

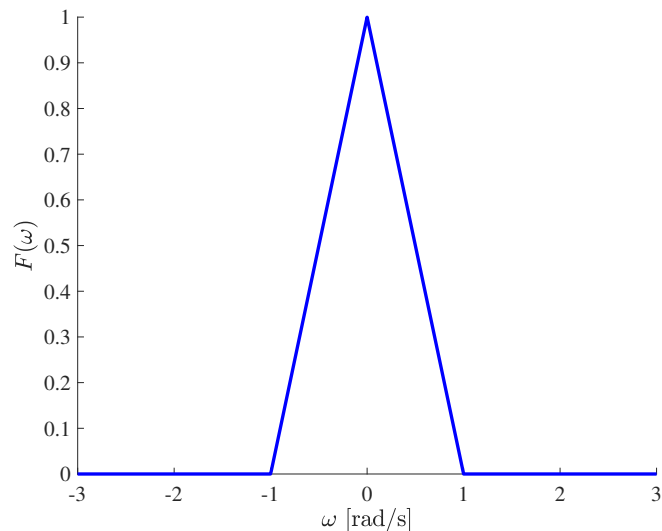


תורת הבקרה (035188)

סמסטר אביב תשפ"ג

תרגול מס' 11

שאלה מס' 1



איור 1: ספקטרום האות הנתון

באיור 1 מתואר ספקטרום של אות רציף אשר נתון אנליטית על ידי

$$F(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq -1 \\ \omega + 1, & -1 < \omega < 0 \\ -\omega + 1, & 0 \leq \omega < 1 \\ 0, & \omega \geq 1 \end{cases}$$

- מצאו את גרף הספקטרום של האות לאחר שנדגם בתדרים $\omega_s = 3, 1.5$.
- מצאו את ספקטרום האות שנדגם בתדירויות הנ"ל ושוחזר בעזרת משחזר אידאלי.
- מה היא אנרגיה שגיאת השחזור עבור $0.5 < \omega_N < 1$ (תדר נייקויסט)? מהו זמן הדגימה המרבי כך שאנרגיה זו קטנה מ 5%?
- כיצד יראה הספקטרום המשוחזר אם השיחזור יתבצע באמצעות מחזיק מסדר אפס ולא באמצעות משחזר אידאלי? האם ניתן לשפר את איכות השיחזור?

פתרון סעיף 1. הספקטרום הנתון הוא התמרת פורייה של אות רציף כלשהו, והוא בעל רוחב סרט סופי $\omega_b = 1$. כאשר דוגמים את האות בתדר דגימה ω_s כל שהוא מתקבל ספקטרום זגוס הנתון על ידי אינסוף חזרות של הספקטרום המקורי, מוזז בהרמוניות שלמות של תדר הדגימה, כלומר

$$\bar{F}(\omega) = \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega + k\omega_s)$$

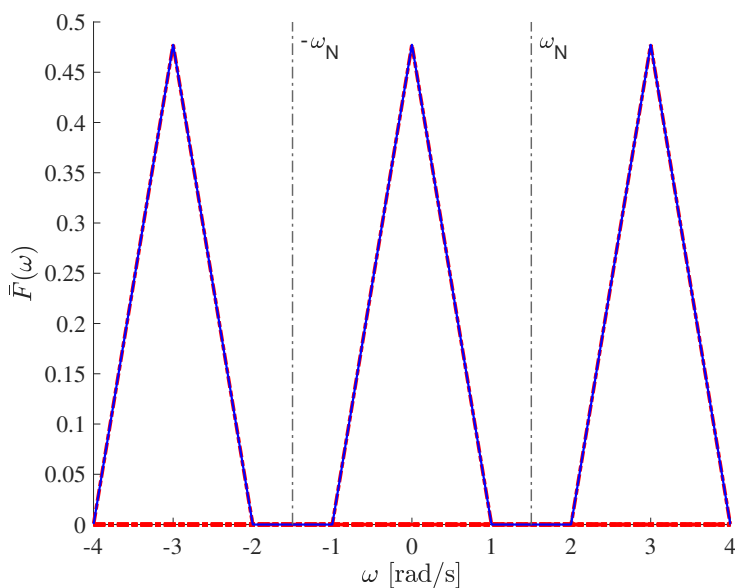
אם נדגום בתדר הגדול לפחות פי שתיים מרוחב הסרט, כלומר $\omega_s > 2\omega_b$, ההעתקים הללו לא יחפפו כלל, ונקבל אינסוף חזרות על הספקטרום המקורי עם עיוות של האמפליטודה. לכן נהוג להגדיר את **תדר נייקויסט** בתור מחצית תדר הדגימה

$$\omega_N = \frac{\omega_s}{2}$$

ותנאי הכרחי לשיחזור ללא עיוות של האות הוא שתדר נייקויסט יהיה גדול מרוחב הסרט של האות אותו דוגמים. עבור המקרה הראשון

$$\omega_s = 3 \implies \omega_N = 1.5 > \omega_b = 1$$

ולכן נקבל העתקים של הספקטרום המקורי ללא חפיפה, כמתואר באיור 2.



