הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, הפקולטה להנדסת מכונות

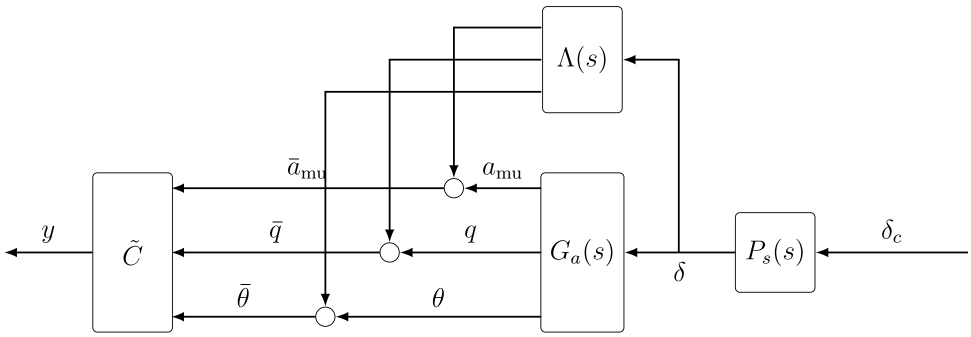
TECHNION—Israel Institute of Technology, Faculty of Mechanical Engineering

תורת הבקרה (035188)

סמסטר אביב תשפ"ג

תרגול מס' 7

שאלה מס' 1



איור 1: המערכת בשאלה 1

באיור 1 נתון חלק ממידול של טיל במעופו. האות δ_c הוא פקודת הזווית לכנפוני היגוי של הטיל, פונקציית התמסורת $P_s(s)$ היא מערכת מסדר ראשון המהווה מודל מפושט של דינמיקת המפעיל של הכנפונים, והמערכת $G_a(s)$ היא המודל הפיזיקלי של הטיל, המקשרת בין זווית הכנפונים לבין תאוצת ה IMU, המהירות הזוויתית של גוף הטיל, וזווית גוף הטיל, בהתאמה. בעיה מוכרת במערכות תעופתיות, ובטילים בפרט, היא השפעתם של מודים מבניים (Structural modes) המרעידים את גוף הטיל על מדידות החיישנים השונים. השפעתם של מודים אלו על שלוש המדידות ממודלת בעזרת פונקציית התמסורת,

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} k_a \omega_0^2 s^2 \\ k_q \omega_0 s \\ k_\theta \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

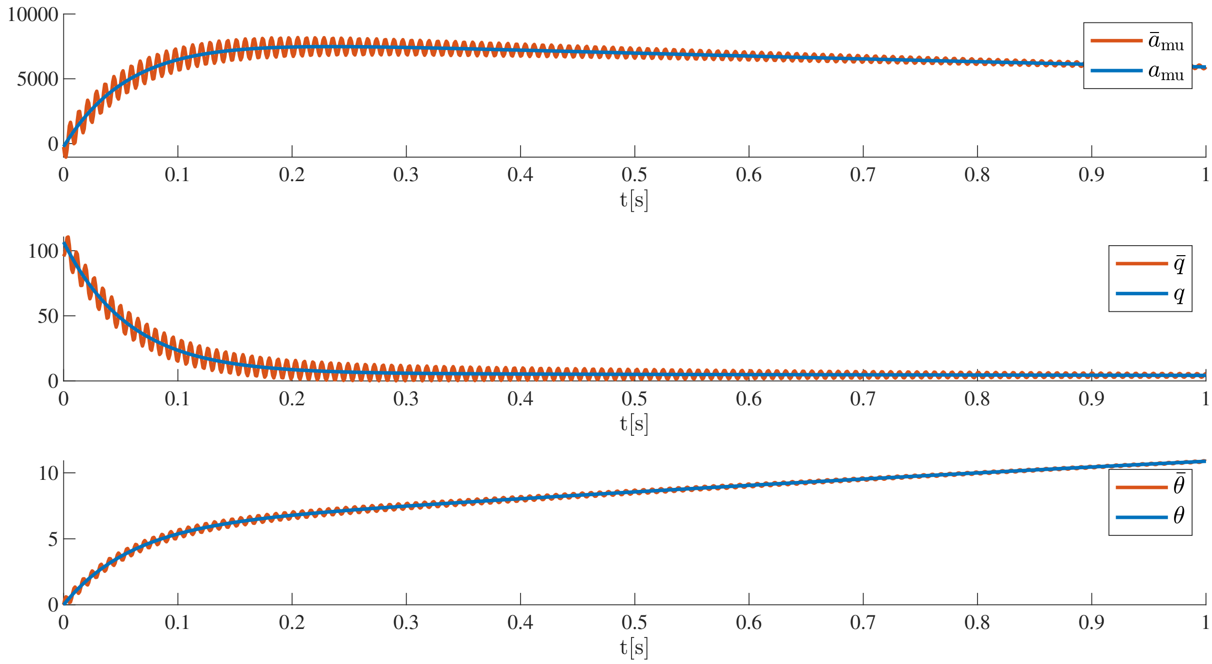
כאשר ω_0 הוא תדר המוד המבני, ζ ריסונו, וההגברים הם הקבועים הרוונטיים. הבלוק $\tilde{C}$ הוא מטריצה סטטית המגדירה איזה שילוב של האותות מגיע לבקר. השפעתם המודים המבניים על חוגי בקרת הטיסה מוסיפה רעש מדידה למערכת, כלומר גם אם הבקר לא נדרש לבקר אותם, השפעתם תופיע במדידה ותגרום להם לתנוד. ניתן לראות השפעה זו באופן איכותי באיור 2, המציג את תגובת האותות השונים לכניסה כלשהי ב $\delta_c(t)$.

