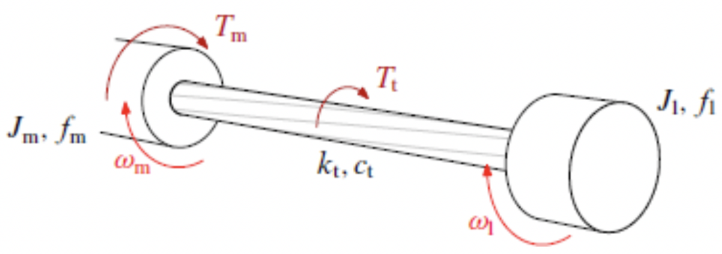
הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, הפקולטה להנדסת מכונות
TECHNION—Israel Institute of Technology, Faculty of Mechanical Engineering

תורת הבקרה (035188)

סמסטר אביב תשפ"ב

תרגול מס' 8

שאלה מס' 1



איור 1: מנוע חשמלי עם עומס גמיש

באיור 1 מופיע איור סכמטי של מנוע DC המניע עומס דרך תמסורת גמישה, משוואות התנועה הן

$$J_m\dot{\omega}_m + c_t\left(\omega_m - \omega_l\right) + k_t\left(\theta_m - \theta_l\right) = \tau_m$$
$$J_l\dot{\omega}_l - c_t\left(\omega_m - \omega_l\right) - k_t\left(\theta_m - \theta_l\right) = 0$$

כאשר J_m. הוא מומנט האינרציה של המנוע, J_l מומנט האינרציה של העומס ו־ k_t, c_t. הם מקדמי הריסון והקשיחות של התמסורת הגמישה. מימוש של המערכת במרחב המצב הוא

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_m(t) - \dot{\theta}_l(t)\\ \dot{\omega}_m(t)\\ \dot{\omega}_l(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -k_t/J_m & -c_t/J_m & c_t/J_m\\ k_t/J_l & c_t/J_l & -c_t/J_l\end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix}0\\ 1/J_m\\ 0\end{bmatrix}\tau_m(t)$$

ולאורך השאלה נשתמש בערכים המספריים

$$.J_m = 10/9,\ J_l = 10,\ k_t = 1,\ c_t = 0.1$$

1. נסחו בעיית LQR עבור הקריטריון

$$J = \int_0^\infty \omega_l^2(t) + \rho u^2(t)dt$$

בחנו את השפעת ρ על תגובת המערכת.

2. נסחו בעיית LQR עבור הקריטריון

$$J = \int_0^\infty k\omega_l^2(t) + (1-k)\dot{\omega}_l(t) + \rho u^2(t)dt$$

בחנו את השפעת הפרמטר k על תגובת המערכת.

3. נסחו בעיית LQR עבור הקריטריון

$$J=\int_0^\infty k\omega_l^2(t)+\sigma\dot{\omega}_l(t)+q\ddot{\omega}_l(t)+\rho u^2(t)dt$$

בחנו את תגובת המדרגה עבור ערכים שונים של הפרמטרים.

4. נסחו בעיית LQR עבור הקריטריון

$$J=\int_0^\infty \mathrm{e}^{2\alpha t}\left(0.1\omega_l^2(t)+0.9\dot{\omega}_l(t)+u^2(t)\right)dt$$

ציירו את תגובת המדרגה של החוג הסגור עבור ערכים שונים של α.

5. נסחו בעיית LQR עבור הקריטריון

$$J=\int_0^\infty (\omega_m(t)-\kappa\omega_l(t))^2+u^2(t)dt$$

ציירו את תגובת המדרגה של החוג הסגור עבור ערכים שונים של κ, השוו את הביצועים לעומת הקרטריון הראשון.

חזרה על משוב LQR

בקר LQR הוא משוב מצב המייצב את המערכת אסימפטוטית וממזער את פונקציית המחיר

$$J=\int_0^\infty \begin{pmatrix}x'(t) & u'(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q & S\\ S' & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ u(t)\end{pmatrix}dt=\int_0^\infty \big(x'Qx+x'Su+u'S'x+u'Ru\big)dt\,,$$

כאשר המטריצות Q,S,R הן פרמטרי תכן הממשקלים את מאמץ הבקרה, הצימוד בין וקטור המצב למאמץ הבקרה, ואת משתני המצב השונים, בהתאמה.. תחת שלוש ההנחות הבאות

