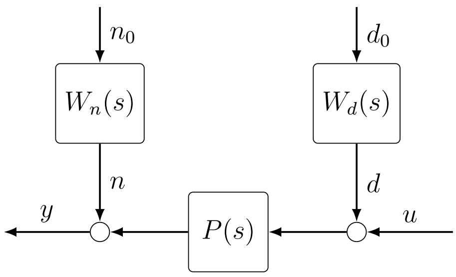
תורת הבקרה (035188)

סמסטר אביב תשפ"ג

תרגול מס' 6

שאלה מס' 1



איור 1: המערכת בשאלה 1

נתונה המערכת באיור 1.

1. בנו מימוש כללי במרחב המצב למערכת כאשר $W_n(s)$ היא בי־פרופר ו־ $P(s), W_d(s)$ סטריקטלי פרופר.
2. נתון כי

$$P(s) = \frac{77.22}{s^2 + 3.717s + 77.22}, \quad W_d(s) = \frac{1}{s}, \quad W_n(s) = \frac{s}{s+1},$$

מצאו מימוש במרחב המצב למערכת המורחבת מהסעיף הקודם.

פתרון סעיף 1. ככלל יש לנו שלוש כניסות חיצוניות u, d_0, n_0 ויציאה אחת y, נכתוב את משוואות המצב והיציאה עבור כל אחת מהמערכות

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) &= Ax_p(t) + B\left(d(t) + u(t)\right) \\ y_p(t) &= Cx_p(t) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{x}_d(t) &= A_d x_d(t) + B_d d_0(t) \\ d(t) &= C_d x_d(t) \end{cases}.$$
$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) &= A_n x_n(t) + B_n n_0(t) \\ n(t) &= C_n x_n(t) + D_n n_0(t) \end{cases}$$

עבור מטריצות מימוש כלשהן. כעת נגדיר וקטורי מצב וכניסה מורחבים בהתאם למימושים

$$\tilde{x} \coloneqq \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_d(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} u(t) \\ d_0(t) \\ n_0(t) \end{bmatrix},$$

ונכתוב את משוואת המצב המתאימה בעזרת גזירה של וקטור המצב המורחב:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix}\dot{x}_p(t)\\ \dot{x}_d(t)\\ \dot{x}_n(t)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}Ax_p(t)+B\left(u(t)+d(t)\right)\\ A_dx_d(t)+B_dd_0(t)\\ A_nx_n(t)+B_nn_0(t)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}Ax_p(t)+B\left(u(t)+C_dx_d(t)\right)\\ A_dx_d(t)+B_dd_0(t)\\ A_nx_n(t)+B_nn_0(t)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}A & BC_d & 0\\ 0 & A_d & 0\\ 0 & 0 & A_n\end{bmatrix}\tilde{x}(t)+\begin{bmatrix}B & 0 & 0\\ 0 & B_d & 0\\ 0 & 0 & B_n\end{bmatrix}\tilde{u}(t).\end{aligned}$$

כעת נכתוב את משוואת היציאה במונחי הוקטורים המורחבים

$$y(t)=y_p(t)+n(t)=Cx_p(t)+C_nx_n(t)+D_nn_0(t)=\begin{bmatrix}C & 0 & C_n\end{bmatrix}\tilde{x}(t)+\begin{bmatrix}0 & 0 & D_n\end{bmatrix}\tilde{u}(t),$$

לכן המימוש הכולל נתון על ידי

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}(t) &= \begin{bmatrix}A & BC_d & 0\\ 0 & A_d & 0\\ 0 & 0 & A_n\end{bmatrix}\tilde{x}(t)+\begin{bmatrix}B & 0 & 0\\ 0 & B_d & 0\\ 0 & 0 & B_n\end{bmatrix}\tilde{u}(t)\\ y(t) &= \begin{bmatrix}C & 0 & C_n\end{bmatrix}\tilde{x}(t)+\begin{bmatrix}0 & 0 & D_n\end{bmatrix}\tilde{u}(t)\end{cases}.$$

$\triangledown$

פתרון סעיף 2. היות ומצאנו את המימוש הכולל בסעיף הקודם, כל שעלינו לעשות הוא למצוא מימושים לכל אחת מפונקציות התמסורת ואז להציב. עבור האינטגרטור קל למצוא מימוש פיזיקלי

$$d(s)=W_d(s)d_0(s)=\frac{1}{s}d_0(s)\implies W_d(s)=0+1\left(s-0\right)^{-1}1\implies W_d\ :\ \begin{cases}\dot{x}_d(t) &= 0\cdot x_d(t)+d_0(t)\\ d(t) &= x_d(t)\end{cases}$$

