הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, הפקולטה להנדסת מכונות

TECHNION—Israel Institute of Technology, Faculty of Mechanical Engineering

תורת הבקרה (035188)

סמסטר אביב תשפ"ג

תירגול מס' 3

שאלה מס' 1

נתונים ארבע תהליכים

$$P_i(s)=\frac{0.1}{(s+1)(s+0.1)},\quad \frac{1}{(s+1)(s^2+0.1s+1)},\quad \frac{10(s+0.1)}{(s+1)^2},\quad \frac{s^2+0.1s+1}{(s+1)^3}.$$

1. עבור כל אחד מהתהליכים, האם ניתן לתכנן בקר מייצב כך שפונקציית הרגישות המשלימה של החוג תקיים

$$T(s)\equiv T_{\text{dream}}(s)=\frac{10}{(s+10)(s^2+\sqrt{2}s+1)}\quad ?$$

2. באם אפשר, תכננו בקרים כאלו, ובחנו את פונקציות הרגישות להפרעה והרגישות לאות הבקרה עבור כל אחד מן התהליכים.

פתרון

1. ראשית נבחן את הדרישה בצורה אלגברית, וננסה לבודד את $C(s)$

$$T_{\text{dream}}(s)=\frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}\implies C_{\text{dream}}(s)=\frac{T_{\text{dream}}(s)}{1-T_{\text{dream}}(s)}\frac{1}{P(s)},$$

כלומר דרוש לנו בקר שמצמצם את התהליך כולו, ומחליף אותו במעין משוב חיובי של מודל הייחוס. מכאן עלינו לבדוק שלושה תנאים

(א) התהליך חייב להיות יציב ומינימום פאזה כדי למנוע צמצומים לא יציבים - תנאי זה מתקיים לכל התהליכים הנתונים.

(ב) הבקר המתקבל צריך להיות סיבתי - תנאי זה תלוי במודל היחוס בלבד (תרגיל: הראו שתנאי מספיק הוא שעודף הקטבים של $T_{\text{dream}}(s)$ גדול או שווה לזה של התהליך).

(ג) עלינו לוודא את יציבות החוג המתקבל - תנאי זה תלוי רק במודל הייחוס ומתקיים במקרה זה (תרגיל: הוכיחו לעצמכם מדוע).

כלומר עבור כל התהליכים הללו נוכל לתכנן בקר מהצורה הנ"ל ולקבל פונקציית רגישות משלימה זהה למודל הייחוס הרצוי.

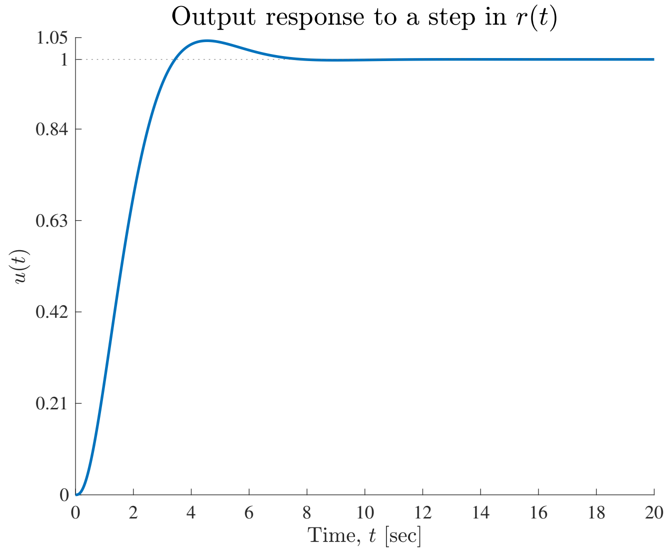
2. ראשית נשים לב כי לכל אחד מהתהליכים יש או קוטב (אפס) שמאלי ואיטי שמצטמצם, או זוג קטבים (אפסים) שמאליים ותת מרוסנים שמצטמצמים. ראיתם בהרצאה שצימצומים אלו "חוקיים" במובן שהם לא פוגעים ביציבות החוג, אך זה לא אומר שאין להם השפעה עליו. למעשה ניתן להראות כי עבור משוב יחידה [1] מתקיים הכלל הבא

(א) קוטב של התהליך שצומצם על ידי הבקר יופיע בתור **קוטב** של $T_d(s)$ ובתור **אפס** של $T_c(s)$.

(ב) אפס של התהליך שצומצם על ידי הבקר יופיע בתור **אפס** של $T_d(s)$ ובתור **קוטב** של $T_c(s)$.

