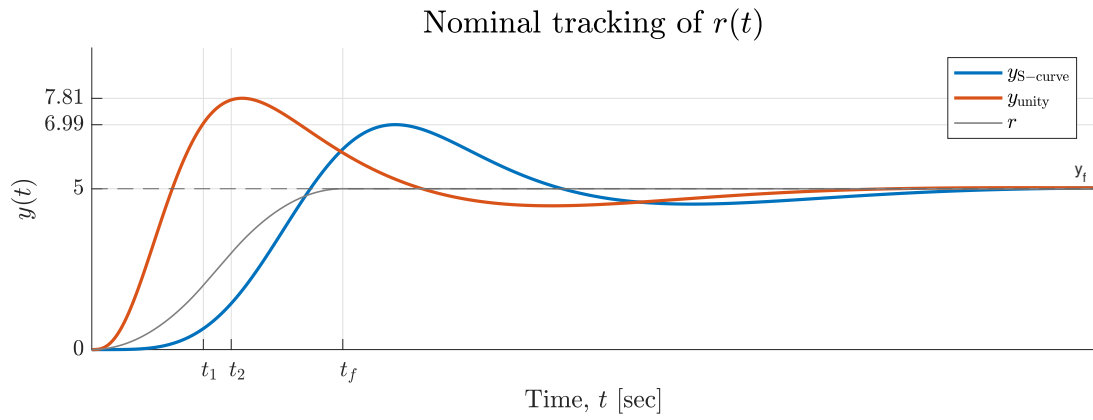
ואת אות הייחוס עצמו נקבל לאחר אינטגרציה כפולה של אות זה. היות ואות הייחוס שלנו מתחיל ממהירות, תאוצה ומיקום אפס, אין תנאי התחלה מיוחדים לכן התמרת לפס של אות הייחוס נתונה בפשטות על ידי

$$R(s) = (1 - e^{-t_1 s} - e^{-t_2 s} + e^{-t_f s}) \frac{a_{\max}}{s^2}$$

כעת על מנת שאות זה יהיה תגובת המדרגה של מערכת כלשהי, פשוט נגדיר

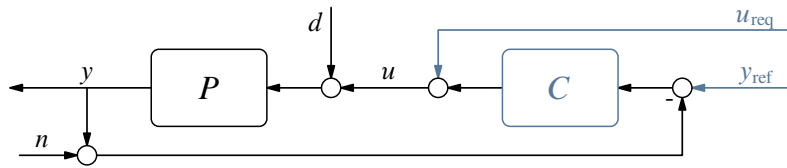
$$T_r(s) = R(s) \frac{s}{y_f}$$

ואכן ניתן לוודא כי אם נכניס מדרגה בגובה y_f ל $T_r(s)$ נקבל בדיוק את אות הייחוס הדרוש. תגובת המערכת ומאמץ הבקרה ביחס לאות הייחוס שתוכנן לעומת מדרגה בגובה הרצוי מוצגים באיור 1, כאשר החסמים והערך הסופי הרצויים מסומנים בקווים מקווקוים.



איור 1: תגובת החוג הסגור לאות הייחוס לעומת התגובה למדרגה עבור דרגת חופש אחת

4. נבחן את דיאגרמת הבלוקים הבאה, המייצגת ארכיטקטורת בקרה של שתי דרגות חופש



איור 2: ארכיטקטורת בקרה בעלת שתי דרגות חופש

מטרת הארכיטקטורה היא לשלב את היתרונות של שני העולמות - הפשטות והעקיבה הטובה של בקרה בחוג פתוח והרובסטיות ודחיית ההפרעות של בקרה בחוג סגור. על מנת לעשות זאת, ראשית עלינו לייצר אות יציאה רצוי, y_{ref} , לדוגמא האות שתכננו בסעיף הקודם. בחוג סגור עם משוב יחידה סטנדרטי אם מתקיימת עקיבה מושלמת $y = y_{ref}$ אות הבקרה מתאפס, במקרה זה החוג למעשה נפתח שכן הבקר שלנו לא מייצר שום אות. מכאן, על מנת לקיים עקיבה מושלמת לאורך זמן ולא רק במצב מתמיד, עלינו להזריק לחוג אות בקרה נוסף, u_{req} , לאחר הבקר שתכננו שיבטיח כי

