



**מערכות ליניאריות מ' (034032)**

דוגמאות בחינות סופיות

26 בדצמבר 2023

י"ד בטבת, תשפ"ד

**חלק א'  
 אותות**

**שאלה מס' 1**

חשבו  $h(t) = \int_{\mathbb{R}} x(t-s)y(s)ds$  עבור  $x(t) = \text{sinc}(t)$  ו-  $y(t) = 2\delta(t)$ .  
 $h(t) =$  מכיון ש

**שאלה מס' 2**

מה היא נורמה  $L_{\infty}$  של  $x = \exp_3 \cdot (\mathbb{P}_{-1} 1)$ ?

$\|x\|_{\infty} =$  מכיון ש

**שאלה מס' 3**

מה היא נורמה  $L_{\infty}$  של  $x = \mathbb{P}_{-1}(\exp_3 \cdot 1)$ ?

$\|x\|_{\infty} =$  מכיון ש

**שאלה מס' 4**

האם אות רציף  $x$  שהספקטרום שלו מתואר באיור 1 (א) הוא ממשי (נניח שהספקטרום הזה,  $X$ , ממשי בעצמו)?

כן / לא, מכיון ש

**שאלה מס' 5**

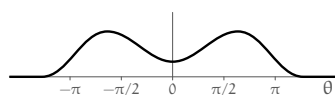
האם אות רציף שהספקטרום שלו מתואר באיור 1 (א) הוא מחזורי?

כן / לא, מכיון ש

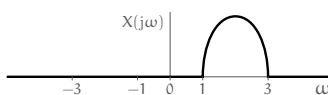
**שאלה מס' 6**

האם אות רציף  $x$  שהספקטרום שלו מתואר באיור 1 (ב) הוא ממשי (נניח שהספקטרום הזה,  $X$ , ממשי בעצמו)?

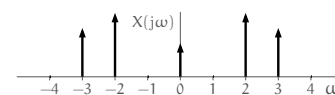
כן / לא, מכיון ש



(ג) לשאלה 13

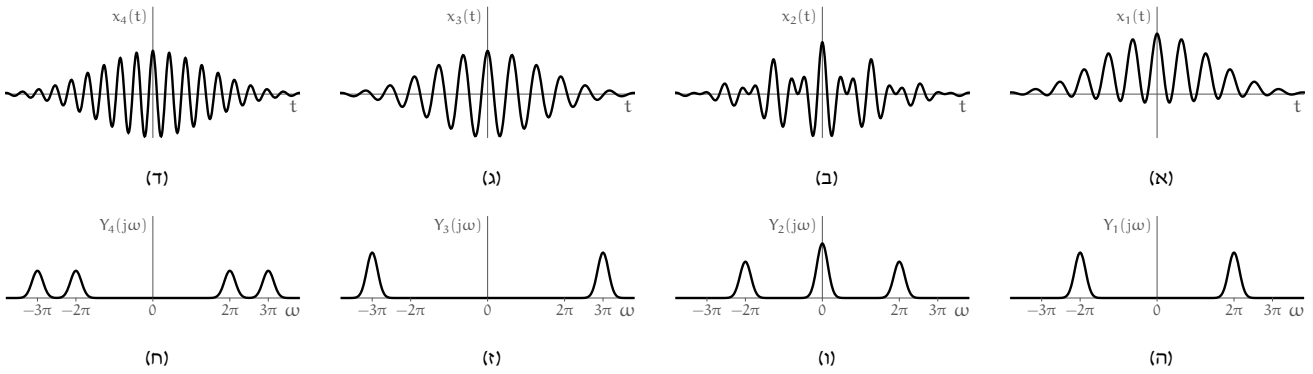


(ב) לשאלות 6 ו-7



(א) לשאלות 4 ו-5

איור 1: אותות בתחום תדר



איור 2: אותות בתחומי זמן ותדר לשאלה 8

### שאלה מס' 7

האם אות רציף שהספקטרום שלו מתואר באיור 1(ב) הוא מחזורי?  
כן / לא, מכיון ש

### שאלה מס' 8

ארבעה אותות רציפיים  $x_i$  בתחום הזמן מוצגים באיור 2(א)-(ד). ארבעה אותות רציפיים  $y_j$  בתחום התדר מוצגים באיור 2(ה)-(ח). בהנחה שעבור כל  $i \in \mathbb{Z}_{1..4}$  קיים  $j \in \mathbb{Z}_{1..4}$  כך ש- $x_i = y_j$ , מצא את  $j$  התואם לכל  $i$ .