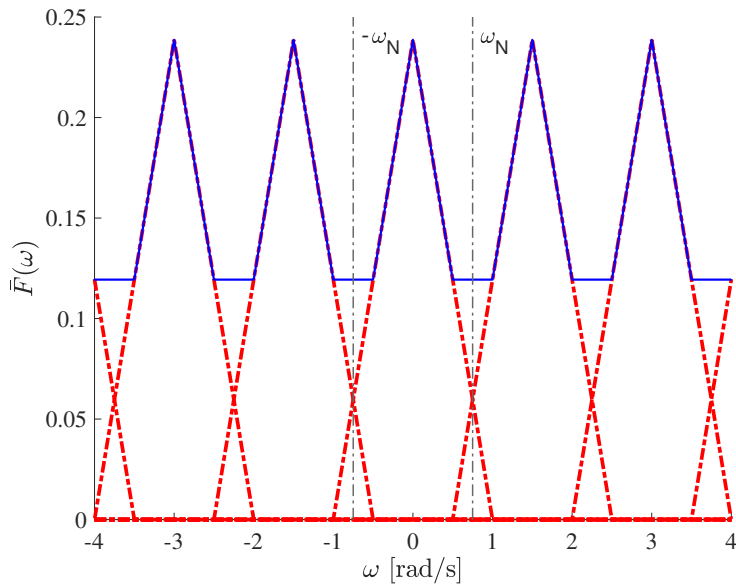
איור 2: ספקטרום האות הדגום בתדר $\omega_s = 3$

מאידך, עבור המקרה השני נקבל

$$\omega_s = 1.5 \implies \omega_N = 0.75 < \omega_b = 1$$

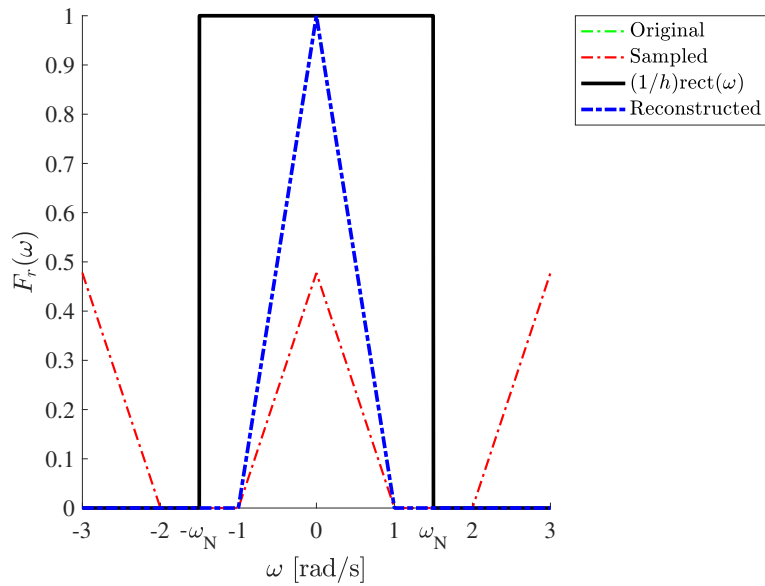
ולכן ההעתקים של הספקטרום יחפפו אחד את השני, וספקטרום האות הדגום (באדום מקוקו) יהיה שונה מהמקורי, כמתואר באיור 3.

