הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, הפקולטה להנדסת מכונות

TECHNION—Israel Institute of Technology, Faculty of Mechanical Engineering

תורת הבקרה (035188)

סמסטר אביב תשפ"ג

תרגול מס' 4

שאלה מס' 1

נתונה פונקציית תמסורת

$$G(s) = \frac{\mathrm{e}^{-s}}{\tau s + 1} = P(s)\mathrm{e}^{-s}.$$

1. מצאו קרוב פאדה מסדר $[2,3]$ עבור $\tau = 1$.
2. השוו את השגיאות בין פונקציית התמסורת המקורית (מהסעיף הקודם) וקירוב פאדה שחושב, לבין פונקציית התמסורת המקורית וקירוב פאדה לחלק של ההשהיה בלבד מוכפל ב $P(s)$.
3. כיצד משתנה השגיאה בין $G(s)$ לקירוב הפאדה (לחלק של ההשהייה בלבד) כתלות ב τ ?

פתרון סעיף 1. נרצה לחשב את הקירוב הרציונאלי הטוב ביותר $G(s) \approx R_{[2,3]}(s)$, כאשר בקירוב יש $2+3=5$ פרמטרים. לשם כך נפתח את שני הביטויים לטור טיילור עד סדר חמישי ונשווה בינהם. פיתוח טיילור של פונקציית התמסורת:

$$\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s+1} = 1 - 2s + \frac{5}{2}s^2 - \frac{8}{3}s^3 + \frac{65}{24}s^4 - \frac{163}{60}s^5 + O(s^6)$$

ופיתוח טיילור של הקירוב הרצוי

$$R_{[2,3]}(s) = R_{[2,3]}(2) + \frac{R'_{[2,3]}(0)}{1!}s + \frac{R''_{[2,3]}(0)}{2!}s^2 + \frac{R'''_{[2,3]}(0)}{3!}s^3 + \frac{R^{(4)}_{[2,3]}(0)}{4!}s^4 + \frac{R^{(5)}_{[2,3]}(0)}{5!}s^5 + O(s^6).$$

סדר הקירוב רצוי מכיל שלושה קטבים ושני אפסים, לכן ניתן לכתוב אותו בצורה פרמטרית בתור

$$R_{[2,3]}(s) = a\frac{s^2 + bs + c}{s^3 + ds^2 + es + f}$$

וכעת עלינו לחשב את הנגזרות בראשית. נעשה זאת:

$$R_{[2,3]}(0) = \frac{ac}{f}$$

$$R'_{[2,3]}(0) = \left(ba - ac\frac{e}{f}\right)\frac{1}{f}$$

$$R''_{[2,3]}(0) = 2\left(a - \frac{acd}{f} - \frac{a(bf-ce)e}{f^2}\right)\frac{1}{f}$$

$$R'''_{[2,3]}(0) = 6\left(-\frac{ac}{f} - \frac{a(bf-ce)d}{f^2} + \frac{a(bef - cdf - e^2 - f^2)e}{f^3}\right)\frac{1}{f}$$

$$R^{(4)}_{[2,3]}(0) = 24\left(-\frac{a(bf-ce)}{f^2} + \frac{a(bef + cdf - ce^2 - f^2)d}{f^3} + \frac{a(bdf^2 - be^2f - 2cdef + ce^3 + cf^2 + ef^2)e}{f^4}\right)\frac{1}{f}$$

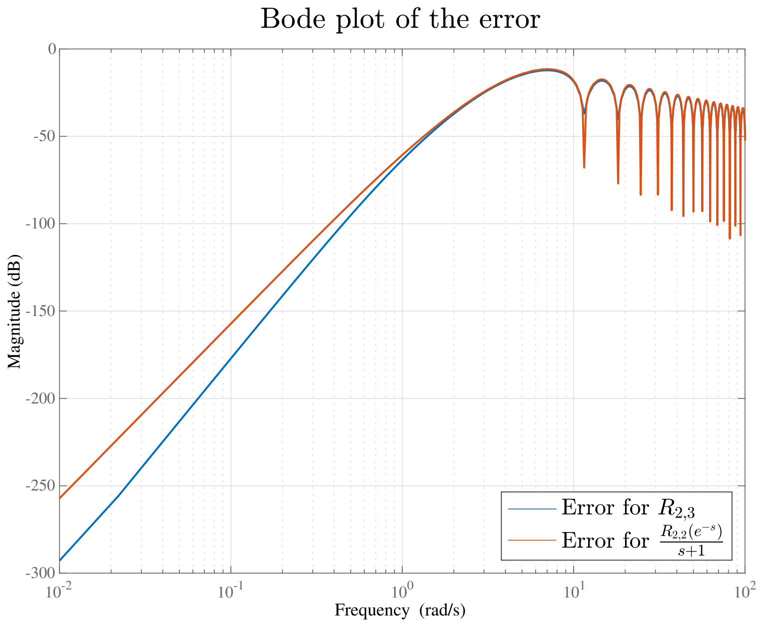
$$\begin{aligned}R^{(5)}_{[2,3]}(0) = 120\Bigg(&\frac{a(bef + cdf - ce^2 - f^2)}{f^3} + \frac{ae}{f^5}(bdf^2 - be^2f - 2cdef + ce^3 + cf^2 + e + cd^2f^2 - 3cde^2f + \\ &+ ce^4 - bf^3 + 2cef^2 - df^3 + e^2f^2)\Bigg)\frac{1}{f}\end{aligned}$$