$x_1 = y$ , מכיון ש

\_\_\_\_\_

$x_2 = y$ , מכיון ש

\_\_\_\_\_

$x_3 = y$ , מכיון ש

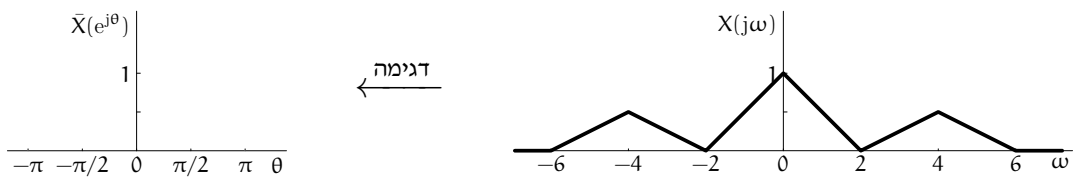
\_\_\_\_\_

$x_4 = y$ , מכיון ש

\_\_\_\_\_

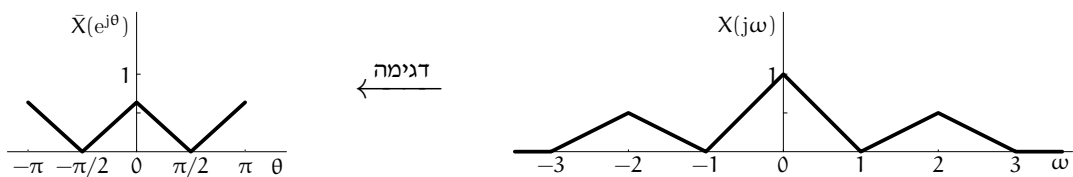
### שאלה מס' 9

ספקטרום של אות אנלוגי  $x$  מוצג באיור שלמטה. ציירו את הספקטרום של האות הדגום  $\bar{x}$  כך ש- $\bar{x}[i] = x(ih)$  עבור זמן הדגימה  $h = \pi/4$ .



### שאלה מס' 10

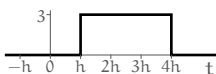
הספקטרומים של אות אנלוגי  $x$  ושל הגירסה הדגומה שלו  $\bar{x}$  שעבורה  $\bar{x}[i] = x(ih)$  מוצגים באיור שלמטה. מהו זמן הדגימה?



$h =$  \_\_\_\_\_

### שאלה מס' 11

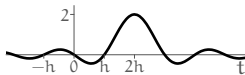
אות בדיד  $\bar{x}$  הומר, בזמן דגימה  $h$ , לאות אנלוגי  $x$  באמצעות מחזיק מסדר אפס. מה הוא  $\bar{x}$  במונחים של אותות בסיסיים (כמו פולס, מדרגה, ריצה, סינוס)?



$$\bar{x}[t] = \underline{\hspace{10cm}}$$

### שאלה מס' 12

אות בדיד  $\bar{x}$  הומר, בזמן דגימה  $h$ , לאות אנלוגי  $x$  באמצעות מחזיק-sinc. מה הוא  $\bar{x}$  במונחים של אותות בסיסיים (כמו פולס, מדרגה, ריצה, סינוס)?



$$\bar{x}[t] = \underline{\hspace{10cm}}$$

### שאלה מס' 13

האם העקומה באיור 1 (ג) בעמוד 1 יכולה להיות הספקטרום של אות בדיד כלשהוא?  
כן / לא, מכיון ש

---

### שאלה מס' 14

פרקו את הפונקציה הרציונלית  $H(s) = \frac{3s^2 + 10s + 4}{s(s+1)(s+4)}$  לשברים חלקיים.

$$H(s) = \underline{\hspace{10cm}}$$

### שאלה מס' 15

$K(s) = \frac{2(2s+3)(s-2)}{(s-1)(s+1)(s+4)}$  היא התמרת לפלס של  $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  עם  $\text{RoC} = \mathbb{C}_1$ . האם טרנספורמציה פורייה שלה קיימת?