שימו לב שכתלות בתדר נייקויסט יכולה להיות חפיפה של יותר מהעתק אחד של הספקטרום המקורי. ▽



איור 3: ספקטרום האות הדגום בתדר $\omega_s = 1.5$

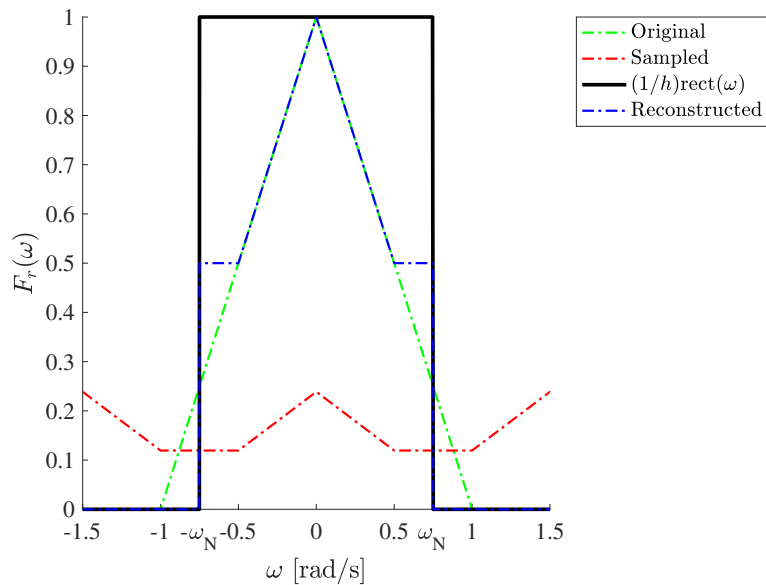
פתרון סעיף 2. על פי משפט שאנון, אם לאות הנדגם יש רוחב סרט סופי, ואם דוגמים בתדירות נייקוויסט גדולה מרוחב הסרט של האות המקורי (כלומר דוגמים "מספיק מהר"), אזי ניתן לשחזר במדויק את הספקטרום המקורי מהדגימות. שחזור זה נעשה בעזרת קונבולוציה (הכפלה בתחום התדר) עם תגובת הלם של מסנן מעביר נמוכים אידאלי, תגובת התדר של מסנן כזה היא מלבן סימטרי סביב תדר אפס ברוחב $2\omega_N$. אכן עבור המקרה הראשון, כמתואר באיור 4, נקבל שחזור מושלם של הספקטרום המקורי.



איור 4: ספקטרום האות הדגום בתדר $\omega_s = 3$ ומשוחזר על ידי משחזר אידאלי

לעומת זאת עבור המקרה השני התנאי של שאנון לא מתקיים, ונקבל כי לאות המשוחזר ספקטרום שונה מאשר לאות המקורי, כמתואר באיור 5.

▽



איור 5: ספקטרום האות המשוחזר בתדר $\omega_s = 1.5$ ומשוחזר על ידי משחזר אידאלי

פתרון סעיף 3. שגיאת השחזור היא ההפרש בין האות המקורי לאות המשוחזר, את אנרגיית השגיאה ניתן לחשב בעזרת הביטויים בתחום התדר לפי משפט פרסבל המקשר בין אנרגיה בתחום התדר לאנרגיה בתחום הזמן

$$.E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

מטעמי סימטריה ניתן להתייחס רק לתדרים חיוביים ואז להכפיל ב 2, לכן נחשב את האנרגיה של

$$F(\omega) = 1 - \omega, \quad 0 < \omega \leq \omega_b$$

בלבד. בתחום הנתון ייתכן "קיפול" יחיד, לכן השיחזור יראה כמו זה עבור $\omega_s = 1.5$, במקרה זה נשים לב כי החלק החיובי של הספקטרום המשוחזר מקיים

$$.F_r(\omega) = \begin{cases} 1 - \omega, & 0 \leq \omega \leq \omega_s - \omega_b \\ 2(1 - \omega_N), & \omega_s - \omega_b < \omega < \omega_N \\ 0, & \omega_N < \omega < \omega_b \end{cases}$$

בעזרת שניי ביטויי אלו נוכל לכתוב במפורש את ספקטרום השגיאה בתור

$$e(\omega) = F(\omega) - F_r(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega \leq \omega_s - \omega_b \\ 2\omega_N - 1 - \omega, & \omega_s - \omega_b < \omega \leq \omega_N \\ 1 - \omega, & \omega_N < \omega < \omega_b \end{cases}$$

והשגיאה תהיה

$$\begin{aligned} .E_e &= 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{\omega_s - \omega_b}^{\omega_N} (2\omega_N - 1 - \omega)^2 d\omega + \int_{\omega_N}^{\omega_b} (1 - \omega)^2 d\omega \right) \\ &= \frac{2}{3\pi} (1 - \omega_N)^3 \end{aligned}$$

נרצה שאנרגיית השגיאה היחסית תהיה קטנה מאשר 5%, כלומר

$$\frac{E_e}{E_f} < 0.05$$

לשם כך נחשב את אנרגיית האות המקורי:

$$E_F = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2} \int_0^{\omega_b} (1 - \omega)^2 d\omega = \frac{1}{3\pi}$$