1. בהנחה כי דינמיקת המפעיל נתונה על ידי מודל מסדר ראשון $P_s(s) = 1/(\tau s + 1)$, כיתבו מימושים במרחב המצב למפעיל ול $\Lambda(s)$.

2. כיתבו מימוש במרחב המצב למערכת הכוללת.

3. האם ניתן לבחור את המטריצה $\tilde{C}$ בצורה כזו שתבטל את השפעת המודים המבניים על המדידה?

4. באם התשובה חיובית, בחרו את המטריצה בצורה מתאימה.



איור 2: השוואה בין תגובת המערכת עם המודים המבניים ובלעדיהם

פתרון סעיף 1. דינמיקת המפעיל היא מסדר ראשון, לכן מימוש במרחב המצב הוא מיידי

$$\delta(s)=\frac{1}{\tau s+1}\delta_c(s)=\left[0+\frac{1}{\tau}\cdot\left(s-\frac{-1}{\tau}\right)^{-1}1\right]\delta_c(s)\implies\begin{cases}\dot{x}_\delta(t) &= -\frac{1}{\tau}x_\delta(t)+\delta_c(t)\\ \delta(t) &= \frac{1}{\tau}x_\delta(t)\end{cases}$$

עבור דינמיקת המודים המבניים המצב טיפה יותר מסובך. נשים לב כי קטבי כל איבר זהים, והשוני בין כל התמסורות הוא רק במספר הגוזרים. ראשית נבנה מימוש מלווה לאיבר השלישי

$$\begin{cases}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & -2\zeta\omega_0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\delta(t)\\ \\ y(t) &= \begin{bmatrix}k_\theta & 0\end{bmatrix}x(t)\end{cases}=\begin{cases}\dot{x}(t) &= Ax(t)+B\delta(t)\\ \\ y(t) &= Cx(t)\end{cases}$$

כאשר את מימוש האיברים האחרים נוכל לקבל בעזרת גזירה ושינוי הקבוע במונה בלבד. כזכור מההרצאה מתקיים

$$s(sI-A)^{-1}=I+A(sI-A)^{-1},$$

לכן עבור האיבר השני נקבל

$$sC(sI-A)^{-1}B=CB+CA(sI-A)^{-1}B$$

ובהתאמה עבור האיבר השלישי

$$s^2C(sI-A)^{-1}B=sCB+CAB+CA^2(sI-A)^{-1}B.$$

למערכת המקורית שני קטבים בלבד וללא אפסים, לכן פרמטר מרקוב שלה עבור חזקה קטנה מ $2-1=1$ שווה לאפס, לכן

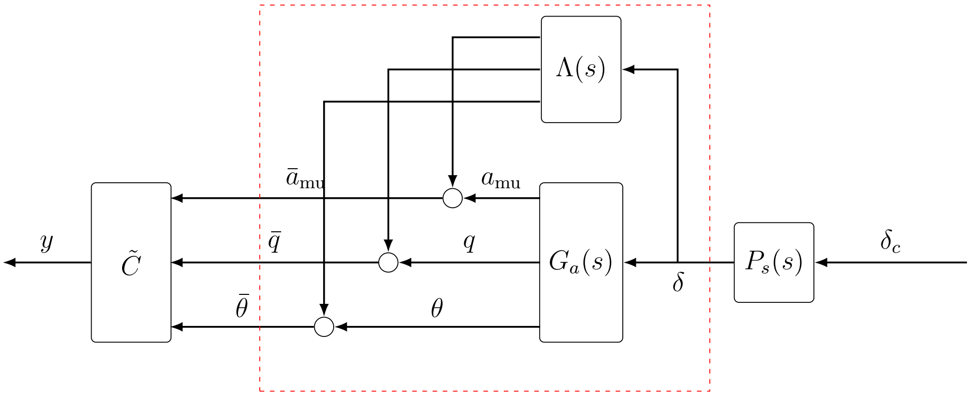
$$sCB+CAB+CA^2(sI-A)^{-1}B=sCA^0B+CAB+CA^2(sI-A)^{-1}B=CAB+CA^2(sI-A)^{-1}B.$$