כן / לא, מכיון ש

---

חלק ב'  
מערכות כניסה / יציאה

שאלה מס' 16

האם מערכת  $y \mapsto u : G$  כך ש- $y(t) = \sin(2t)u(t)$  היא סטטית?  
כן / לא, מכיון ש

---

---

שאלה מס' 17

האם מערכת  $y \mapsto u : G$  כך ש- $y(t) = \sin(2t)u(t)$  היא ליניארית?  
כן / לא, מכיון ש

---

---

שאלה מס' 18

האם מערכת  $y \mapsto u : G$  כך ש- $y(t) = \sin(2t)u(t)$  היא קבועה בזמן?  
כן / לא, מכיון ש

---

---

שאלה מס' 19

האם מערכת  $y \mapsto u : G$  כך ש- $y(t) = \sin(2u(t))$  היא סטטית?  
כן / לא, מכיון ש

---

---

שאלה מס' 20

האם מערכת  $y \mapsto u : G$  כך ש- $y(t) = \sin(2u(t))$  היא ליניארית?  
כן / לא, מכיון ש

---

---

שאלה מס' 21

האם מערכת  $y \mapsto u : G$  כך ש- $y(t) = \sin(2u(t))$  היא קבועה בזמן?  
כן / לא, מכיון ש

---

---

שאלה מס' 22

האם מערכת ליניארית  $y \mapsto u : G$  כך ש- $\dot{y}(t) + y(t) = \dot{u}(t) + u(t)$  היא סטטית?  
כן / לא, מכיון ש

---

---

### שאלה מס' 23

האם מערכת שתגובת ההלם שלה  $g$  מקיימת  $g(t) = \frac{1}{t} \mathbb{1}(t-1)$  סיבתית?

כן / לא, מכיון ש

---

### שאלה מס' 24

האם מערכת שתגובת ההלם שלה  $g$  מקיימת  $g(t) = \frac{1}{t} \mathbb{1}(t-2)$  יציבה BIBO?

כן / לא, מכיון ש

---

### שאלה מס' 25

האם מערכת שתגובת ההלם שלה  $g$  מקיימת  $g(t) = \frac{1}{1+t^2} \mathbb{1}(t+1)$  סיבתית?

כן / לא, מכיון ש

---

### שאלה מס' 26

האם מערכת שתגובת ההלם שלה  $g$  מקיימת  $g(t) = \frac{1}{1+t^2} \mathbb{1}(t-3)$  יציבה BIBO?

כן / לא, מכיון ש

---

### שאלה מס' 27

מה היא פונקציית התמסורת של המערכת  $w \mapsto v$ :  $G$  המתוארת ע"י משוואה  $\ddot{w}(t) = -\dot{w}(t) - 3w(t) + \dot{v}(t) - 2v(t)$ ?

$G(s) =$  \_\_\_\_\_ מכיון ש

---

### שאלה מס' 28

מה היא פונקציית התמסורת של המערכת  $w \mapsto v$ :  $G$  המתוארת ע"י משוואה  $w[t+2] = -w[t+1] - 3w[t] + v[t+1] - 2v[t]$ ?

$G(z) =$  \_\_\_\_\_ מכיון ש

---

### שאלה מס' 29

מה היא תגובת ההלם של המערכת  $w \mapsto v$ :  $G$  המתוארת ע"י משוואה  $w(t) = v(t) + 2v(t-1) - 8v(t-3)$ ?

$g(t) =$  \_\_\_\_\_ מכיון ש

---

### שאלה מס' 30

מה היא פונקציית התמסורת של מערכת  $w : v \mapsto w$  המתוארת ע"י משוואה  $w(t) = v(t) + 2v(t-1) - 8v(t-3)$ ?

$$G(s) = \text{מכיון ש}$$

---

---

### שאלה מס' 31

האם מערכת עם פונקציית התמסורת  $F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 - s + 1}{s^2 + 5s + 1}$  יציבה וסיבתית (המונה והמכנה של  $F(s)$  זרים)?

כן / לא / אי אפשר לומר, מכיון ש

---

---

### שאלה מס' 32

האם מערכת עם פונקציית התמסורת  $F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 - s + 1}{-s^3 - s^2 - s - 2}$  יציבה וסיבתית (המונה והמכנה של  $F(s)$  זרים)?

כן / לא / אי אפשר לומר, מכיון ש

---

---

### שאלה מס' 33

האם מערכת עם פונקציית התמסורת  $F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 - s + 1}{-s^3 - s^2 - 2s - 1}$  יציבה וסיבתית (המונה והמכנה של  $F(s)$  זרים)?

כן / לא / אי אפשר לומר, מכיון ש

---

---

### שאלה מס' 34

האם מערכת עם פונקציית התמסורת  $H(z) = \frac{z^2 + z + 1}{2z + 1}$  סיבתית?