התהליך עצמו הוא סטריקטלי פרופר, לכן ניתן להשתמש במימושים קאנונים - נבחר במימוש משערך (נסו בבית לבנות מימוש מלוה!):

$$\begin{aligned}P(s) &= \frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}=\frac{b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}.\\ \implies &\begin{cases}\dot{x}_p(t) &= \begin{bmatrix}-a_1 & 1\\ -a_0 & 0\end{bmatrix}x_p(t)+\begin{bmatrix}b_1\\ b_0\end{bmatrix}\left(u(t)+d(t)\right)\\ \\ y_p(t) &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x_p(t)\end{cases}\\ = &\begin{cases}\dot{x}_p(t) &= \begin{bmatrix}-\sqrt{2} & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}x_p(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\left(u(t)+d(t)\right)\\ \\ y_p(t) &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x_p(t)\end{cases}\end{aligned}$$

פונקציית התמסורת $W_n(s)$ היא בי־פרופר, לכן לא נוכל להשתמש במימושים שלמדנו בהרצאה ישירות. אנחנו יודעים שהקשר בין פונקציית תמסורת לכל מימוש שלה במרחב המצב נתון על ידי

$$W_n(s)=\frac{s}{s+1}=D_n+C_n\left(sI-A_n\right)^{-1}B_n,$$

ננסה להביא את פונקציית התמסורת הנתונה לצורה הזו (פשוט יחסית במערכות מסדר ראשון):

$$.\frac{s}{s+1} = \frac{s+1-1}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1} = 1 + (-1)\cdot(s-(-1))^{-1}\cdot 1 \implies W_n \ : \ \begin{cases} \dot{x}_n(t) & = -x_n(t) + n_0(t) \\ n(t) & = -x_n(t) + n_0(t) \end{cases}$$

כעת כל שנותר הוא להציב

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{p_1}(t) \\ \dot{x}_{p_2}(t) \\ \dot{x}_d(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{p_1}(t) \\ x_{p_2}(t) \\ x_d(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ d_0(t) \\ n_0(t) \end{bmatrix} \\ y(t) & = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{p_1}(t) \\ x_{p_2}(t) \\ x_d(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ d_0(t) \\ n_0(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\triangledown$

שאלה מס' 2

נתונה פונקציית התמסורת

$$.G(s) = \frac{77.22s^2 + s}{s^4 + 3.717s^3 + s^2 + 77.22s + 1}$$

1. כתבו למערכת מימוש מלווה.
2. כתבו למערכת מימוש משערך.
3. הראו בעזרת פרמטרי מרקוב של שני המימושים כי הדרגה היחסית של המערכת לא תלויה במימוש.

פתרון סעיף 1. בהינתן פונקציית תמסורת

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

מימוש מלווה שלה נתון ע"י

$$.G \quad : \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

עבור המקרה שלנו

$$G(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{0 \cdot s^3 + 77.22s^2 + s + 0}{s^4 + 3.717s^3 + s^2 + 77.22s + 1}$$

נציב במימוש ונקבל

$$.G \quad : \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -77.22 & -1 & -3.717 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 77.22 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

$\triangledown$

פתרון סעיף 2. בהינתן פונקציית תמסורת

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

מימוש משערך שלה נתון ע"י

$$.G \quad : \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

עבור המקרה שלנו

$$G(s)=\frac{b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0}{s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}=\frac{0\cdot s^3+77.22s^2+s+0}{s^4+3.717s^3+s^2+77.22s+1}$$

נציב במימוש ונקבל

$$.G\quad:\quad\begin{cases}\dot{x}(t) & =\begin{bmatrix}-3.717 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -77.22 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ 77.22\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u(t)\\ \\ y(t) & =\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x(t)\end{cases}$$

$\triangledown$

פתרון סעיף 3. עבור אינדקס רץ $k\in\mathbb{N}$, הגדלים $CA^{k-1}B$ ידועים בתור פרמטרי מרקוב של המערכת, ובפרט ראיתם בהרצאה שבהינתן פונקציית תמסורת במונחי מימוש כלשהו

$$G(s)=D+C\left(sI-A\right)^{-1}B$$

הדרגה היחסית (עודף הקטבים) שלה הוא האינדקס הראשון עבורו פרמטר מרקוב שונה מאפס. כזכור עודף קטבים הוא תכונה של קשר הכניסה־יציאה, קרי פונקציית התמסורת, ולכן לא אמור להיות תלוי במימוש שנבחר. נבדוק זאת בעזרת חישוב פרמטרי מרקוב עבור שני המימושים שכתבנו. עבור המימוש המלווה

$$k=1:\begin{bmatrix}0 & 1 & 77.22 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & -77.22 & -1 & -3.717\end{bmatrix}^{1-1}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 77.22 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=0$$

$$k=2:\begin{bmatrix}0 & 1 & 77.22 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & -77.22 & -1 & -3.717\end{bmatrix}^{2-1}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 77.22 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ -3.717\end{bmatrix}=77.22$$

כלומר עודף הקטבים של המערכת הלפי המימוש המלווה הוא $k=2$. באותה הצורה נחשב עבור מימוש משערך

$$k=1:\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3.717 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -77.22 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{1-1}\begin{bmatrix}0\\ 77.22\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 77.22\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=0$$

$$k=2:\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3.717 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -77.22 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{2-1}\begin{bmatrix}0\\ 77.22\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3.717 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 77.22\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=77.22$$

וכצפוי קיבלנו את אותו עודף הקטבים. $\triangledown$