$$y(s) = P(s)u_{req}(s) = y_{ref}(s)$$

תצורה זו תבטיח כי במקרה האידאלי נקבל עקיבה כמו בחוג פתוח, אך במידה ויכנסו הפרעות או רעשים, הבקר יחזור לפעול. ניתן לראות זאת מלינאריות המערכות, שכן היציאה ואות הבקרה נתונים על ידי

$$y = Pu_{req} + PC(y_{ref} - y) + T_d d - T_n n$$

$$u = u_{req} + C(y_{ref} - y) - T_d d - T_c n$$

שאכן מבטיחים כי במידה ואין הפרעות או רעשים, כאשר אין שגיאת עקיבה המערכת תתנהג כבחוג פתוח. כזכור תכננו כבר את אות הייחוס בסעיף הקודם, כל מה שנותר לנו הוא למצוא את u_{req} המתאים, לשם כך נשווה ישירות

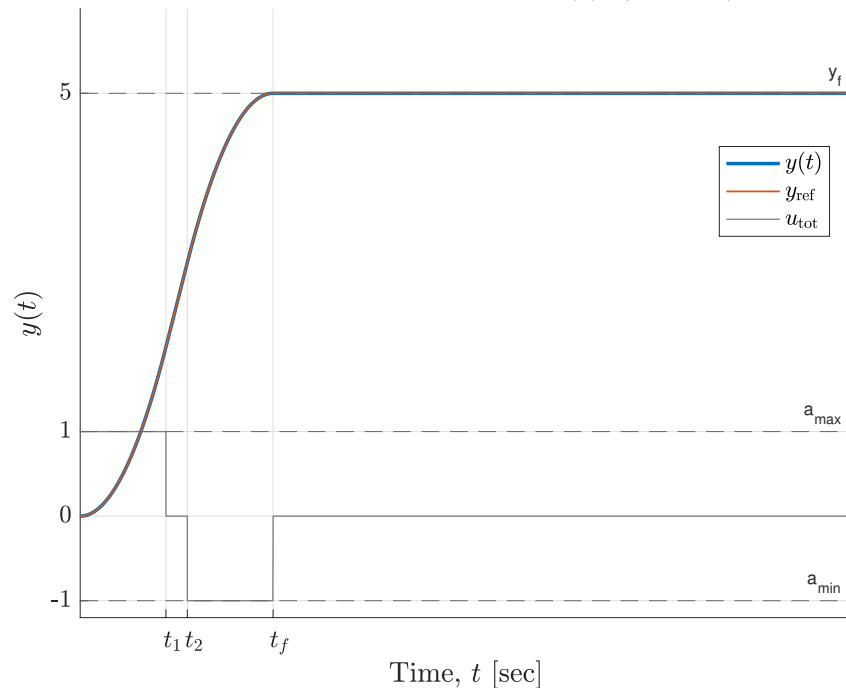
$$y_{\text{ref}}(s) = P(s)u_{\text{req}}(s) \implies (1 - e^{-t_1 s} - e^{-t_2 s} + e^{-t_f s}) \frac{a_{\text{max}}}{s^2} = \frac{1}{s^2} u_{\text{req}}(s)$$

ומכאן נקבל ישירות ביטוי לאות הבקר ההדרוש:

$$u_{\text{req}}(s) = (1 - e^{-t_1 s} - e^{-t_2 s} + e^{-t_f s}) a_{\text{max}}$$