כן / לא / אי אפשר לומר, מכיון ש

---

---

### שאלה מס' 35

האם מערכת עם פונקציית התמסורת  $H(z) = \frac{z^2 + z + 1}{2z + 1}$  יציבה?

כן / לא / אי אפשר לומר, מכיון ש

---

---

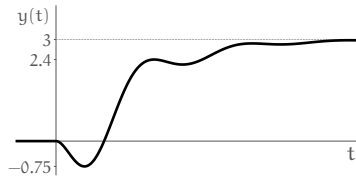
### שאלה מס' 36

האם מערכת עם פונקציית התמסורת  $H(z) = \frac{z^2 + z + 1}{6z^2 - 5z + 1}$  סיבתית?

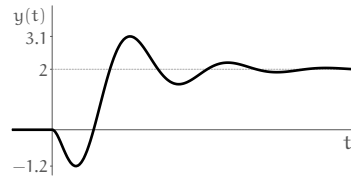
כן / לא / אי אפשר לומר, מכיון ש

---

---



41 לשאלה (ב)



40 לשאלה (א)

איור 3: תגובות מדרגה

### שאלה מס' 37

האם מערכת עם פונקציית התמסורת  $H(z) = \frac{z^2 + z + 1}{6z^2 - 5z + 1}$  יציבה?

כן / לא / אי אפשר לומר, מכיון ש

### שאלה מס' 38

מהם ההגבר הסטטי וקבוע הזמן של  $V(s) = \frac{1}{s+3}$ ?

$\tau =$  \_\_\_\_\_ ו-  $k_{st} =$  \_\_\_\_\_

### שאלה מס' 39

מהם ההגבר הסטטי, מנת הריסון, והתדירות הטבעית של  $W(s) = \frac{1}{4s^2 + 4s + 1}$ ?

$\omega_n =$  \_\_\_\_\_ ו-  $\zeta =$  \_\_\_\_\_,  $k_{st} =$  \_\_\_\_\_

### שאלה מס' 40

מהן תגובות היתר, overshoot ו-undershoot, עבור תגובת מדרגה שבאיור 3(א), באחוזים?

OS = \_\_\_\_\_ ו- US = \_\_\_\_\_

### שאלה מס' 41

מהן תגובות היתר, overshoot ו-undershoot, עבור תגובת מדרגה שבאיור 3(ב), באחוזים?

OS = \_\_\_\_\_ ו- US = \_\_\_\_\_

### שאלה מס' 42

נתונות 2 מערכות עם הפונקציות תמסורת  $G_1(s) = \frac{10}{3s+1}$  ו-  $G_2(s) = \frac{10}{3s+2}$ . לתגובת מדרגה של איזו אחת מהן יש זמן עלייה (rise time) קצר יותר?

G, מכיון ש

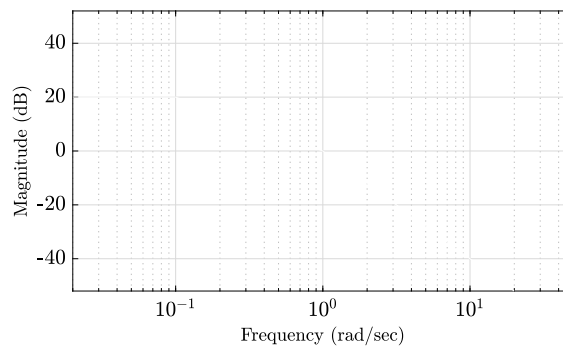
### שאלה מס' 43

לתגובת מדרגה של איזו מהמערכות הללו תגובת יתר (overshoot) גדולה יותר:  $P_1(s) = \frac{10}{s^2 + s + 1}$  או-  $P_2(s) = \frac{s+1}{s^2 + s + 1}$ ?

P, מכיון ש

### שאלה מס' 44

ציירו את עקום הגבר בודה אסימפטוטי (מקורב) של תגובת התדירות של פונקציית התמסורת  $P(s) = \frac{10}{(10s + 1)(s + 1)}$ .



### שאלה מס' 45

נתונה מערכת לינארית עם פונקציית תמסורת  $G(s) = \frac{\alpha s + 1}{\beta s + 1}$  ועקום בודה כמו באיור 4(א). מה הם  $\alpha$  ו- $\beta$ ?

$\alpha =$  \_\_\_\_\_  $\beta =$  \_\_\_\_\_ מכיון ש

---



---



---

### שאלה מס' 46

נתונה מערכת לינארית עם פונקציית תמסורת  $G(s) = \frac{\alpha s + 1}{s + 1}$  ועקום בודה כמו באיור 4(ב). מה הוא  $\alpha$ ?