כעת כל שנותר זה להציב את המקדמים בפיתוח טיילור של הקירוב, ולהשוות לפיתוח טיילור של פונקציית התמסורת. לאחר שנעשה זאת נקבל מערכת משוואות, נפתור אותה, ונקבל את ערכי הפרמטרים a, b, c, d, e, f. עבור המקרה דנן, מתקבל הקירוב הבא:

$$\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s+1} \approx \frac{3(29s^2 - 184s + 380)}{106s^3 + 693s^2 + 1728s + 1140}.$$

$\triangledown$

פתרון סעיף 2. דיאגרמת בודה של השגיאה בין המערכת המקורית לשני הקירובים מוצגת באיור 1

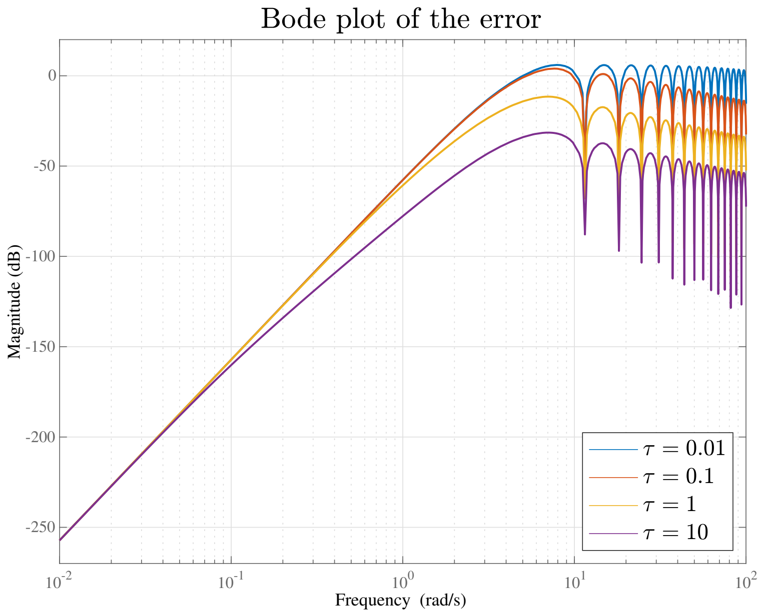


איור 1: דיאגרמת בודה עבור שגיאת הקירוב

ניתן לראות כי שגיאת הקירוב למערכת הכוללת ולא להשהיה בלבד טובה יותר בתדרים נמוכים, גם בסקלות שקשה לראות מהגרף. לדוגמא בתדר $8\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}$ שגיאת הקירוב של $R_{[2,3]}(G(s))$ קטנה ב 15 אחוזים מאשר שגיאת הקירוב של $R_{[2,2]}(\mathrm{e}^{-s})P(s)$, וזו התנהגות אופיינית גם למערכות סטריקטלי פרופר מסובכות יותר עם השהייה. $\triangledown$

פתרון סעיף 3.

דיאגרמת בודה של השגיאה בין המערכת המקורית למערכת עם קירוב ההשהיה בלבד עבור קבועי זמן שונים נתונה באיור 2



איור 2: דיאגרמת בודה עבור שגיאת הקירוב וקבועי זמן שונים

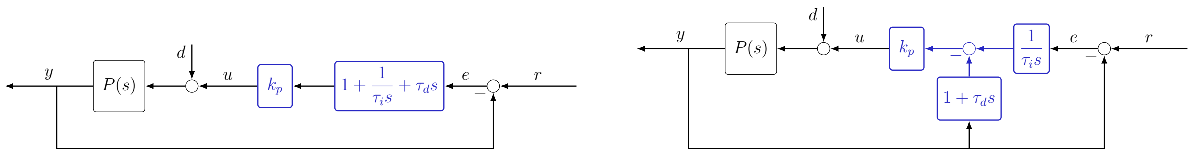
ניתן לראות כי שגיאת הקירוב קטנה יותר ככל שקבוע הזמן של המערכת גדול יותר (כלומר היא איטית יותר). בשילוב עם תוצאות הסעיף הקודם ניתן להסיק כי ככל שהקוטב הרציונלי של המערכת מהיר יותר, עדיף לבצע קירוב פדה למערכת הכוללת ולא להשהיה בלבד. לדוגמא, באיור 3 ניתן לראות את השגיאה בין שני הקירובים עבור $\tau = 0.01$.