למערכת כניסה אחת ושלוש יציאות, אם נחבר את שלושת המימושים נקבל

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \frac{k_a\omega_0^2}{k_\theta}CAB \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_a\omega_0^2}{k_\theta}CA^2 \\ \frac{k_q\omega_0}{k_\theta}CA \\ C \end{bmatrix}(sI-A)^{-1}B$$

כאשר המטריצות A, B ו־ C הן המטריצות מהמימוש המלווה מתחילת הסעיף. $\triangledown$

פתרון סעיף 2.



איור 3: פישוט המערכת בשאלה 1

ניתן לבנות מימוש מורחב באופן דומה למימוש שבנינו בתרגול הקודם, אך הפעם יש דרך קצרה יותר. נשים לב כי דינמיקת הטיל ודינמיקת המודים המבניים מחוברים בחיבור מקבילי פשוט, כמתואר בריבוע האדום באיור 3, כאשר המפעיל מחובר אליהם בחיבור טורי, כלומר המערכת כולה נתונה על ידי

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_{\text{mu}} \\ \bar{q} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = (G_a(s)+\Lambda(s))\,P_s(s)\delta_c\ .$$

בהרצאה ראיתם נוסחאות סגורות לחיבור טורי ומקבילי של מערכות במרחב המצב, עבור חיבור מקבילי

$$G_1+G_2\ :\ \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}u(t) \\ \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + (D_1+D_2)u(t) \end{cases}$$

ועבור חיבור טורי

$$G_2G_1\ :\ \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix}u(t) \\ \\ y(t) &= \begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + D_2D_1u(t) \end{cases}.$$

חשוב לשים לב כי יש משמעות לסדר! בביטוי לעיל עבור חיבור טורי האות נכנס למערכת G_1 והיציאה מ G_1 היא האות הנכנס ל G_2. כאשר עובדים עם מערכות בעלות יותר מכניסה ויציאה אחת היפוך הסדר לא תמיד מוגדר, כמו במקרה זה, ובאופן כללי $G_1G_2 \neq G_2G_1$.

תחילה נחבר את שתי המערכות המחוברות במקביל, במקרה זה אין משמעות לסדר, ונקבל

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{G_a}(t) \\ \dot{x}_\Lambda(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} A_{G_a} & 0 \\ \hdashline 0 & A_\Lambda \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_{G_a}(t) \\ \hdashline x_\Lambda(t) \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} B_{G_a} \\ \hdashline B_\Lambda \end{array}\right] \delta(t) \\ \begin{bmatrix} \bar{a}_{\mathrm{mu}}(t) \\ \bar{q}(t) \\ \bar{\theta}(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} C_{G_a} & C_\Lambda \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_{G_a}(t) \\ \hdashline x_\Lambda(t) \end{array}\right] + (D_{G_a} + D_\Lambda)\,\delta(t) \end{cases}$$