$\alpha =$  \_\_\_\_\_ מכיון ש

---



---

### שאלה מס' 47

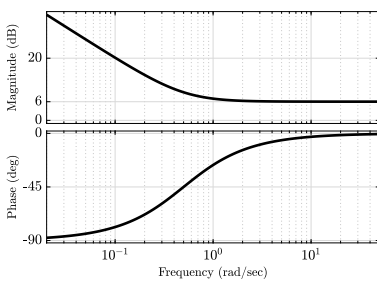
נתונה מערכת לינארית עם פונקציית תמסורת  $G(s) = \frac{\alpha s + 1}{s + \beta}$  ועקום בודה כמו באיור 4(ג). מה הם  $\alpha$  ו- $\beta$ ?

$\alpha =$  \_\_\_\_\_  $\beta =$  \_\_\_\_\_ מכיון ש

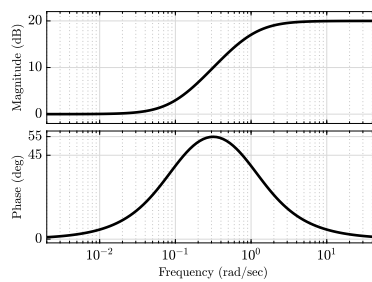
---



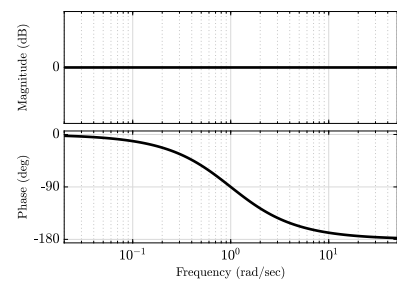
---



47 לשאלה (ג)



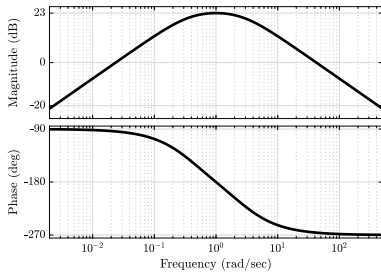
46 לשאלה (ב)



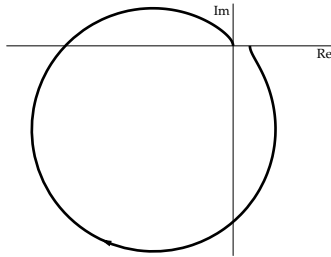
45 לשאלה (א)

איור 4: עקומי בודה

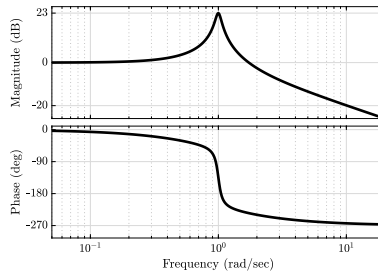




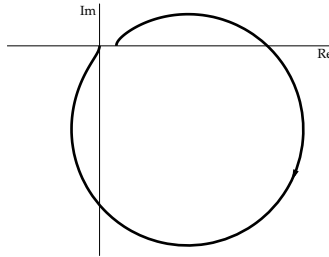
B<sub>3</sub> (א)



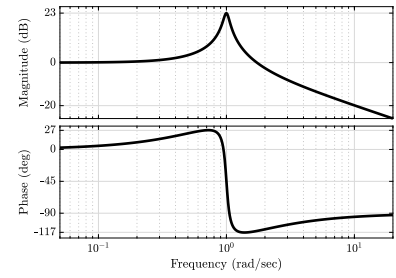
P<sub>3</sub> (ב)



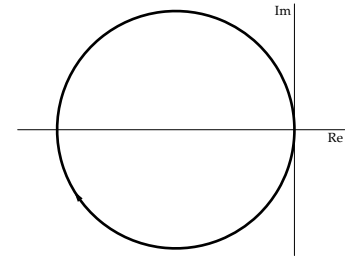
B<sub>2</sub> (ב)



P<sub>2</sub> (ג)



B<sub>1</sub> (א)



P<sub>1</sub> (ד)

איור 5: עקומי בודה ותאורים פולריים של 3 מערכות לשאלה 48

### שאלה מס' 48

באיור 5 מוצגים עקומי בודה ותאורים פולריים של שלוש מערכות. שייכו ביניהם.

