תורת הבקרה (035188)

סמסטר אביב תשפ"ג

תרגול מס' 5

יציבות רובסטית

התהליך האמיתי כולל אי ודאות בפרמטרים, לכן עקום נייקוויסט האמיתי נמצא בתחום כלשהו סביב עקום נייקוויסט הנומינלי בכל תדר ותדר. את תחום אי הודאות הזה אנחנו מגדירים כמעגל ברדיוס $\ell(\omega)$ סביב עקום נייקוויסט של התהליך הנומינאלי, $P_0(\mathrm{j}\omega)$.

עבור כל משפחת התהליכים המקיימים

$$\left|\frac{P(\mathrm{j}\omega)}{P_0(\mathrm{j}\omega)}-1\right|\leq \ell(\omega)$$

בעלי אותם קטבים לא יציבים, נאמר כי בקר $C(s)$ מייצב רובוסטית את המערכת אם

1. הבקר מייצב את התהליך הנומינאלי
2. מתקיים

$$|T_0(\mathrm{j}\omega)|=\left|\frac{C(\mathrm{j}\omega)P_0(\mathrm{j}\omega)}{1+C(\mathrm{j}\omega)P_0(\mathrm{j}\omega)}\right|<\frac{1}{\ell(\omega)},\quad \forall\omega.$$

שאלה מס' 1

נתון התהליך

$$P(s)=\frac{K}{\tau s+1}\mathrm{e}^{-sh}$$

חשבו את רדיוס אי הודאות המכפלתית עבור כל אחד מהמקרים הבאים

.1

$$K=K_0+\delta_K,\quad \delta_K\in[-\delta_{Km},\delta_{Km}],\quad 0<\delta_{Km}<K_0$$

.2

$$\tau=\tau_0+\delta_\tau,\quad \delta_\tau\in[-\delta_{\tau m},\delta_{\tau m}],\quad 0<\delta_{\tau m}<\tau_0$$

.3

$$h=h_0+\delta_h,\quad \delta_h\in[-\delta_{hm},\delta_{hm}],\quad 0<\delta_{hm}<h_0$$

פתרון

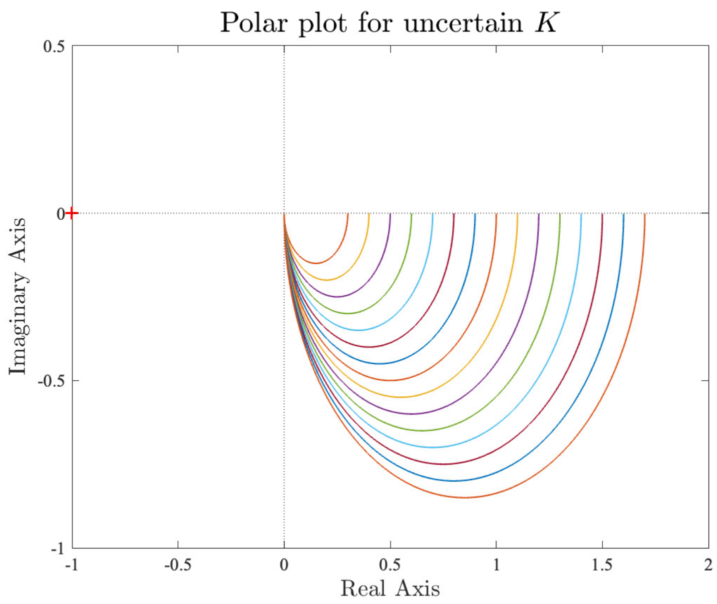
פתרון סעיף 1. נחשב את תחום אי הודאות

$$\frac{P(s)}{P_0(s)} - 1 = \frac{K}{K_0} - 1 \implies \left|\frac{P(j\omega)}{P_0(j\omega)} - 1\right| = \left|\frac{K}{K_0} - 1\right| = \left|\frac{K_0 + \delta_K}{K_0} - 1\right| = \left|\frac{\delta_K}{K_0}\right| \leq l(\omega).$$