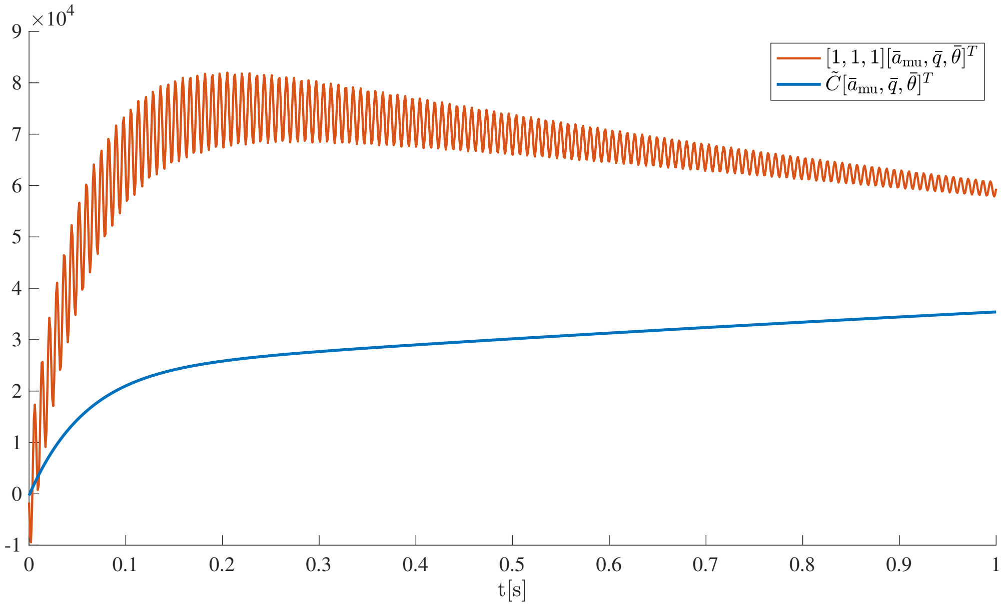
כעת כל שנותר זה לחבר את המערכת החדשה עם מימוש המפעיל בטור, חשוב לשים לב כי הכניסה למערכת היא האות $\delta_c(t)$, כניסה זו נכנסת קודם כל למפעיל ורק אז לדינמיקת הטיל. נציב בנוסחא ונקבל

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_{G_a}(t) \\ \dot{x}_\Lambda(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:cc} A_P & 0 & 0 \\ \hdashline B_{G_a}C_P & A_{G_a} & 0 \\ B_\Lambda C_P & 0 & A_\Lambda \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_p(t) \\ \hdashline x_{G_a}(t) \\ x_\Lambda(t) \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} B_P \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{array}\right] \delta_c(t) \\ \begin{bmatrix} \bar{a}_{\mathrm{mu}}(t) \\ \bar{q}(t) \\ \bar{\theta}(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:cc} (D_{G_a} + D_\Lambda)C_P & C_{G_a} & C_\Lambda \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_p(t) \\ \hdashline x_{G_a}(t) \\ x_\Lambda(t) \end{array}\right] \end{cases}$$

וזהו מימוש המערכת הכוללת. ▽

פתרון סעיף 3. אנו רוצים ל"נקות" את המדידה הרצויה מהשפעות המוד המבני, מה הכוונה? היזכרו בדוגמת שתי המסות מההרצאה, שם עבור בחירת יציאה (מדידה) שונה התקבלו פונקציות תמסורת שונות עם קטבים שונים. לדוגמא כאשר בחרתם את היציאה בתור סכום התזוזות של שתי המסות, דבר השקול לבחינת מרכז המאסה של המערכת, לא ניתן היה לראות תנודות כלל. פרמטר הכיוונון שלנו, המטריצה $\tilde{C}$, מחוברת בטור למימוש הכולל מהסעיף הקודם, כלומר היא מייצרת "ערבוב" של המדידות השונות במערכת. אם נצליח לבחור אותה כך ששני המודים המבניים הלא מרוסנים אינם אובסרבביליים דרך y, לא נראה את השפעת התנודות ביציאה, בדיוק כמו במקרה של שתי המסות.

שימו לב כי לא כל ערבוב של מדידות ינקה את המודים המבניים מהיציאה. לדוגמא באיור 4 מוצגים שני עירבובים שונים, פעם אחת כאשר $\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, כלומר ניתן משקל שווה לכל מדידה, ובכחול ערבוב אשר הופך את המוד המבני ללא אובסרבבילי, כפי שיוסבר בסעיף הבא.



איור 4: שני ערבובי מדידות

▽

פתרון סעיף 4. על מנת להפוך את המודים המבניים ללא אובסרבבילים, ראשית עלינו למצוא את הוקטורים העצמיים הימניים השייכים להם במערכת הכוללת. ממבחן PBH אנו יודעים כי המערכת עשויה לאבד אובסרבביליות (או קונטרולביליות) אך ורק עבור הערכים העצמיים של מטריצת A של המימוש. נשים לב כי מטריצת A של המימוש הכולל היא בלוק משולשת תחתונה, ואנו מעוניין בוקטורים עצמיים הרלוונטיים רק לבלוק האלכסוני התחתון, ואפילו רק לתת הבלוק השני באלכסון. מכאן אנו יודעים שהערכים העצמיים של A_Λ הם גם ערכים עצמיים של המטריצה הכוללת, והוקטורים העצמיים שלהם מקיימים

$$\left[\begin{array}{c:cc}\lambda I-A_P & 0 & 0\\ \hdashline -B_{G_a}C_P & \lambda I-A_{G_a} & 0\\ -B_\Lambda C_P & 0 & \lambda I-A_\Lambda\end{array}\right]\begin{bmatrix}0\\ \hdashline 0\\ \eta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\(\lambda I-A_\Lambda)\,\eta\end{bmatrix},$$