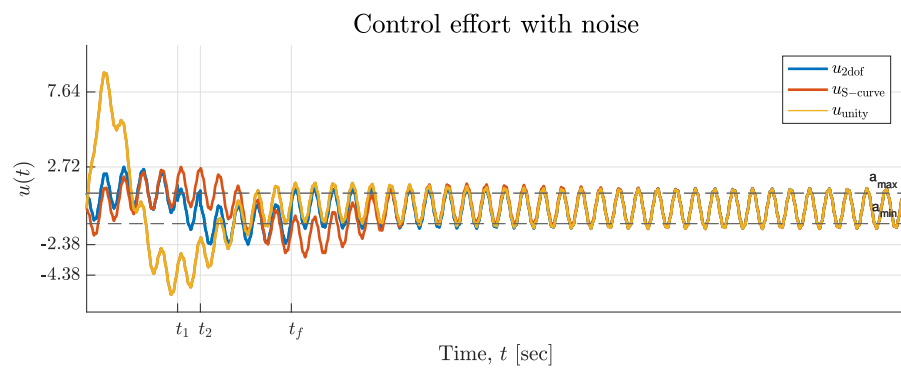
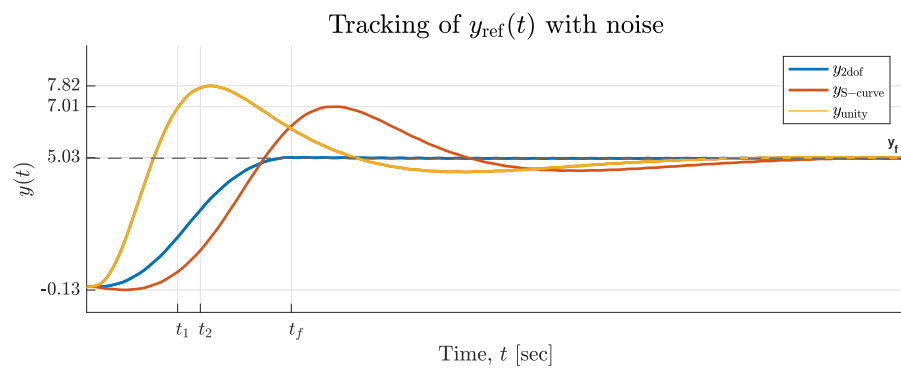
שימו לב שאת אות הבקרה בחוג הפתוח קיבלנו למעשה בעזרת היפוך תהליך ייחד עם מודל הייחוס שהגדרנו בסעיף הקודם, זו שיטה נפוצה לבקרה בחוג פתוח כאשר הבקר הוא מהצורה $C_{\text{ol}}(s) = T_r(s)/P(s)$. שימו לב שזו פונקציית תמסורת סיבתית ויציבה ללא קטבים כלל, לכן היא מהווה בקר הניתן למימוש בחוג פתוח. מעצם הבניה של ארכיטקטורת שתי דרגות חופש, בהנחת מצב נומינלי נקבל עקיבה מושלמת אחרי אות הייחוס תוך שמירה על החסמים שהוגדרו ללא תלות כלל בבקר שתכננו. היות ואנחנו מייצרים את אות הייחוס, אנחנו יודעים (ולמעשה קובעים) את הנגזרות שלו לכל סדר שנרצה, לכן אם נקבל מערכת מסדר גבוה יותר נוכל לייצר אות ייחוס מסדר גבוה יותר בהתאם ולהגיע לאותם ביצועים. תגובת המערכת עבור חסמים כלשהם מוצגת באיור 3, כאשר אכן מתקבל עקיבה מושלמת כצפוי.

Nominal tracking of $y_{\text{ref}}(t)$ (2DOF)



איור 3: תגובת המערכת הנומינלית לאות הייחוס

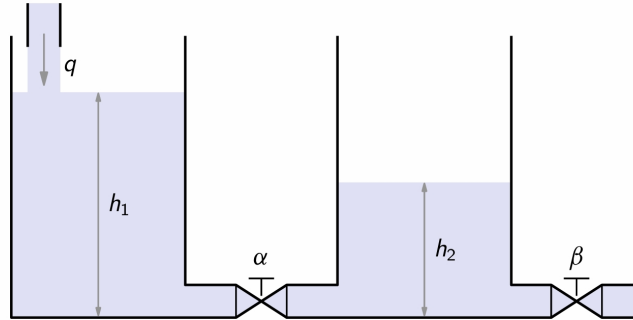
שימו לב שהעקיבה מושלמת והחסמים לא מופרים תחת ההנחה שהמערכת נומינלית - כלומר ללא רעשים, הפרעות או שגיאות מידול. עבור המקרה הלא נומינלי הבקר בחוג יתחיל לפעול, מה שכמובן עשוי לדרוש מהתהליך מהירות (לדוגמא) שחורגת מהחסם. באיור 4 מופיעות תגובות היציאה ואות הבקרה עבור שלושת המקרים עליהם דיברנו בנוכחות הרעש ההרמוני מהתרגול הקודם.