כעת נרצה לחסום מלמעלה את הביטוי אליו הגענו על מנת להבטיח את רובסטיות החוג. במקרה זה ניתן להגיע לחסם הדוק בפשטות

$$\left|\frac{\delta_K}{K_0}\right| \leq \frac{\delta_{Km}}{K_0} \implies l(\omega) = \frac{\delta_{Km}}{K_0}$$

וקיבלנו רדיוס אי ודאות קבוע שאינו תלוי בתדר. בצורה גרפית ניתן לתאר את אי הודאות כמעגלים בעלי רדיוס קבוע, כלומר עקום נייקוויסט האמיתי משתנה בצורה רדיאלית סביב העקום הנומינאלי. ▽



איור 1: עקומים פולרים עבור אי הודאות

פתרון סעיף 2. נחשב את תחום אי הודאות

$$\frac{P(s)}{P_0(s)} - 1 = \frac{\tau_0 s + 1}{\tau s + 1} - 1 \implies \left|\frac{P(j\omega)}{P_0(j\omega)} - 1\right| = \left|\frac{\tau_0 \omega j + 1}{\tau \omega j + 1} - 1\right| = \left|\frac{(\tau_0 - \tau)\omega j}{\tau \omega j + 1}\right| \leq l(\omega).$$

שוב נרצה לחסום מלמעלה את הביטוי אליו הגענו על מנת להבטיח את רובסטיות החוג. נציב את את קבוע הזמן האמיתי

$$\left|\frac{(\tau_0 - (\tau_0 + \delta_\tau)\omega j}{(\tau_0 + \delta_\tau)\omega j + 1}\right| = \frac{|\delta_\tau|\,\omega}{\sqrt{(\tau_0 + \delta_\tau)^2\omega^2 + 1}}$$

כעת נרצה להגדיל את הביטוי הזה ככל האפשר בעזרת בחירת ערך ספציפי ל δ_τ, נבחר את הערך הקטן ביותר למכנה והגדול ביותר למונה ונקבל

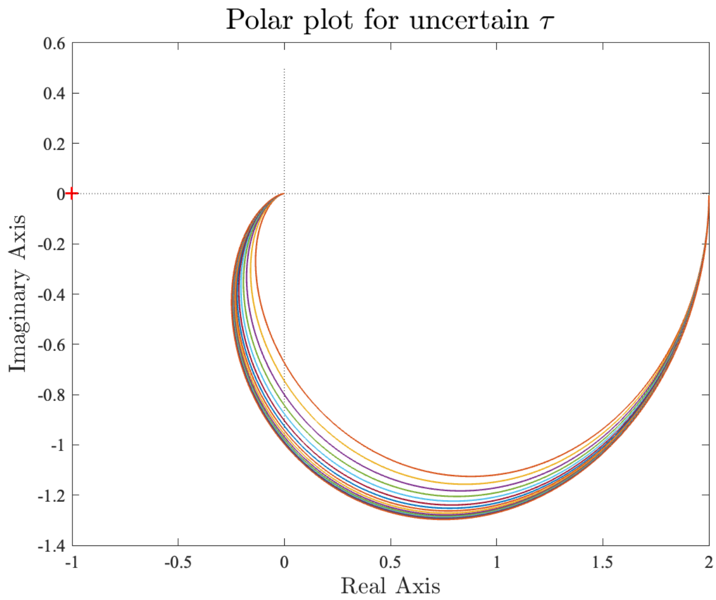
$$\frac{\delta_{\tau m}\omega}{\sqrt{(\tau_0 - \delta_{\tau m})^2\omega^2 + 1}} = l(\omega).$$

קיבלנו רדיוס אי ודאות מונוטוני עד לערך מקסימלי של

$$\frac{\delta_{\tau m}}{\tau_0 - \delta_{\tau m}}$$

כאשר התדר שואף לאינסוף.