ונקבל את התנאי הבא על תדר הדגימה

$$\frac{E_e}{E_f} < 0.05 \implies 2(1 - \omega_N)^3 < 0.05 \implies \omega_N > 1 - \sqrt[3]{0.025}$$

ואם נרצה לבטא תנאי זה כתלות בזמן הדגימה פשוט נשתמש בקשר

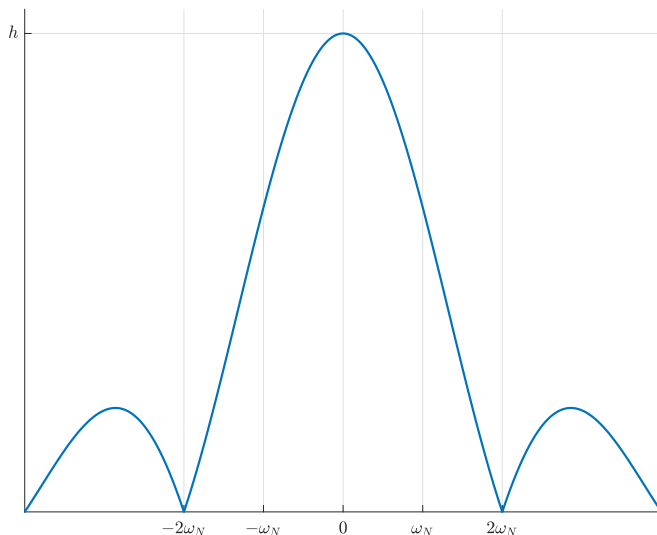
$$.h = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{\pi}{\omega_N}$$

▽

פתרון סעיף 4. הספקטרום של משחזר אידאלי הוא מסנן מעביר נמוכים אידאלי בגובה h וברוחב $2\omega_N$, לכן מעבר דרכו מתקן את האמפליטודה ומסנן את כל מה שמעבר לתדר נייקוויסט. בהרצאה ראיתם שמסנן זה אינו סיבתי, לכן נרצה להחליף אותו במשחזר אחר שיתנהג בצורה דומה ככל האפשר. מחזיק מסדר אפס בתחום הזמן מחזיק את הערך קבוע בין הדגימות השונות, בתחום התדר הוא בעל פונקציית תמסורת

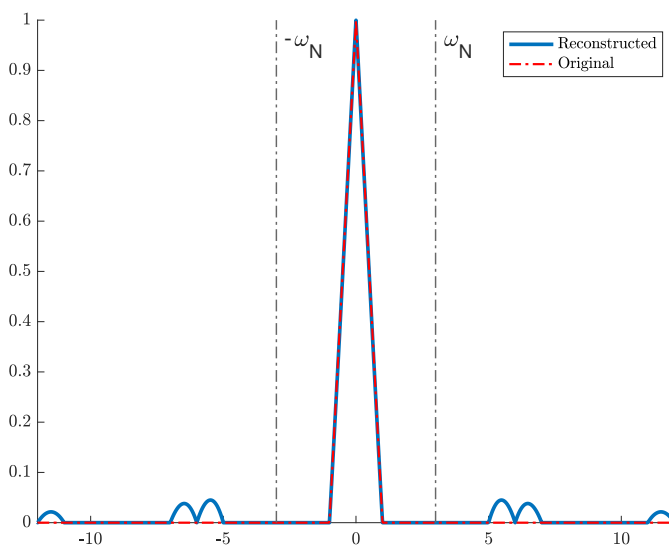
$$F_{\text{ZOH}}(s) = \frac{1 - e^{-sh}}{s}$$

והספקטרום שלו יראה כמו פונקציית sinc, כמתואר באיור 6 (חשבו על הקשר בין הספקטרום של מסנן מעביר נמוכים אידאלי לתגובת ההלם שלו בזמן).