איור 4: תגובת שלושת החוגים בנוכחות הרעש מהתרגול הקודם

שאלה מספר 2

נתונה מערכת שני מיכלים כאשר גובה הנוזל במיכלים הוא h_1, h_2 , כניסת הבקרה היא ספיקת הכניסה למיכל הראשון q , ההתנגדות למעבר בין המיכל הראשון לשני α וההתנגדות ליציאה מהמיכל השני β .



איור 5: מערכת שני מיכלים

תזכורת

□ המשוואות הדינמיות של המערכת בהנחה ש $h_1 > h_2$ הן

$$\sigma \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha\sqrt{h_1 - h_2} + q \\ \alpha\sqrt{h_1 - h_2} - \beta\sqrt{h_2} \end{bmatrix}$$

כאשר σ הוא שטח החתך של המיכלים.

□ נקודת שיווי המשקל עבור גובה $h_{1,eq}$ היא

$$h_{2,eq} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} h_{1,eq} \quad q_{eq} = \sqrt{\frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} h_{1,eq}}$$

□ עבור משתני הסטיה $x_i = h_i - h_{i,eq}$, $u = q - q_{eq}$ משוואות התנועה הלינאריות יהיו

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{\alpha\sqrt{1 + (\alpha/\beta)^2}}{2\sigma\sqrt{h_{1,eq}}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 - (\beta/\alpha)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sigma} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

□ הקטבים הם זוג קטבים ממשיים

$$s_{1,2} = -\frac{\alpha\sqrt{1 + (\alpha/\beta)^2}}{2\sigma\sqrt{h_{1,eq}}} \frac{2\alpha^2 + \beta^2 \pm \sqrt{4\alpha^4 + \beta^4}}{2\alpha^2}$$

עבור $\sigma = 3/\sqrt{2}$, $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{3}$ ונקודת ש"מ

$$h_{1,eq} = \frac{5}{3} \implies h_{2,eq} = \frac{2}{3} \quad q_{eq} = \sqrt{2}$$

נקבל

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

נגדיר את האות המבוקר y להיות x_1

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

וקשר הכניסה יציאה יהיה

$$P_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{6s + 5}{(s + 1)(s + 1/6)}$$

תכננו אות בקרה שמביא את המערכת מתנאי התחלה

$$\begin{bmatrix} h_1(0) \\ h_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

לנקודת שיווי המשקל חדשה עבור המיכל הראשון **בזמן מינימלי**

$$h'_{1,\text{eq}} = 2 \implies y(t_f) = x_1(t_f) = y_f = 1/3$$

כאשר אות הבקרה חסום לפי

$$u_{\min} = -\sqrt{2} \leq |u(t)| \leq u_{\max} = 2$$

פתרון שאלה 2

זוהי בעיית מינימום זמן ולכן :

$$u^*(t) \in \{u_{\min}, u_{\max}\} \quad \forall t \in [0, t_f] \quad \square$$

$\square$ לתהליך יש שני קטבים ממשיים ולכן יהיה מיתוג אחד כאשר $t \in (0, t_f)$

לכן, אות הבקרה יהיה מהצורה

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max} & 0 < t < t_{sw} \\ u_{\min} & t_{sw} < t < t_f \\ u_{ss} & t_f < t \end{cases}$$

$$u^*(t) = (u_{\max} \mathbb{1}(t) - (u_{\max} - u_{\min}) \cdot \mathbb{1}(t - t_{sw}) + (u_{ss} - u_{\min}) \cdot \mathbb{1}(t - t_f))$$

התמרת לפלס של אות הבקרה האופטימלי תהיה

$$U(s) = \frac{u_{\max} - (u_{\max} - u_{\min})e^{-st_{sw}} + (u_{ss} - u_{\min})e^{-st_f}}{s}$$

והתגובה תהיה

$$Y(s) = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{(s + 5/6)(u_{\max} - (u_{\max} - u_{\min})e^{-st_{sw}} + (u_{ss} - u_{\min})e^{-st_f})}{s(s+1)(s+1/6)}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{s} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \frac{(s + 5/6)(u_{\max} - (u_{\max} - u_{\min})e^{-st_{sw}} + (u_{ss} - u_{\min})e^{-st_f})}{(s+1)(s+1/6)} \right)}_{G_Y(s)}$$

נרצה למצוא את זמן המיתוג t_{sw} ואת הזמן הסופי t_f כך ש $G_Y(s)$ היא FIR ו- $y_f = G_Y(0)$.

