הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, הפקולטה להנדסת מכונות

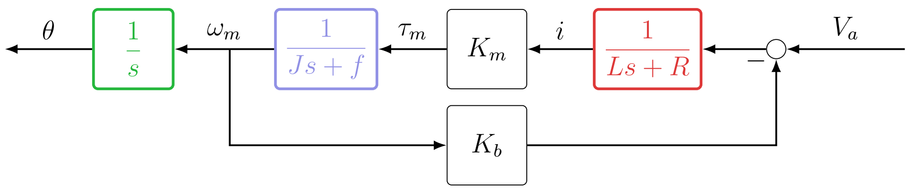
TECHNION—Israel Institute of Technology, Faculty of Mechanical Engineering

תורת הבקרה (035188)

סמסטר אביב תשפ"ג

תרגול מס' 8

שאלה מס' 1



איור 1: דיאגרמת בלוקים של מנוע חשמלי

באיור 1 מופיעה דיאגרמת בלוקים של מנוע DC, המורכבת מחלק חשמלי, חלק מכאני ואינטגטור, המסומנים באדום, כחול, וירוק בהתאמה.

1. כיתבו מימוש פיזיקלי למערכת, וייצגו את הכא"מ החוזר בתור משוב מצב.
2. האם ניתן למקם את קטבי החוג באופן שרירותי? באם כן תכננו למערכת משוב מצב הממקם את קטבי החוג הסגור ב
$$\lambda_{1,2,3} = \frac{-R}{L}, \frac{-f}{J}, -3$$
בעזרת נוסחת אקרמן.
3. חזרו על הסעיף הקודם מבלי להשתמש בנוסחת אקרמן (רמז: השתמשו במבנה המימוש).
4. ביחנו את תגובת המערכת עבור שלושה מקרים

$$\chi_{\mathrm{cl}}(s) = (s+R/L)(s+f/J)(s+3), \quad \chi_{\mathrm{cl}}(s) = (s+3)^3, \quad \chi_{\mathrm{cl}}(s) = (s+R/L)(s^2+1.9731s+1.5208)$$

בחנו גם את אות הבקרה וגם את היציאה. הסבירו את התוצאות.

פתרון סעיף 1. ראשית נבחן את המערכת שלנו. אם לא היה כא"מ חוזר, המערכת הכוללת הייתה מורכבת פשוט משלוש מערכות דינאמיות מחוברות בטור, על הכא"מ החוזר ניתן לחשוב כעל הפרעה המשפיעה על אות הבקרה V_a הנכנס אל המערכת הטורית. לכן מימוש פיזיקלי נוח הוא לבנות פשוט את המימוש הטורי של שלוש המערכות, ואז לצרף את השפעת הכא"מ. לשם כך, נבנה מימוש לכל חלק דינמי בנפרד, ואז נחבר בטור את המימוש. מימוש לחלק החשמלי:

$$P_e(s) = \frac{k_m}{Ls+R} = \frac{k_m/L}{s+(R/L)} \implies \begin{cases} \dot{x}_e(t) & = -\frac{R}{L}x_e(t) + (k_m/L)u(t) \\ \tau_m(t) & = x_e(t) \end{cases}$$

כאשר במקרה הזה $u = V_a + V_b$. נשים לב כי הכא"מ החוזר הוא משוב המשתמש במהירות הזוויתית, לכן נבחר משתנה זה בתור משתנה המצב של מימוש החלק המכאני

$$P_m(s) = \frac{1}{Js+f} = \frac{1/J}{s+(f/J)} \implies \begin{cases} \dot{x}_m(t) & = -\frac{f}{J}x_m(t) + (1/J)\tau_m(t) \\ \omega_m(t) & = x_m(t) \end{cases}$$

נחבר את שתי המערכות בטור

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_e(t)\\ \dot{x}_m(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-R/L & 0\\ 1/J & -f/J\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_e(t)\\ x_m(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}k_m/L\\ 0\end{bmatrix}u(t)\\ \\ \omega_m(t) &= \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_e(t)\\ x_m(t)\end{bmatrix}\end{cases}$$

ולבסוף נחבר אליהן את האינטגרטור בטור

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_e(t)\\ \dot{x}_m(t)\\ \dot{x}_\theta(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-R/L & 0 & 0\\ 1/J & -f/J & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_e(t)\\ x_m(t)\\ x_\theta(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}k_m/L\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u(t)\\ \\ \theta(t) &= \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_e(t)\\ x_m(t)\\ x_\theta(t)\end{bmatrix}\end{cases}.$$

את המשוב הפנימי שנובע מהכא"מ המושרה ניתן לתאר בתור משוב מצב חלקי מהצורה

$$V_b(t) = -\begin{bmatrix}0 & k_b & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_e(t)\\ x_m(t)\\ x_\theta(t)\end{bmatrix}$$