איור 3: דיאגרמת בודה עבור שגיאת הקירוב וקבוע זמן קטן

אינטואיטיבית ניתן לקשר את זה להתנהגות שראיתם בהרצאה, שם ראיתם שתגובת מדרגה של קירוב פדה של השהיה טהורה מתנהגת שונה באופן מהותי מאשר תגובת המדרגה של ההשהיה עצמה. התנהגות זו לא חזרה על עצמה כאשר היה למערכת קוטב נוסף. כאשר קבוע הזמן של הקוטב קטן יותר (הקוטב מהיר יותר) ביחס להשהיה אזי

המערכת כולה מתנהגת דומה יותר ויותר להשהיה טהורה, ולכן כדאי לקרב את ההשהיה יחד עם קטבים מהירים של התהליך. $\triangledown$

שאלה מס' 2



(a) ארכיטקטורה סטנדרטית

(b) ארכיטקטורה אלטרנטיבית

איור 4: שתי חלופות למימוש בקר PID

באיור 4 נתונות שתי ארכיטקטורות בקרה עבור אותו בקר PID.

1. כתבו את חוק הבקרה בתחום הזמן עבור שני המימושים.
2. כתבו את פונקציית הרגישות המשלימה עבור שני המימושים. האם יש הבדל בין שתי הפונקציות? מה לגבי הרגישות להפרעה?
3. העריכו כיצד יתבטאו ההבדלים הללו בתגובות בזמן.

פתרון סעיף 1. נתחיל בלבטא את חוק הבקרה עבור המימוש הרגיל בתחום התדר

$$u(s) = k_{\mathrm{p}}\left(1+\frac{1}{\tau_i s}+\tau_d s\right)e(s)$$

כלומר סכום של גורמים פשוטים הפועלים על השגיאה. היות והתמרת לפלס היא לינארית, נבצע התמרה הפוכה על כל אחד מהם בנפרד ונסכום את התוצאה ונקבל

$$u(t) = k_{\mathrm{p}}\left(e(t)+\frac{1}{\tau_i}\int_0^t e(\theta)d\theta+\tau_d\dot{e}(t)\right)$$

כלומר חוק הבקרה הוא מישקול של השגיאה הנוכחית, אינטגרל השגיאה מזמן אפס ונגזרת השגיאה בזמן הנוכחי. נעשה את אותו התהליך על המימוש האלטרנטיבי

$$u(s) = k_{\mathrm{p}}\left(\frac{1}{\tau_i s}e(s)-y(s)-\tau_d s y(s)\right)$$

כלומר הפעם הבקר שלנו פועל בצורה שונה על שני האותות - השגיאה והיציאה המדודה. נבצע התמרת לפלס הפוכה ונקבל

$$u(t) = k_{\mathrm{p}}\left(\frac{1}{\tau_i}\int_0^t e(\theta)d\theta-y(t)-\tau_d\dot{y}(t)\right)$$

כלומר חוק הבקרה מבצע אינטגרציה על השגיאה, אך הגורם הפרופורציונלי והגוזר פועלים על היציאה בלבד. כלומר על מנת לממש את הארכיטקטורה הזו עלינו להיות מסוגלים למדוד ולעבד (לבצע עיבוד) גם את השגיאה e וגם את היציאה y, או באופן שקול את אות הייחוס והיציאה, באופן בלתי תלוי. $\triangledown$

פתרון סעיף 2. הארכיטקטורה הסטנדרטית היא משוב יחידה רגיל, כלומר

$$T(s)=\frac{y}{r}=\frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)},\quad T_d(s)=\frac{y}{d}=\frac{P(s)}{1+P(s)C(s)}$$

כאשר

$$C(s) = \frac{k_\mathrm{p}\big(\tau_d\tau_i s^2 + \tau_i s + 1\big)}{\tau_i s}$$