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_Y(s) = y_f \quad (1)$$

$$\text{Res}(G_Y(s), -1) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Res}\left(G_Y(s), -\frac{1}{6}\right) = 0 \quad (3)$$

נסתכל על שלושת התנאים שקיבלנו, מתנאי (1) נקבל

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{(s + 5/6)(u_{\max} - (u_{\max} - u_{\min})e^{-st_{sw}} + (u_{ss} - u_{\min})e^{-st_f})}{(s+1)(s+1/6)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_Y(s) = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{(5/6)(u_{\max} - u_{\max} + u_{\min} + u_{ss} - u_{\min})}{1/6} = \underbrace{\frac{5\sqrt{2}}{3}}_{P_1(0)} u_{ss} = y_f$$

$$u_{ss} = \frac{y_f}{P_1(0)} = \frac{3y_f}{5\sqrt{2}}$$

מתנאי (2) נקבל

$$\text{Res}(G_Y(s), -1) = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)G_Y(s)$$

$$\text{Res}(G_Y(s), -1) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{(s + 5/6)(u_{\max} - (u_{\max} - u_{\min})e^{-st_{sw}} + (\frac{y_f}{P_1(0)} - u_{\min})e^{-st_f})}{(s+1/6)}$$

$$\text{Res}(G_Y(s), -1) = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{(-1 + 5/6)(u_{\max} - (u_{\max} - u_{\min})e^{t_{sw}} + (\frac{y_f}{P_1(0)} - u_{\min})e^{t_f})}{(-1 + 1/6)}$$

$$\text{Res}(G_Y(s), -1) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{15} \left(u_{\max} - (u_{\max} - u_{\min})e^{t_{sw}} + \left(\frac{y_f}{P_1(0)} - u_{\min} \right) e^{t_f} \right) = 0}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(G_Y(s), -\frac{1}{6}\right) &= \lim_{s \rightarrow -1/6} (s + 1/6)G_Y(s) \\ \text{Res}\left(G_Y(s), -\frac{1}{6}\right) &= \lim_{s \rightarrow -1/6} \frac{\sqrt{2}(s + 5/6)(u_{\max} - (u_{\max} - u_{\min})e^{-st_{sw}} + (\frac{y_f}{P_1(0)} - u_{\min})e^{-st_f})}{(s + 1)} \\ \text{Res}\left(G_Y(s), -\frac{1}{6}\right) &= \frac{\sqrt{2}(-1/6 + 5/6)(u_{\max} - (u_{\max} - u_{\min})e^{t_{sw}/6} + (\frac{y_f}{P_1(0)} - u_{\min})e^{t_f/6})}{(-1/6 + 1)} \\ \text{Res}\left(G_Y(s), -\frac{1}{6}\right) &= \boxed{\frac{8\sqrt{2}}{5}(u_{\max} - (u_{\max} - u_{\min})e^{t_{sw}/6} + (\frac{y_f}{P_1(0)} - u_{\min})e^{t_f/6}) = 0} \end{aligned}$$