1. הזוג (A,B) סטביליזבילי (מבטיח קיום של משוב מצב מייצב),
2. משקל אות הבקרה מוגדר חיובי, $R>0$, והמטריצה $Q-SR^{-1}S'\geq 0$ מוגדרת אי שלילית (מבטיח אות בקרה חסום,
3. לזוג

$$(A-BR^{-1}S,Q-SR^{-1}S')$$

אין מודים לא אובזרובילים על הציר המדומה (מבטיח שהבקר האופטימלי יחיד),

אזי המשוב האופטימלי נתון על ידי

$$u_{\text{OPT}}(t)=K_{\text{OPT}}x(t)=-R^{-1}\big(S'+B'\bar{X}\big)x(t)$$

כאשר $\bar{X}=\bar{X}'\geq 0$ הוא הפתרון המייצב של משוואת ריקאטי האלגברית

$$A'\bar{X}+\bar{X}A+Q-\big(S+\bar{X}B\big)R^{-1}\big(S'+B'\bar{X}\big)=0.$$

פתרון סעיף 1. במקרה שלנו פונקציית המחיר היא

$$J = \int_0^\infty \omega_l^2(t) + \rho u^2(t)dt = \int_0^\infty x_3'(t)x_3(t) + \rho u^2(t)dt$$

נשים לב כי

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \implies x_3'x_3 = x'(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) = x'(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

כלומר לפי התבנית נקבל את המחיר

$$.\begin{pmatrix} Q & S \\ S' & R \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \rho \end{array}\right)$$

$\triangledown$

פתרון סעיף 2. הפעם פונקציית המחיר נתונה על ידי

$$.J = \int_0^\infty k\omega_l^2(t) + (1-k)\dot{\omega}_l(t) + \rho u^2(t)dt$$

נשים לב כי האיבר הראשון זהה לאיבר הראשון בסעיף הקודם עד כדי כפל בקבוע והאיבר האחרון זהה לחלוטין, לכן נתמקד בלפשט את האיבר האמצעי הכולל את נגזרת משתנה המצב השלישי. ניעזר בפיתוח מהסעיף הקודם

$$\begin{aligned} \dot{x}_3'\dot{x}_3 &= \dot{x}'(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{x}(t) = \big(x'A' + u'B'\big)Q_1\big(Ax + Bu\big) \\ &= x'(A'Q_1A)x + x'(A'Q_1B)u + u'(B'Q_1A)x + u'(B'Q_1B)u \end{aligned}$$

אם נאסוף את כל האיברים לפי המכפילים שלהם נקבל

$$\begin{aligned} Q &= kQ_1 + (1-k)A'Q_1A \\ .S &= (1-k)A'Q_1B \\ R &= \rho + (1-k)B'Q_1B \end{aligned}$$

נשים לב כי במקרה שלנו מתקיים $Q_1B = 0$ ולכן איברי הצימוד נופלים כמו גם התוספת למשקל על אות הבקרה

$$.\begin{pmatrix} Q & S \\ S' & R \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ kQ_1 + (1-k)A'Q_1A & 0 \\ & 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & \rho \end{array}\right)$$

$\triangledown$

פתרון סעיף 3. הפעם פונקציית המחיר נתונה על ידי

$$J = \int_0^\infty k\omega_l^2(t) + \sigma\dot{\omega}_l(t) + q\ddot{\omega}_l(t) + \rho u^2(t)dt$$

נשים לב כי שוב יש לנו רק איבר אחד שונה מאשר הסעיף הקודם, לכן נתמקד בו. נפשט אותו באותה הצורה שפישטנו את הנגזרת הראשונה

$$\begin{aligned} \ddot{x}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ddot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \big(A\dot{x} + B\dot{u}\big) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \big(A\big(Ax + Bu\big) + B\dot{u}\big) \end{aligned}$$

כזכור

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B = 0$$

ולכן האיבר המכיל את הנגזרת של אות הבקרה נופל. מכאן נקבל

$$\begin{aligned}\ddot{x}_3'\ddot{x}_3 &= \ddot{x}'(t)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ddot{x}(t) = \big(x'(A^2)'+u'B'A'\big)Q_1\big(A^2x+ABu\big)\\ &= x'((A^2)'Q_1(A^2))x + x'((A^2)'Q_1AB)u + u'(B'A'Q_1A^2)x + u'(B'A'Q_1AB)u\end{aligned}$$

אם נאסוף את כל האיברים לפי המכפילים שלהם נקבל

$$\begin{aligned}Q &= kQ_1 + \sigma A'Q_1A + q((A^2)'Q_1A^2)\\ S &= q((A^2)'Q_1AB\\ R &= \rho + q(B'A'Q_1AB)\end{aligned}.$$

$\triangledown$

פתרון סעיף 4. הפעם פונקציית המחיר נתונה על ידי

$$J = \int_0^\infty \mathrm{e}^{2\alpha t}\left(0.1\omega_l^2(t) + 0.9\dot{\omega}_l(t) + u^2(t)\right)dt$$

שזה מקרה פרטי של המחיר מסעיף 2 עם אילוץ על מהירות הדעיכה. כזכור מההרצאה אילוץ שכזה לא משפיע על המחיר, אלא על שקול לפתרון של משוואת ריקאטי עבור

$$\tilde{A} = \alpha I + A$$

ולכן המחיר יהיה זהה לסעיף 2 אך משוואת ריקאטי אותה עלינו לפתור תהיה שונה. $\triangledown$