לכן המימוש שהמלא של המערכת זהה לזה שלעיל עבור מטריצה A הנתונה על ידי

$$A_{\text{tot}} = A + BV_b = \begin{bmatrix}-R/L & -(k_bk_m)/L & 0\\ 1/J & -f/J & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

כלומר

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_e(t)\\ \dot{x}_m(t)\\ \dot{x}_\theta(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-R/L & -(k_bk_m)/L & 0\\ 1/J & -f/J & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_e(t)\\ x_m(t)\\ x_\theta(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}k_m/L\\ 0\\ 0\end{bmatrix}V_a(t)\\ \\ \theta(t) &= \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_e(t)\\ x_m(t)\\ x_\theta(t)\end{bmatrix}\end{cases}$$

$\triangledown$

פתרון סעיף 2. על מנת למקם את קטבי החוג באופן שרירותי על המערכת להיות קונטרולבילית, זה גם תנאי לשימוש בנוסחת אקרמן. נחשב את מטריצת הקונטרולביליות של המערכת

$$M_c = \frac{k_m}{JL}\begin{bmatrix}J & -RJ/L & (JR^2 - Lk_bk_m)/L^2\\ 0 & 1 & -(fL+RJ)/(JL)\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

וזו מטריצה מדרגה מלאה כל עוד הפרמטרים שונים מאפס, לכן המערכת קונטרולביליות וניתן למקם את הקטבים באופן שרירותי. נוסחת אקרמן נתונה על ידי

$$K = -\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}M_c^{-1}\chi_{\text{cl}}(A)$$

כאשר $\chi_{\rm cl}(A)$ הוא הפולינום האופייני הרצוי כאשר המטריצה A מוצבת בו בתור משתנה, שימו לב כי נוסחת אקרמן לא באמת משתמשת בכל המטריצה M_c^{-1} אלא בשורה האחרונה שלה בלבד. היות ומטריצת הקונטרולביליות היא משולשת עליונה גם ההופכית שלה היא משולשת עליונה, לכן אין לנו צורך להפוך את כל המטריצה שכן

$$\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix} M_c^{-1} = \left(\frac{k_m}{JL}\right)^{-1} \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

מכאן לפי נוסחת אקרמן ההגבר הדרוש על מנת למקם את הקטבים הוא

$$K = -\frac{JL}{k_m}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}(A_{\rm tot} + (R/L)I)(A_{\rm tot} + (f/J)I)(A_{\rm tot} + 3I) = \ldots = \frac{1}{k_m}\begin{bmatrix}-3L & k_b k_m - 3JR & -3Rf\end{bmatrix}$$

וחוק הבקרה המתקבל הוא

$$V_a(t) = \frac{-3L}{k_m}\tau_m(t) + \frac{k_b k_m - 3JR}{k_m}\omega_m(t) + \frac{-3Rf}{k_m}\theta(t)$$

כנדרש. $\triangledown$

פתרון סעיף 3. נשים לב כי למעשה התבקשנו לבטל את השפעת הכא"מ החוזר ולהזיז רק את הקוטב של האינטגרטור. אפשר בקלות לתכנן משוב מצב עבור המקרה הזה בלי להתחשב בכא"מ החוזר, כל מה שצריך לעשות זה לתכנן משוב עבור המערכת הטורית, $\tilde{K}$, ולהוסיף איבר שיבטל את השפעת הכא"מ ־ כלומר ההגבר הכולל יהיה מהצורה

$$K = \tilde{K} + \begin{bmatrix}0 & k_b & 0\end{bmatrix}.$$

אבחנה שנייה היא כי היות והמערכת המקורית קונטרולבילית, אם נעביר את המטריצה A לצורה בלוק אלכסונית כאשר המוד בראשית נמצא בבלוק השני, אז נוכל להשתמש פשוט בהגבר מהצורה

$$K = \begin{bmatrix}0 & K_1\end{bmatrix}$$

על מנת להזיז רק את הקוטב בבלוק התחתון. שימו לב כי זה אפשרי גם עבור מימוש משולש בהנחה והמודים קונטרולביליים בנפרד ובסדר הנכון. במקרה הנדון קל מאוד לחשב טרנספורמציה מתאימה, לדוגמא

$$T = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{L}{Rf} & \frac{J}{f} & 1\end{bmatrix} \implies A_t = TAT^{-1} = \begin{bmatrix}-R/L & 0 & 0\\ 1/J & -f/J & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad B_t = TB = \begin{bmatrix}k_m/L\\ 0\\ k_m/(Rf)\end{bmatrix}.$$

המוד אותו אנחנו רוצים להזיז נמצא בבלוק התחתון לכן עבור משוב מהצורה לעיל נקבל מטריצת חוג סגור

$$A_t + B_t\begin{bmatrix}0 & 0 & K_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-R/L & 0 & (k_m/L)K_1\\ 1/J & -f/J & 0\\ 0 & 0 & (k_m/Rf)K_1\end{bmatrix}$$