$B_1 = P$  מכיון ש

\_\_\_\_\_

$B_2 = P$  מכיון ש

\_\_\_\_\_

$B_3 = P$  מכיון ש

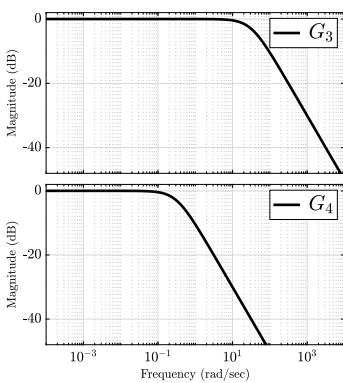
\_\_\_\_\_

### שאלה מס' 49

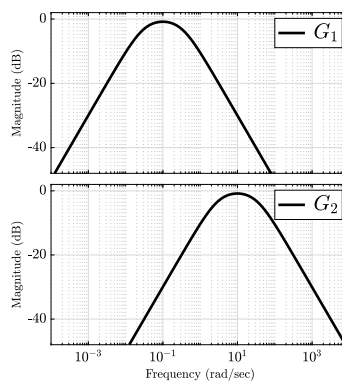
באיור 6 (א) נתונים אותות כניסה ויציאה של מערכת  $F: u \mapsto y$ . מהי דיאגרמת הבודה באיור 6 (הגבר בלבד) המתאימה ל-F?

$F = G$  מכיון ש

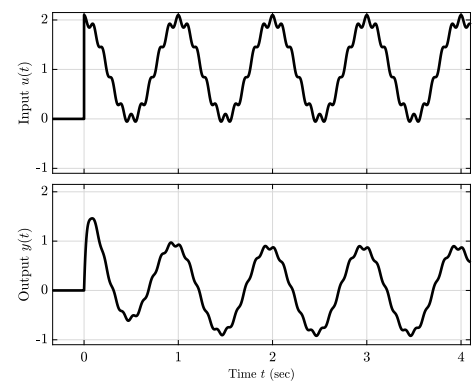
\_\_\_\_\_



G<sub>4</sub> ו-G<sub>3</sub> (ג)

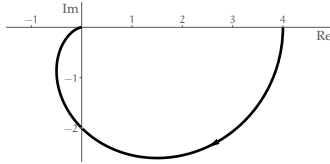


G<sub>2</sub> ו-G<sub>1</sub> (ב)



u ו-y (א)

איור 6: אותות כניסה ויציאה בתחום זמן ועקומי בודה לבחירה בשאלה 49



איור 7: תאור פולרי לשאלה 50

### שאלה מס' 50\*

איור 7 מתאר את התאור הפולרי של מערכת ליניארית קבועה בזמן ויציבה. תגובת מצב מתמיד שלה לכניסה  $u(t) = 1 + \cos(\omega_0 t)$  עבור  $\omega_0$  כלשהו היא  $y_{ss}(t) = \alpha + \beta \sin(\omega_0 t)$ . מצא את  $\alpha$  ו- $\beta$ .

$\alpha =$  \_\_\_\_\_ ,  $\beta =$  \_\_\_\_\_ מכיון ש

---



---



---

### שאלה מס' 51

נתונה טבלת ראות' (Routh) של פולינום  $D(s) = s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 8s + 6$

0	1	4	6
1	4	8	
2	2	6	
3	-4	0	
4	6		

כמה שורשים של  $D(s)$  הם ב- $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{C}}_0$ , וכמה ב- $\mathbb{C}_0$ ?

ב- $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{C}}_0$  ו- ב- $\mathbb{C}_0$  מכיון ש

---



---

### שאלה מס' 52

נתונה טבלת ג'ורי (Jury) של פולינום  $D(z) = z^3 + 3z^2 + 6z + 2$

0	1	3	6	2
1	2	6	3	1
1	-3	-9	0	
2	0	-9	-3	
2	-3	-9		
3	-9	-3		
3	24			

כמה שורשים של  $D(z)$  הם ב- $\mathbb{D}_1$ , וכמה ב- $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}_1$ ?

ב- $\mathbb{D}_1$  ו- ב- $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}_1$  מכיון ש

---



---

## חלק ג' מערכות במרחב מצב

### שאלה מס' 53

האם  $(A - I)^4 = 0$  עבור  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$  ?

כן / לא, מכיון ש

---

### שאלה מס' 54

האם זה יתכן ש- $\exp\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}t\right) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$  ?

כן / לא, מכיון ש

---

### שאלה מס' 55

חשבו  $\Phi(t) = \exp\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}t\right)$ . אין צורך להסביר.