▽



איור 2: עקומים פולרים עבור אי הודאות

פתרון סעיף 3. נחשב את תחום אי הודאות

$$.\frac{P(s)}{P_0(s)} - 1 = \frac{\mathrm{e}^{-sh}}{\mathrm{e}^{-sh_0}} - 1 \implies \left|\frac{P(\mathrm{j}\omega)}{P_0(\mathrm{j}\omega)} - 1\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega h}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega h_0}} - 1\right| = \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(h-h_0)} - 1\right|$$

נשתמש בנוסחת אויילר כדי לפשט את הביטוי

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(h-h_0)} - 1\right| &= \left|\cos\left(\omega(h-h_0)\right) - \mathrm{j}\sin\left(\omega(h-h_0)\right) - 1\right| \\ &= \sqrt{\left(\cos\left(\omega(h-h_0)\right) - 1\right)^2 + \sin^2\left(\omega(h-h_0)\right)} \\ &= \sqrt{2\left(1-\cos\left(\omega\delta_h\right)\right)}\end{aligned}$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית

$$2\sin^2(x/2) = 1 - \cos(x)$$

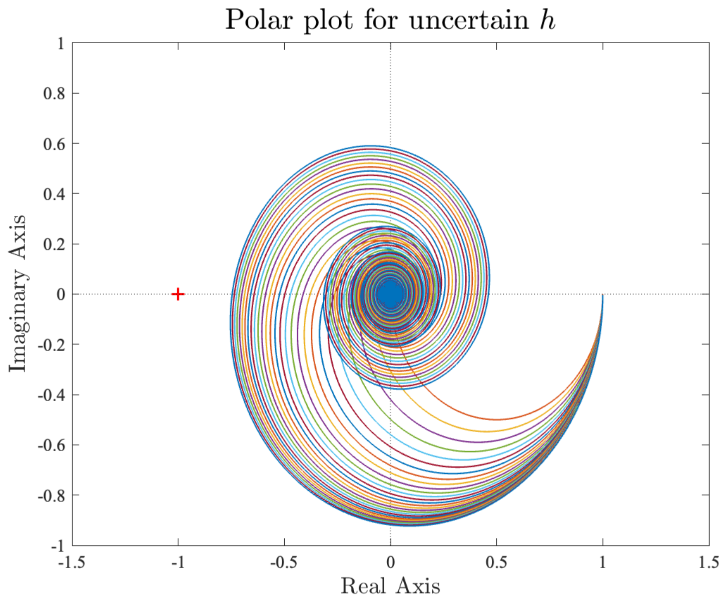
ונקבל

$$.\sqrt{2\left(1-\cos\left(\omega\delta_h\right)\right)} = \sqrt{4\sin^2\left(\omega\delta_h/2\right)} = 2\left|\sin\left(\omega\delta_h/2\right)\right|$$

חסום הדוק יחסית על הביטוי הנל ניתן על ידי

$$l(\omega) = \begin{cases} 2\left|\sin\left(\omega\delta_{hm}/2\right)\right|, & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{\delta_{hm}}\right] \\ 2, & \frac{\pi}{\delta_{hm}} < \omega \end{cases}$$

▽



איור 3: עקומים פולרים עבור אי הודאות

מיקום קטבים בעזרת מטריצת סילבסטר

עבור תהליך

$$P(s)=\frac{\sum_{i=0}^{n} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

ופולינום אופייני רצוי של החוג הסגור

$$\chi_{\mathrm{cl}}(s)=\sum_{i=0}^{2n}\chi_i s^i$$

אם קיים פתרון למערכת המשוואות הלינארית

$$\begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-1} & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_0 \\ \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{2n} \\ \chi_{2n-1} \\ \vdots \\ \chi_{n+1} \\ \chi_n \\ \vdots \\ \chi_0 \end{bmatrix}$$

אזי הבקר

$$C(s)=\frac{\sum_{i=0}^{n} \beta_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i s^i}$$

ממקם את קטבי החוג הסגור לפי הפולינום האופייני הרצוי שלעיל. המטריצה שלעיל נקראת מטריצת סילבסטר והיא מדרגה מלאה אם ורק אם אין צימצומים בין המונה והמכנה של הבקר (הפולינומים זרים). שימו לב כי יש לנו $2n+1$ משוואות (לפי הגורמים בפולינום האופייני הרצוי) אבל $2n+2$ משתנים, כלומר קיימים אינסוף פתרונות, או באופן שקול קיימת לנו דרגת חופש לטובת התיכנון.