שגם היא משולשת, והערכים העצמיים שלה נתונים על ידי

$$\lambda_{1,2,3} = \frac{-R}{L}, \frac{-f}{J}, \frac{k_m}{Rf}K_1.$$

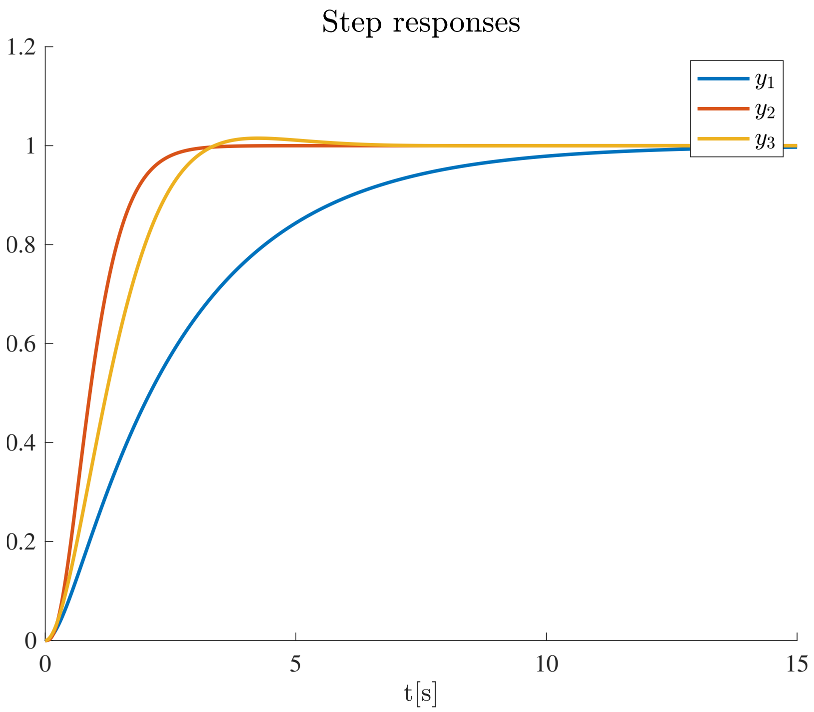
כעת נשתמש בטרנספורמציה חזרה לקוארדינטות המקוריות ונאפס את השפעת הכא"מ, כלומר הגבר המשוב שלנו הוא

$$K = -\begin{bmatrix}0 & 0 & -3\frac{Rf}{k_m}\end{bmatrix}T + \begin{bmatrix}0 & k_b & 0\end{bmatrix} = \frac{1}{k_m}\begin{bmatrix}-3L & k_b k_m - 3JR & -3Rf\end{bmatrix}$$

בדיוק כפי שקיבלנו בעזרת נוסחת אקרמן. $\triangledown$

פתרון סעיף 4. נבחן את התנהגות היציאה בתגובה לכניסת מדרגה באות הייחוס ואת התנהגות אות הבקרה בתגובה לאותה הכניסה, עבור הפרמטרים

$$k_m = k_b = 0.0396, \quad J = 0.125, \quad f = 0.05, \quad R = 6.8, \quad L = 2.65\times 10^{-4},$$



איור 2: השוואה בין היציאות

סימולציה של תגובות המערכת מוצגת באיור 2 . ניתן לראות כי תגובת המערכת עבור המקרה בו הזזנו רק את הקוטב בראשית היא האיטית ביותר, ובאופן לא מפתיע התגובה היחידה בעלת תגובת יתר היא זו אשר מכילה קטבים מרוכבים. יחד עם זאת, תגובת המערכת עם זוג הקטבים המרוכבים עדיין מהירה יחסית שכן לפי הקשרים הידועים למערכת מסדר שני

$$\mathrm{OS} = \mathrm{e}^{-\pi\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \implies \mathrm{OS} \approx 0.01$$

וגם

$$t_{\mathrm{r}} = \frac{1}{\omega_{\mathrm{n}}}\left(1.6\zeta^3 - 0.17\zeta^2 + 0.92\zeta + 1.02\right) \approx 2[\mathrm{s}]$$

אומנם במקרה זה לחוג הסגור יש שלושה קטבים, אבל הקוטב של החלק החשמלי כצפוי מהיר ביותר