כלומר ניתן למצוא אותם בעזרת חישוב וקטורים עצמיים של מערכת מסדר שני בלבד. נחפש את הוקטורים העצמיים עבור המטריצה הנתונה

$$\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ \omega_0^2 & \lambda+2\zeta\omega_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=0\implies \lambda x_1=x_2$$

הערכים העצמיים של המערכת ידועים והם זוג צמוד מרוכב, נבחר בלי הגבלת הכלליות $x_2=1$ ונקבל את הוקטורים העצמיים הבאים

$$\eta_{1,2}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_{1,2}}\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}}{\omega_0}\\ 1\end{bmatrix}.$$

אנו רוצים שמבחן PBH לאובסרבביליות יכשל עבור המודים המבניים התונדים, כלומר אנו רוצים לכוונן את $\tilde{C}$ כך שיתקיים

$$\tilde{C}\begin{bmatrix}(D_{G_a}+D_\Lambda)C_P & C_{G_a} & C_\Lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\eta_{1,2}\end{bmatrix}=0$$

עבור הוקטורים העצמיים שמצאנו. אילוץ זה לא תלוי כלל בדינמיקת המפעיל או הטיל, לכן ניתן לפשט את הבעיה לשני ממדים בלבד

$$\tilde{C}\begin{bmatrix}\frac{k_a\omega_0^2}{k_\theta}CA^2\\ \frac{k_q\omega_0}{k_\theta}CA\\ C\end{bmatrix}\eta=\tilde{C}\begin{bmatrix}-k_a\omega_0^4 & -2k_a\zeta\omega_0^3\\ 0 & k_q\omega_0\\ k_\theta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}}{\omega_0}\\ 1\end{bmatrix}=\tilde{C}\begin{bmatrix}-k_a\omega_0^3(\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1})\\ k_q\omega_0\\ -\frac{k_\theta}{\omega_0}\left(\zeta\mp\sqrt{\zeta^2-1}\right)\end{bmatrix}=0$$

היות והמוד תת מרוסן אנו יודעים כי $\sqrt{\zeta^2-1}=\mathrm{j}\sqrt{1-\zeta^2}$, הקואורדינטה האמצעית ממשית תמיד והשתיים האחרות מרוכבות אך בעלות חלקים מדומים זהים עד כדי קבוע, לכן מספיקות לנו שתי דרגות חופש על מנת לפתור את הבעיה. נבחר

$$\tilde{C}=\begin{bmatrix}1 & \sigma_1 & \sigma_2\end{bmatrix}$$

ונפתור את המשוואה הנל בצורה פרמטרית

$$\begin{bmatrix}1 & \sigma_1 & \sigma_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-k_a\omega_0^3(\zeta\pm\mathrm{j}\sqrt{1-\zeta^2})\\ k_q\omega_0\\ -\frac{k_\theta}{\omega_0}\left(\zeta\mp\mathrm{j}\sqrt{1-\zeta^2}\right)\end{bmatrix}=-k_a\omega_0^3(\zeta\pm\mathrm{j}\sqrt{1-\zeta^2})+\sigma_1k_q\omega_0-\sigma_2\frac{k_\theta}{\omega_0}\left(\zeta\mp\mathrm{j}\sqrt{1-\zeta^2}\right)=0$$

נקבל שתי משוואות, אחת עבור החלק הממשי ואחת עבור החלק המדומה

$$\begin{cases}-k_a\omega_0^3\zeta+\sigma_1k_q\omega_0-\sigma_2\frac{k_\theta}{\omega_0}\zeta=0\\ \mp k_a\omega_0^3\sqrt{1-\zeta^2}\pm\sigma_2\frac{k_\theta}{\omega_0}\sqrt{1-\zeta^2}=0\end{cases}$$

לאחר סידור נקבל ביטויים אנליטיים כתלות בפרמטרי המערכת

$$\begin{cases}\sigma_1=\frac{2k_a\omega_0^2\zeta}{k_q}\\ \sigma_2=\frac{k_a}{k_\theta}\omega_0^4\end{cases}.$$

תוך שימוש בנוסחאות אלו נוכל לקבל יציאה שלא מושפעת מהמוד המבני התונד כפי שרצינו, אך "נשלם" על כך באיבוד דרגות חופש לבקרה שכן כעת זמינה לנו רק המדידה המעורבבת ולא שלוש המדידות הנפרדות. $\triangledown$