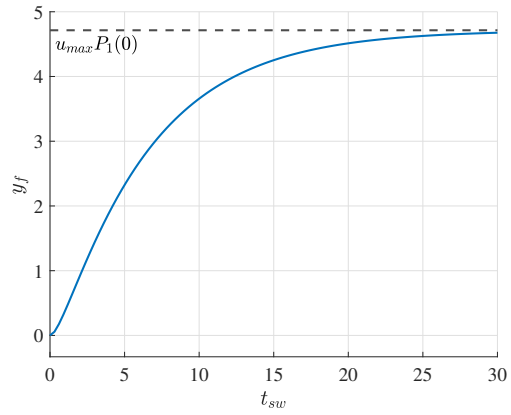
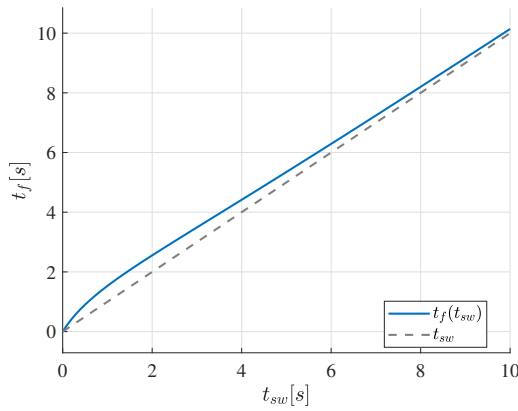
קיבלנו שתי משוואות בשני נעלמים שלא נוכל לפתור בצורה אנליטית (משוואות טרנסנדנטיות),

$$(u_{\max} - (u_{\max} - u_{\min})e^{t_{sw}} + (\frac{y_f}{P_1(0)} - u_{\min})e^{t_f}) = 0 \quad (4)$$

$$(u_{\max} - (u_{\max} - u_{\min})e^{t_{sw}/6} + (\frac{y_f}{P_1(0)} - u_{\min})e^{t_f/6}) = 0 \quad (5)$$

על מנת לבדוק שהקשרים הגיוניים (בדיקת שפיות), נגדיר את t_{sw} להיות פרמטר ונבחן את הקשרים שמתקבלים לזמן הסופי t_f ולמפלס הסופי y_f . עבור הזמן הסופי בהצבת הערכים המספריים מתקבלים הקשרים

$$t_f = t_{sw} + \frac{6}{5} \log \left(\frac{-5e^{-t_{sw}} + \sqrt{15} + 5}{-5e^{-\frac{t_{sw}}{6}} + \sqrt{15} + 5} \right) \quad y_f = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{(-5e^{-\frac{t_{sw}}{6}} + \sqrt{15} + 5)^{6/5}}{\sqrt[5]{-5e^{-t_{sw}} + \sqrt{15} + 5}} - \sqrt{15} \right)$$



(א) זמן המילוי הסופי t_f כתלות בזמן המיתוג t_{sw} (ב) מפלס המיכל הסופי y_f כתלות בזמן המיתוג t_{sw}

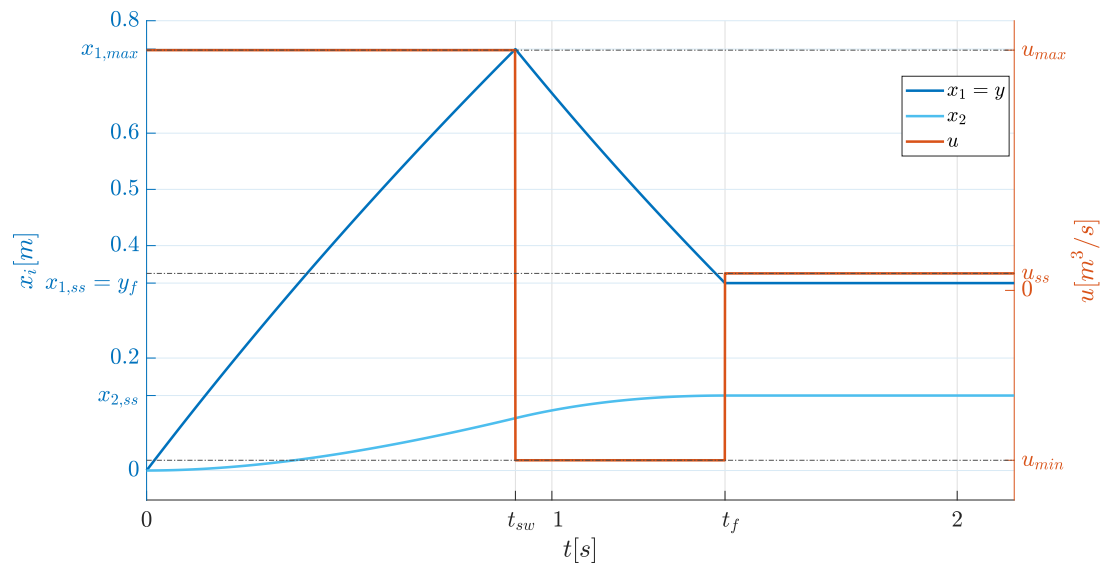
איור 6: זמן המילוי ומפלס המיכל כתלות בזמן המיתוג