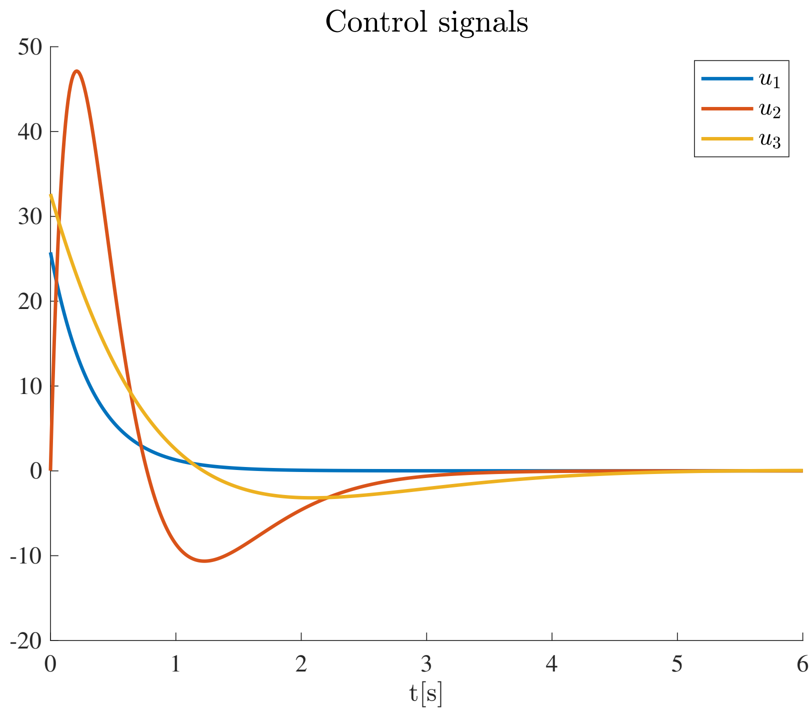
$$\lambda_e = -2.566 \times 10^4$$

ולכן המערכת פועלת בקירוב לפי שני הקטבים הנותרים. נבחן את התנהגות אות הבקרה, כמתואר באיור 3. כצפוי החוג הסגור הראשון והאיטי ביותר דורש את מאמץ הבקרה הנמוך ביותר, אבל נשים לב כי יש הבדלים מהותיים בין התנהגות אות הבקרה בין המקרים השני והשלישי. עבור מקרה 2 בו מיקמנו את כל קטבי החוג הסגור באותה הנקודה, $\lambda = -3$, התקבל אות בקרה המתחיל מאפס, תונד מאוד ולבסוף מתכנס. עבור הקטבים המרוכבים לעומת זאת קיבלנו אות בקרה שמתחיל גבוה יחסית, $u_3(0) \approx 24.2$, ומתכנס לאפס בלי תנודות כלל. כדי להסביר זאת, התבוננו בפונקציית התמסורת מאות היחוס לאות הבקרה

$$T_{\mathrm{ur}}(s) = \frac{k_r D_P(s)}{\chi_{\mathrm{cl}}(s)},$$

קטביה הם אכן קטבי החוג הסגור, אבל אפסיה הם קטבי התהליך המקורי. כאשר מיקמנו את כל קטבי החוג בנקודה אחת שמאלית יותר מאשר שני הקטבים המקוריים, (האינטגרטור והקוטב המכאני) למעשה יצרנו שני אפסים דומיננטיים הגורמים לתנודות. יחד עם זאת, האפס שנגרם מהקוטב החשמלי רחוק מאוד מהקטבים החדשים, כלומר ישנו תחום תדרים רחב יחסית בו למערכת יש roll-off של 1 . היות וההגבר בתדרים גבוהים פרופורציונאלי לערך ההתחלתי של אות הבקרה, במקרה זה נקבל כי אות הבקרה יתחיל סביב אפס, אבל יתנוד כתוצאה מהאפסים.

בשני המקרים האחרים לא הזזנו את הקוטב החשמלי כלל, כלומר הוא יצטמצם מפונקציית התמסורת של אות הבקרה, ובחרנו את שאר קטבי החוג הסגור לא שמאלה מדי בייחס לקטבי החוג הפתוח. במקרה הראשון למעשה אנחנו כמעט ומצמצמים את הקוטב המכאני, והדבר היחיד שמונע זאת הוא השפעת הכא"מ החוזר. במקרה זה קירוב



איור 3: השוואה בין אותות הבקרה

טוב לפונקציית התמסורת של אות הבקרה הוא

$$T_{\mathrm{ur},1}(s) \approx \frac{k_{r,1} s}{s+3}$$

הגוזר אכן דומיננטי, אבל שאר האפסים אפקטיבית צומצמו, לכן לא נקבל תנודות. יחד עם זאת, במקרה זה אין לנו תחום תדרים בו יש roll-off, לכן הגבר אות הבקרה בזמן אפס יהיה גבוה יחסית. במקרה האחרון אין דומיננטיות ברורה בין הקטבים המקוריים של התהליך לבין הזוג המרוכב שנבחר, אבל גם פה אין תחום תדרים עם roll-off, לכן אות הבקרה יתחיל מהגבר גבוה יחסית ולאחריו ידעך. ▽