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

### שאלה מס' 56

האם קיימת טרנספורמציה דמיון הקושרת את מימושי מרחב המצב הבאים:

$$? \begin{cases} \dot{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_2(t) \end{cases} \quad \neg \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x_1(t) \end{cases}$$

כן / לא / אי אפשר לומר, מכיון ש

---

### שאלה מס' 57

האם קיימת טרנספורמציה דמיון הקושרת את מימושי מרחב המצב הבאים:

$$? \begin{cases} \dot{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_2(t) \end{cases} \quad \neg \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x_1(t) \end{cases}$$

כן / לא / אי אפשר לומר, מכיון ש

---

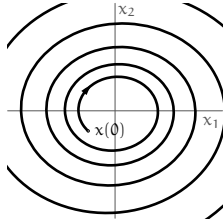
### שאלה מס' 58

הוכח ש- $x(t) = e^{At}x_0$  הוא הפתרון של  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  עבור תנאי ההתחלה  $x(0) = x_0$ .

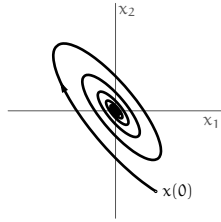
---



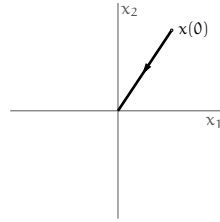
---



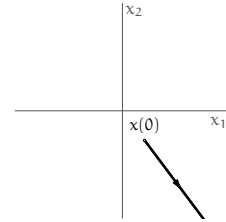
64 לשאלה (ד)



63 לשאלה (ג)



62 לשאלה (ב)



61 לשאלה (א)

איור 8: תגובות מערכות במשור מצב

**שאלה מס' 59**

מהו מימוש המשערך של פונקציית התמסורת  $G(s) = \frac{3}{s^3 + 2s + 1}$  ?

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

**שאלה מס' 60**

מה הן נקודות שווי משקל  $x_{eq}$  של מערכת  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x$  ?

$x_{eq} =$  מכיון ש

**שאלה מס' 61**

תגובה לא מאולצת של מערכת ליניארית מסדר שני במישור מצב מתוארת באיור 8(א). האם נקודת השיווי משקל של המערכת הזו יציבות אסימפטוטית ?

כן / לא / אי אפשר לומר, מכיון ש

**שאלה מס' 62**

תגובה לא מאולצת של מערכת ליניארית מסדר שני במישור מצב מתוארת באיור 8(ב). האם נקודת השיווי משקל של המערכת הזו יציבות אסימפטוטית ?

כן / לא / אי אפשר לומר, מכיון ש

**שאלה מס' 63**

תגובה לא מאולצת של מערכת ליניארית מסדר שני במישור מצב מתוארת באיור 8(ג). האם נקודת השיווי המשקל של המערכת הזו יציבות אסימפטוטית ?

כן / לא / אי אפשר לומר, מכיון ש

**שאלה מס' 64**

תגובה לא מאולצת של מערכת ליניארית מסדר שני במישור מצב מתוארת באיור 8(ד). האם נקודת השיווי המשקל של המערכת הזו יציבות אסימפטוטית ?

כן / לא / אי אפשר לומר, מכיון ש

### שאלה מס' 65

מהיא נקודת שיווי המשקל של  $\dot{x} = (x - 1)^2 + x^2 u^4$  ?

$$u_{eq} = \quad x_{eq} =$$

### שאלה מס' 66

מהן נקודות שיווי המשקל של  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$  ?

$$u_{eq} = \quad x_{eq} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

### שאלה מס' 67

נתונה מערכת לא לינארית  $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - e^u \\ y = e^{-x+1} \end{cases}$ . בצעו לינאריזציה סביב הנקודת שיווי המשקל  $(x_{eq}, u_{eq}) = (1, 0)$  ומצאו את פונקציית התמסורת של המערכת הלינארית  $G_\delta : u_\delta \mapsto y_\delta$ .

$$G_\delta(s) = \quad \text{מכיון ש}$$

### שאלה מס' 68

האם נקודות שיווי המשקל של המערכת הלא מאולצת  $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x$  יציבות לפי ליאפונוב (Lyapunov) ?  
כן / לא / אי אפשר לומר, מכיון ש

### שאלה מס' 69

האם נקודות שיווי המשקל של המערכת הלא מאולצת  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x$  יציבות לפי ליאפונוב (Lyapunov) ?  
כן / לא / אי אפשר לומר, מכיון ש