שאלה מס' 2

נתון מודל של מנוע זרם ישר בעל פונקציית תמסורת מקורבת נתון התהליך

$$P(s) = \frac{25}{s^2 + 3s + 25}$$

תכננו בקר בשיטת מיקום קטבים כך ש

1. לקטבים הדומיננטיים תדירות טבעית זהה לזו של התהליך, מנת ריסון 0.5 ושאר הקטבים ב -10.
2. כמו בסעיף הקודם רק שהבקר הוא strictly proper.
3. כמו בסעיף 1 והבקר כולל אינטגרטור.
4. כל קטבי החוג הסגור נמצאים ב -10.

פתרון סעיף 1. התהליך הנתון הוא קאנוני מסדר שני בעל תדירות טבעית של $\omega_n = 5$ ויחס ריסון של $\zeta = \frac{3}{2\cdot 5} = 0.3$, כך שאנו נדרשים לשמור על התדירות הטבעית (כלומר מהירות התגובה) אך להגדיל את הריסון. סדר התהליך הוא $n = 2$, נמצא את הפרמטרים הדרושים ליצירת מטריצת סילבסטר:

$$P(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 25 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}$$

ראיתם בהרצאה כי אם נבחר בקר מסדר התהליך, כלומר n, נקבל פולינום אופייני מסדר $2n = 4$ ובקר בעל $2n+2 = 6$ פרמטרים חופשיים, כלומר אינסוף פתרונות. על מנת לקבל פתרון יחיד נוריד את סדר הבקר ל $n - 1 = 1$, כאשר עבור בקר proper עלינו למצוא $2n$ נעלמים מהצורה

$$C(s) = \frac{\beta_1 s + \beta_0}{\alpha_1 s + \alpha_0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}.$$

מכאן סדר החוג הסגור הוא $2n - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, כלומר בחוג הסגור יהיו שלושה קטבים עבורם עלינו לפתור. נכתוב את הפולינום האופייני הדרוש

$$\chi_{\text{cl}}(s) = \left(s^2 + 2 \cdot 0.5 \cdot 5s + 5^2\right)(s + 10) = s^3 + 15s^2 + 75s + 250 \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \chi_3 \\ \chi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 75 \\ 250 \end{bmatrix}$$

כעת על שנותר הוא לבנות את מטריצת סילבסטר המתאימה, לפתור אותה, ולחלץ את פרמטרי הבקר. מטריצת סילבסטר נתונה ע"י:

$$M_s = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_2 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 & b_1 & b_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & a_0 & a_1 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & b_0 \end{array}\right]_{(2n+1)\times(2n+2)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 3 & 1 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 3 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 25 \end{array}\right]$$

עבור המקרה הדרוש יש לנו $2n = 4$ נעלמים ומשוואות מפני שהמקדמים α_2, β_2 לא מופיעים, לכן יש למחוק את העמודה הראשונה והעמודה הרביעית מן המטריצה. היות והורדנו את סדר הבקר, הורדנו גם את סדר הפולינום האופייני, לכן המקדם $\chi_4 = 0$ ועלינו למחוק גם את השורה הראשונה. נעשה זאת ונקבל

$$M_{s2} = \left[\begin{array}{cc|cc} a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_0 & a_1 & b_0 & b_1 \\ 0 & a_0 & 0 & b_0 \end{array}\right]$$

נציב במערכת המשוואות

$$M_{s2}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_0\\ \beta_1\\ \beta_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\chi_3\\ \chi_2\\ \chi_1\\ \chi_0\end{bmatrix}\quad\Longrightarrow\quad\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\3&1&0&0\\25&3&25&0\\0&25&0&25\end{array}\right]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_0\\ \beta_1\\ \beta_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\15\\75\\250\end{bmatrix}$$

המטריצה M_{s2} הפיכה, לכן למערכת יש פתרון יחיד, לאחר פתרון מערכת המשוואות מתקבל הבקר

$$\begin{bmatrix}1\\12\\0.56\\-2\end{bmatrix}\quad\Longrightarrow\quad C(s)=\frac{0.56s-2}{s+12}.$$