באיור 6א ניתן לראות שהזמן הסופי t_f תמיד יהיה גדול מזמן המיתוג t_{sw} כמו שניתן לצפות מהבניה של חוק הבקרה. כמו כן, באיור 6ב ניתן לראות שככל שזמן המיתוג יהיה מאוחר יותר המפלס הסופי של המיכל יישאף להגבר הסטטי של התהליך מוכפל באות הבקרה המקסימלי (שקול למדרגה בגובה $u_{\max}$). על מנת למצוא את זמן המיתוג, נפתור את מערכת המשוואות שיקבלנו בעזרת פותרן נומרי¹ ונקבל

$$t_{sw} = 0.910[s] \quad t_f = 1.427[s]$$

¹פקודת fsolve של Matlab או פותרן נומרי אחר.

אות הבקרה ותגובת התהליך מוצגים באיור 7



איור 7: תגובת התהליך ואות הבקרה

שימו לב שנדרש $t_{sw} > t_f/2$ על מנת לפצות על מעבר המים למיכל 2. כמו כן, מכיוון שבתהליך זה אין אינטגרטור (בניגוד להתהליך שראינו בהרצאה), נדרש אות בקרה במצב מתמיד $u_{ss} \neq 0$ והמערכת מגיעה למצב שיווי משקל חדש.

נספח - רענון התמרות לפלס

כדי לפתח את הביטויים של תגובות המדרגה בסעיף 3 צריך להכיר כלל בסיסי בהתמרות לפלס - הזהה. זהות הזהה אומרת שבהינתן פונקציה $f(t)$ שהתמרת לפלס שלה קיימת, אזי

$$\mathcal{L}[f(t-a)\mathbb{1}(t-a)] = e^{-as}F(s).$$

מכאן בעזרת שימוש בלינאריות (התמרה אינטגרלית היא אופרטור לינארי) ניתן מיד לחלץ את הזהות

$$\mathcal{L}[t\mathbb{1}(t-a)] = \mathcal{L}[(t-a)\mathbb{1}(t-a)] + \mathcal{L}[a\mathbb{1}(t-a)] = \frac{1}{s^2}e^{-as} + a\frac{1}{s}e^{-as} = \frac{as+1}{s^2}e^{-as}$$

בצורה דומה ניתן לחלץ את ההתמרות עבור פולינומים מסדר גבוה יותר, וכך לייצר את התגובות הרצויות. נפעיל את הכלל על שלושת המרכיבים של אות הייחוס, ונקבל

$$\begin{aligned} R_1(s) &= \frac{a_{\max}}{s^3} (1 - e^{-st_1}) - \frac{a_{\max}(0-t_1)}{2} \frac{(0-t_1)s+2}{s^2} e^{-st_1} \\ R_2(s) &= \left(\frac{v_{\max}^2}{2a_{\max}s} + \frac{v_{\max}}{s^2} \right) (e^{-st_1} - e^{-st_2}) + \frac{v_{\max}}{s} (t_1 - t_2) e^{-st_2} \\ R_3(s) &= \left(\frac{y_f}{s} - \frac{a_{\max}}{s^3} \right) (e^{-st_2} - e^{-st_f}) - \frac{a_{\max}(t_2-t_f)}{2} \frac{(t_2-t_f)s+2}{s^2} e^{-st_f} \end{aligned}$$

מכאן על מנת לקבל את אות הייחוס בתור תגובת מדרגה של מערכת כלשהי נגדיר,

$$T_r(s) := \left(R_1(s) + R_2(s) + R_3(s) \right) \frac{s}{y_f} + e^{-st_f}$$

וניתן לבדוק בסימולציה שאכן מתקבלת אותה התגובה.