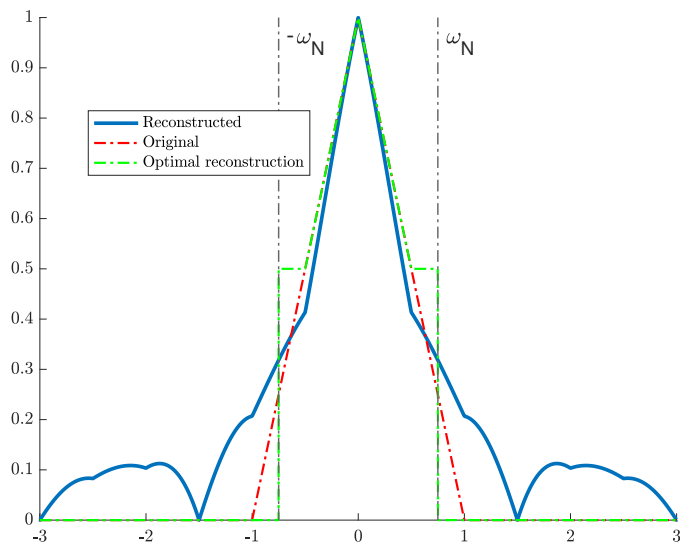
איור 6: ספקטרום של מחזיק מסדר אפס

אם נבצע את השיחזור בצורה זו לא נקבל שיחזור מדויק, אבל יתכן כי בתחום תדרים מסויים נקבל תוצאה טובה למדי, כפי שמודגם באיור 7.



איור 7: שחזור על ידי מחזיק מסדר אפס עם $\omega_N = 3$

במקרה זה ניתן לראות כי מתחת לתדר נייקוויסט השחזור כמעט מושלם, אך בתדרים גבוהים מופיעים רכיבים אשר לא שייכים לאות המקורי הנובעים מהאינטראקציה בין ההעתקים הנוצרים בתהליך הדגימה והספקטרום של המחזיק עצמו. שימו לב שלא מדובר בהתחזות תדרים, התחזות היא תולדה של הדגימה עצמה ותלויה בתדר נייקוויסט. לדוגמא באיור 8 מודגם שחזור עם תדירות נייקוויסט נמוכה מדי, ולכן בעל התחזויות. במקרה זה ניתן לראות התחזויות (נקודות



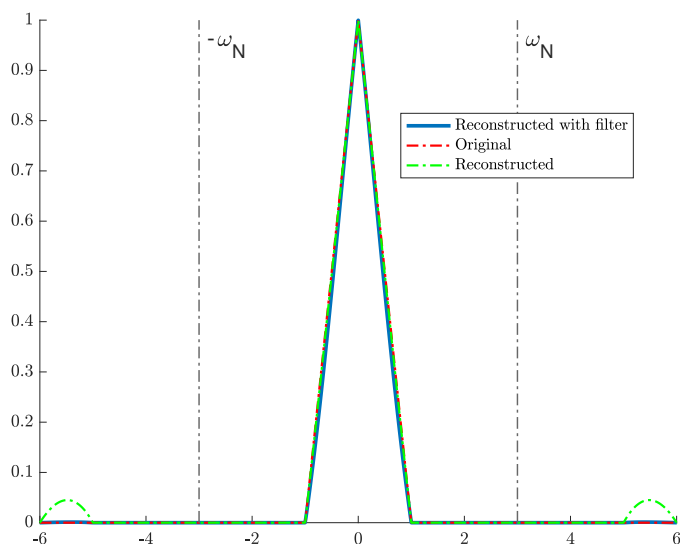
איור 8: שחזור על ידי מחזיק מסדר אפס עם $\omega_N = 0.75$

"שבירה" בספקטרום) הן בשחזור האופטימלי והן בשחזור עם מחזיק מסדר אפס, בנוסף לעיוות בספקטרום כתוצאה משימוש במשחזר שאינו אידאלי.

כיצר ניתן לשפר את השיחזור? נרצה להוסיף מסנן נוסף שמתקן את העיוות בתדרים נמוכים שנגרם כתוצאה מהשחזור הלא אידאלי וגם מנחית את הארטיפקטים בתדרים גבוהים. תיקונים שכאלו ניתן לעשות בעזרת מסננים אנלוגיים שונים וחיבורם בטור למעגל הדוגם-מחזיק. נבחן שוב את המקרה של $\omega_N = 3$, ונציע מסנן מהצורה

$$F_{LPF}(\omega) = \left(\frac{\omega_n}{j\omega + \omega_n} \right)^n$$

שחזור הספקטרום המקורי בעזר מחזיק מסדר אפס והמסנן שלעיל עבור הערכים $\omega_n = \omega_N$, $n = 5$ מתואר באיור 9 ואכן מביא לתוצאות טובות למדי. כיצד טיב השיחזור תלוי בפרמטרים של הפילטר, תדר נייקוויסט והספקטרום המקורי?



איור 9: שחזור על ידי מחזיק מסדר אפס עם $\omega_N = 3$ ומסנן נוסף

▽