נשים לב שקיבלנו בקר בעל אפס ימני, לכן הוא יהיה אפס גם של פונקציית הרגישות המשלימה, דבר שיגרום לתגובת חסר לכניסת מדרגה. זו דוגמא לאחד החסרונות המהותיים בשיטת מיקום הקטבים ־ אין לנו דרך לשלוט במיקום אפסי הבקר, והם יכולים להיות דומיננטיים מאוד בתגובה. $\triangledown$

פתרון סעיף 2. הפעם נוסף אילוץ לבקר, עליו להיות strictly proper. אם ננסה להשתמש שוב בבקר מסדר ראשון נאלץ לכפות כי $\beta_1=0$ ונישאר עם שלושה נעלמים עבור ארבע משוואות, לכן עלינו להשתמש בבקר מסדר שני עם האילוץ $\beta_2=0$. כמו בסעיף הקודם נבחר צורה כללית של הבקר

$$C(s)=\frac{\beta_1 s+\beta_0}{\alpha_2 s^2+\alpha_1 s+\alpha_0},\quad\Longrightarrow\quad\begin{bmatrix}\alpha_2\\ \alpha_1\\ \alpha_0\\ \beta_1\\ \beta_0\end{bmatrix}$$

היות וסדר הבקר עלה גם סדר הפולינום האופייני יעלה

$$\chi_{cl}(s)=\left(s^2+2\cdot 0.5\cdot 5s+5^2\right)(s+10)^2=s^4+25s^3+225s^2+1000s+2500.\quad\Longrightarrow\quad\begin{bmatrix}\chi_4\\ \chi_3\\ \chi_2\\ \chi_1\\ \chi_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\25\\225\\1000\\2500\end{bmatrix}$$

נבנה את מטריצת סילבסטר באותה הצורה, היות והפעם רק $\beta_2=0$ נאפס את העמודה הרביעית בלבד, שימו לב כי הפולינום האופייני הפעם הוא מסדר $2n=4$ לאחר פתרון מערכת המשוואות נקבל את הבקר

$$C(s)=\frac{1.92s-34}{s^2+22s+134}$$

אשר גם לו אפס ימני, אך הפעם הוא רחוק יותר מהציר המדומה ולכן פחות דומיננטי. $\triangledown$

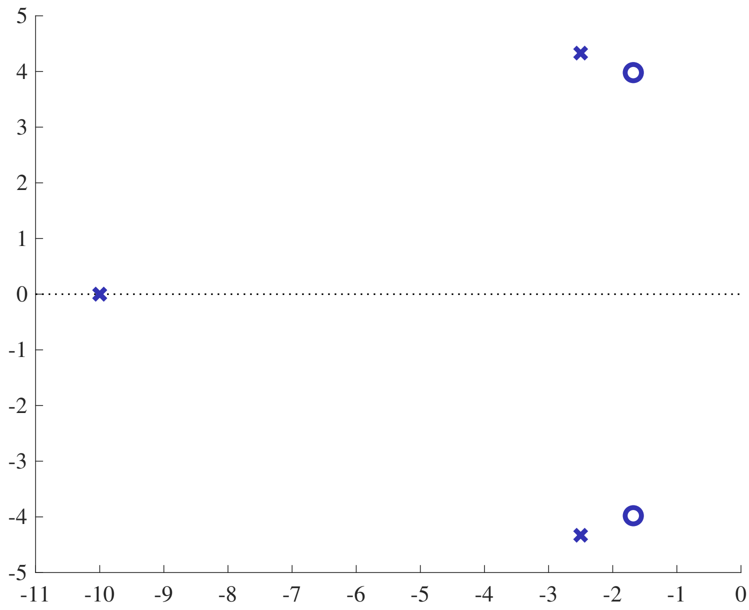
פתרון סעיף 3. גם הפעם יש לנו אילוץ על הבקר, רק שכעת מדובר באינטגרטור, לכן שוב נצטרך בקר מסדר שני

$$C(s)=\frac{\beta_2 s^2+\beta_1 s+\beta_0}{\alpha_2 s^2+\alpha_1 s}.\quad\Longrightarrow\quad\begin{bmatrix}\alpha_2\\ \alpha_1\\ \alpha_0\\ \beta_2\\ \beta_1\\ \beta_0\end{bmatrix}$$