### שאלה מס' 70

נתון ש-  $\dot{x}_\delta = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x_\delta$  היא הלינאריזציה של מערכת לא לינארית  $\dot{x} = f(x)$  סביב נקודת שיווי משקל  $x_{eq}$ . האם  $x_{eq}$  היא נקודת שיווי משקל יציבה (לפי ליאפונוב) של  $\dot{x} = f(x)$  ?  
כן / לא / אי אפשר לומר, מכיון ש

### שאלה מס' 71

נתון ש-  $\dot{x}_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x_\delta$  היא הלינאריזציה של מערכת לא לינארית  $\dot{x} = f(x)$  סביב נקודת שיווי משקל  $x_{eq}$ . האם  $x_{eq}$  היא נקודת שיווי משקל יציבה (לפי ליאפונוב) של  $\dot{x} = f(x)$  ?  
כן / לא / אי אפשר לומר, מכיון ש

# דף נוסחאות<sup>1</sup>

קבועים:  $\pi = 3.1415926535897932385$ ,  $e = 2.7182818284590452354$

קבוצות:  $\bar{D}_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \alpha\}$ ,  $D_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \alpha\}$ ,  $\bar{C}_\alpha := \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re } s \geq \alpha\}$ ,  $C_\alpha := \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re } s > \alpha\}$

סדרה הנדסית:  $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$

טור פורייה של את  $T$ -מחזורי  $x$ :  $x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X[k] e^{j\omega_0 kt}$  כאשר  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  ו- $X[k] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega_0 kt} dt$

התמרת פורייה  $X = \mathcal{F}\{x\}$ :  $X(j\omega) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-j\omega t} dt \iff x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$  והתמרה הפוכה היא

התמרת פורייה בזמן בדיד  $X = \mathcal{F}\{x\}$ :  $X(e^{j\theta}) = \sum_{t \in \mathbb{Z}} x[t] e^{-j\theta t} \iff x[t] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) e^{j\theta t} d\theta$  והתמרה הפוכה היא

פרסבל:  $\sum_{t \in \mathbb{Z}} |x[t]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\theta})|^2 d\theta$  או  $\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |X(j\omega)|^2 d\omega$

התמרת לפלס  $X = \mathcal{L}\{x\}$ :  $X(s) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-st} dt \iff x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(s) e^{st} ds$

התמרת  $X = \mathcal{Z}\{x\}$ :  $X(z) = \sum_{t \in \mathbb{Z}} x[t] z^{-t} \iff x[t] = \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{C}} X(z) z^{t-1} dz$

מחזיק- $\text{sinc}$ :  $x(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \bar{x}[i] \text{sinc}((t - ih)\omega_n)$

התמרה בי-ליניאריות:  $z \rightarrow \frac{1+s}{1-s}$

שארית של פונקציית  $F(s)$  ב- $s = p_i$  היא  $\text{Res}(F, p_i) = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) F(s)$

משפט ערך הסופי: בתנאים טכניים מסוימים,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s)$  ו- $\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) X(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$

משפט ערך ההתחלתי: בתנאים טכניים מסוימים,  $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s X(s)$  ו- $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

פולינום  $D(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  עם  $a_n > 0$  הוא שור (Schur) רק אם  $D(1) > 0$  ו- $(-1)^n D(-1) > 0$

כלל לייבניץ:  $\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(s, t) ds = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(s, t) ds + \frac{db(t)}{dt} f(b(t), t) - \frac{da(t)}{dt} f(a(t), t)$

לינארזיציה סביב  $(x_{eq}, u_{eq})$ :  $\begin{cases} \dot{x}_\delta = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq}}} \right) x_\delta + \left( \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq}}} \right) u_\delta \\ y_\delta = \left( \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq}}} \right) x_\delta + \left( \frac{\partial h}{\partial u} \Big|_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq}}} \right) u_\delta \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases}$

המרת יחידות:

2	3	5	7	15	25	50	75	יחידות רגילות
≈ 6	≈ 9.5	≈ 14	≈ 16.9	≈ 23.5	≈ 28	≈ 34	≈ 37.5	dB
								rad
2	1.75	1.5	1.25	1				deg
≈ 114.59	≈ 100.27	≈ 85.94	≈ 71.62	≈ 57.3				

<sup>1</sup>נא לא לפלבל בשימושן (התניה פבלובית היא תהליך למידה שבו גירוי נייטרלי נלמד מעורר אצל אדם או בעל חיים תגובה רפלקסיבית).