הוא פשוט הבקר הרגיל. על מנת למצוא את פונקציות התמסורת עבור המימוש השני נעקוב אחרי האותות

$$\Big((r-y)\frac{1}{\tau_i s} - (1+\tau_d s)y\Big)k_\mathrm{p}P(s) = y(s)$$

שימו לב כי ניתן לכתוב את אגף שמאל בתור

$$\frac{k_\mathrm{p}}{\tau_i s} rP(s) - k_\mathrm{p}\big(\frac{1}{\tau_i s} + 1 + \tau_d s\big)yk_\mathrm{p}P(s) = \frac{k_\mathrm{p}}{\tau_i s}P(s)r - C(s)P(s)y$$

כשאר $C(s)$ הוא הבקר הרגיל, מכאן ניתן לכתוב את הרגישות המשלימה עבור מימוש זה בתור

$$.T_{yr}(s) = \frac{P(s)k_\mathrm{p}/(\tau_i s)}{1+P(s)C(s)} = T_d(s)\cdot\frac{k_\mathrm{p}}{\tau_i s}$$

שימו לב שהפונקציה הזו עדיין יציבה אם הפולינום האופייני של המימוש הרגיל יציבה, שכן האינטגרטור תמיד יצטמצם עם ההאינטגרטור שנמצא ב $C(s)$. מהמשוואות שלעיל קל לראות כי פונקציית הרגישות להפרעה לא משתנה בין שתי הארכיטקטורות. $\triangledown$

פתרון סעיף 3. ראינו כי הרגישות להפרעה זהה בשתי הארכיטקטורות, לכן התגובה להפרעה של שני החוגים תהיה זהה. מה לגבי התגובה לאות הייחוס? היזכרו כי במשוב יחידה ובהנחה שהתמסורות רציונליות ניתן לכתוב את פונקציית הרגישות המשלימה בתור

$$T(s) = \frac{y}{r} = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{N_p(s)N_c(s)}{\chi_\mathrm{cl}(s)}, \quad P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}, C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

כלומר אם אין ימצומים אפסי הבקר הם אפסים של פונקציית הרגישות המשלימה. כזכור אפסים גורמים לתגובת יתר או תגובת חסר וגורמים לתנודות, לכן בפרט יגרמו להתנהגות פחות טובה של היציאה, במיוחד אם הם דומיננטיים ביחס לקטבי החוג הסגור. בארכיטקטורה האלטרנטיבית לעומת זאת נקבל

$$T_{yr}(s) = \frac{N_p(s)k_\mathrm{p}}{\chi_\mathrm{cl}(s)}$$

כלומר אפסי הרגישות המשלימה הם אפסי התהליך בלבד. אפסי בקר PID תלויים בהגבר האינטגרלי והגבר הגוזר, בפרט עבור בקר PI יתקבל אפס בדיוק ב $\tau_i s + 1$, כלומר יהיה קשר ישיר בין בחירת קבוע הזמן האינטגרלי למיקום אפס של החוג הסגור. לדוגמא במקרה של מערכת גמישה בה מנסים להשתמש בבקר PID ללא מינימום פאזה על מנת לרסן מערכת, שימוש בארכיטקטורה הסטנדרטית יכול לגרור תגובת חסר ותגובת יתר משמעותית בהנחה וצריך לעקוב אחרי אות ייחוס כלשהו, מה שלא יקרה בארכיטקטורה החלופית.

כדוגמא, חישבו על הסיטואציה הסטנדרטית הבאה

$$P(s) = \frac{k}{s+a}, \quad C(s) = k_\mathrm{p}\left(1+\frac{1}{\tau_i s}\right)$$

כלומר תהליך יציב מסדר ראשון מבוקר על ידי בקר PI. במקרה זה ובהנחה ואין צימצומים מתקבל

$$T(s) = \frac{kk_\mathrm{p}(\tau_i s+1)}{\tau_i s^2 + \tau_i(a+kk_\mathrm{p})s + kk_\mathrm{p}}, T_{yr}(s) = \frac{kk_\mathrm{p}}{\tau_i s^2 + \tau_i(a+kk_\mathrm{p})s + kk_\mathrm{p}},$$

מכאן קל לראות כי בארכיטקטורה המקורית תמיד נקבל אפס ולכן תגובת יתר ותנודות גם אם הקטבים של החוג הסגור מרוסנים, בעוד שבארכיטקטורה החלופית ניתן לקבל תגובה מרוסנת לחלוטין או לכל הפחות צפויה (שכן זו רק מערכת מסדר שני ללא אפסים, יש לנו ביטויים אנליטיים להתנהגות שלה).

תרגיל לבית: הוסיפו אינטגרטור לתהליך (קירוב למודל של מנוע זרם ישר),תכננו בקרים וסמלצו את תגובות החוגים הסגורים עבור ערכי a ו k שונים. $\triangledown$