הפולינום האופייני נותר זהה לסעיף הקודם, רק שכעת $\alpha_0=0$ לכן מאפס את העמודה השלישית במטריצה. היות ולתהליך אין גוזר נקבל גם הפעם מטריצה הפיכה, ולאחר פתרון מערכת המשוואות נקבל את הבקר

$$C(s)=\frac{5.36s^2+18s+100}{s^2+22s}.$$

אם נבחן את מפת הקטבים של פונקציית הרגישות המשלימה כמתואר באיור 4 נראה כי אפסי הבקר שהתקבלו קרובים יחסית לקטבי הרגישות המשלימה, לכן הם מסייעים לריסון תגובת המדרגה באות היחוס.



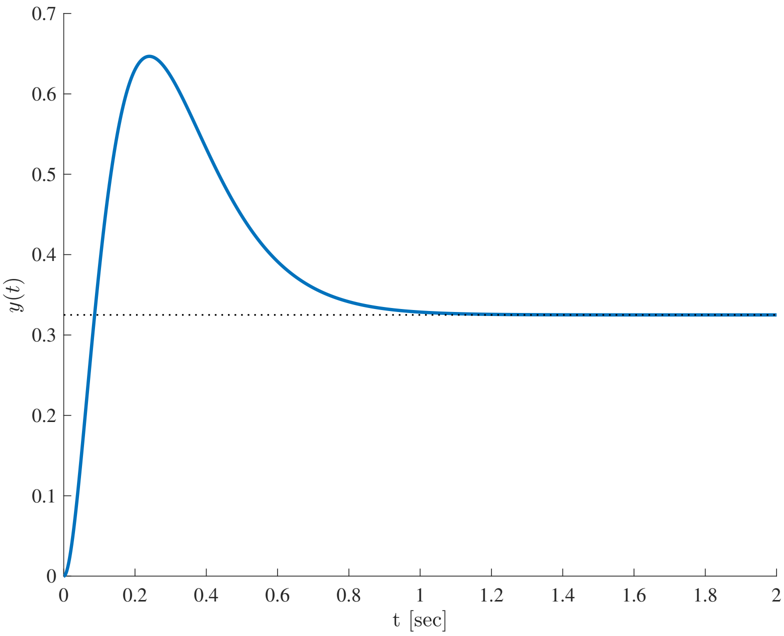
איור 4: מפת הקטבים של פונקציית הרגישות המשלימה עבור בקר עם אינטגרטור

$\triangledown$

פתרון סעיף 4. הפעם על מנת לקבל פתרון יחיד מספיק לנו בקר מסדר ראשון, נמצא את הבקר כמקודם באמצעות מטריצת סילבסטר כמו בסעיף הראשון ונקבל את הבקר

$$.C(s) = \frac{7.76s + 13}{s + 27}$$

הפעם אפס הבקר נמצא בחצי המישור השמאלי, יחד עם זאת הוא מתקבל בנקודה $z = -\frac{13}{7.76} \approx -1.67$, כלומר אפס זה דומיננטי בהרבה מאשר הקטבים אשר מוקמו ב $p = -10$. תגובת המדרגה של הרגישות המשלימה עבור בקר זה מתוארת באיור 5, ואכן ניתן לראות תגובת יתר חריפה, בקירוב של 100%, למרות שכל הקטבים ממשיים ומהירים מאוד.



איור 5: תגובת הרגישות המשלימה לכניסת מדרגה עבור הבקר מסעיף 4

מוסר ההשכל: אין אינטואציה ברורה מאחורי מיקומי האפסים, או דרך לשלוט בהם. השיטה אומנם מאפשרת לייצב "אלגוריתמית" מערכות מסדר גבוה בעזרת בקר מסובך מספיק, אבל קשה להבטיח שהקטבים הנבחרים יהיו דומיננטיים. כלומר גם אם כל הקטבים יהיו מהירים מאוד וממשיים, התגובה יכולה ▽