[1] לפחות במערכות SISO רציונליות

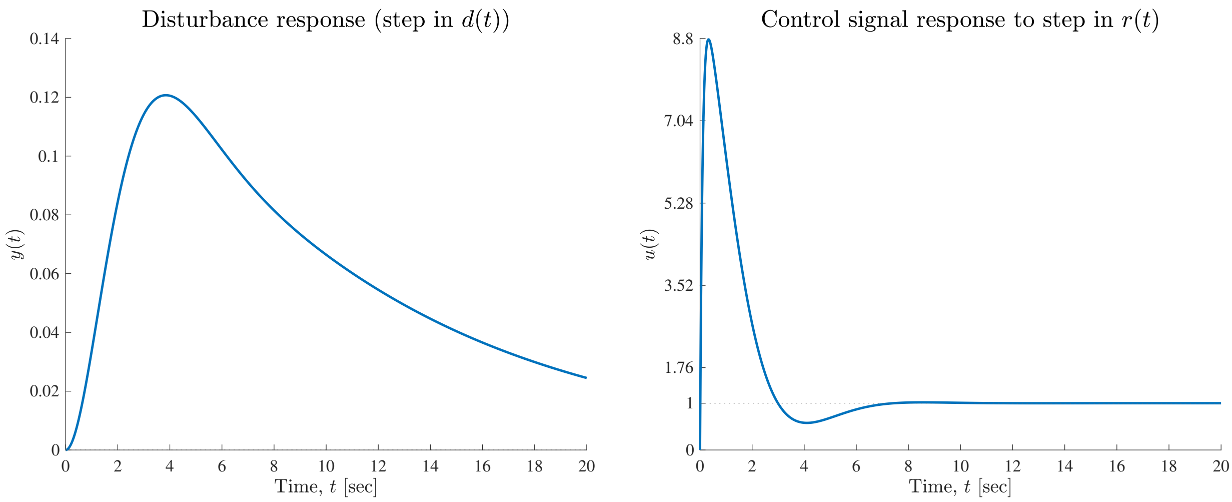
כלומר אם הקטבים (אפסים) הללו הם איטיים או לא מרוסנים, ביצועי מערכת הכוללת יפגעו בשל הצמצום, למרות שהקשר בין אות הייחוס ליציאה ישאר זהה, תגובה זו מוצגת באיור ??.



איור 1: תגובת הרגישות המשלימה של כל המערכות למדרגה

נבחן כל מקרה לגופו

(א) עבור התהליך הראשון הבקר מצמצם קוטב דומיננטי $p = -0.1$, כלומר נקודה זו תופיע כקוטב של הרגישות להפרעה ואפס של הרגישות לאות הבקרה. קוטב ממשי דומיננטי גורר תגובה איטית, כלומר תגובת המערכת להפרעת מדרגה תתכנס משמעותית לאט יותר מאשר התגובה לאות היחוס. אפס ממשי דומיננטי גורר תגובה מהירה והגבר גבוה בתדרים נמוכים (דיאגרמת בודה), כלומר אות הבקרה יגיע לפיק גבוה יחסית בתחילת התגובה.



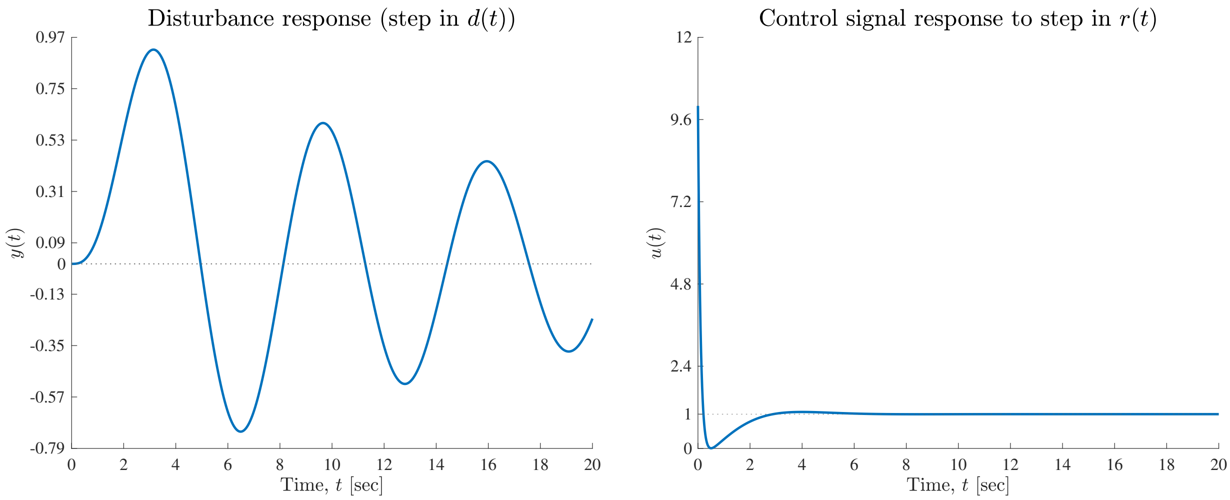
(a) תגובת ההפרעה עבור צמצום של קוטב איטי

(b) תגובת אות הבקרה עבור צמצום של קוטב איטי

איור 2: תגובות עבור התהליך הראשון

(ב) עבור התהליך השני הבקר מצמצם זוג קטבים תת מרוסנים, כלומר זוג זה יופיע כקטבים של הרגישות להפרעה ואפסים של הרגישות לאות הבקרה. במקרה זה ההשפעה העיקרית תהיה על $T_d(s)$, שכן הקטבים הלא מרוסנים יגרמו למערכת לתנוד לאורך זמן רב בתגובה להפרעה. אות הבקרה שוב מפגין אמפליטודה

גדולה בתחילת התנועה, אך הדבר נובע בעיקר מכך שהפעם הבקר המתקבל אינו strictly proper, לכן יש הגבר קבוע בתדרים גבוהים. לפי משפט הערך ההתחלתי, זה גורר אמפליטודה התחלתית גדולה בתגובה לכניסת מדרגה. חשוב לשים לב כי בניגוד למקרה של קטבים ממשיים, קטבים תת מרוסנים גורמים לפיק תהודה סביב התדר שלהם, ואפסים תת מרוסנים גורמים לאנטי תהודה. כלומר הבקר כמעט ולא יגיב עבור כניסות עם חלק הרמוני סביב תדר התהודה של התהליך (בגלל האפסים) אבל תגובת המערכת להפרעות בתדרים אלו תהיה משמעותית מאוד.

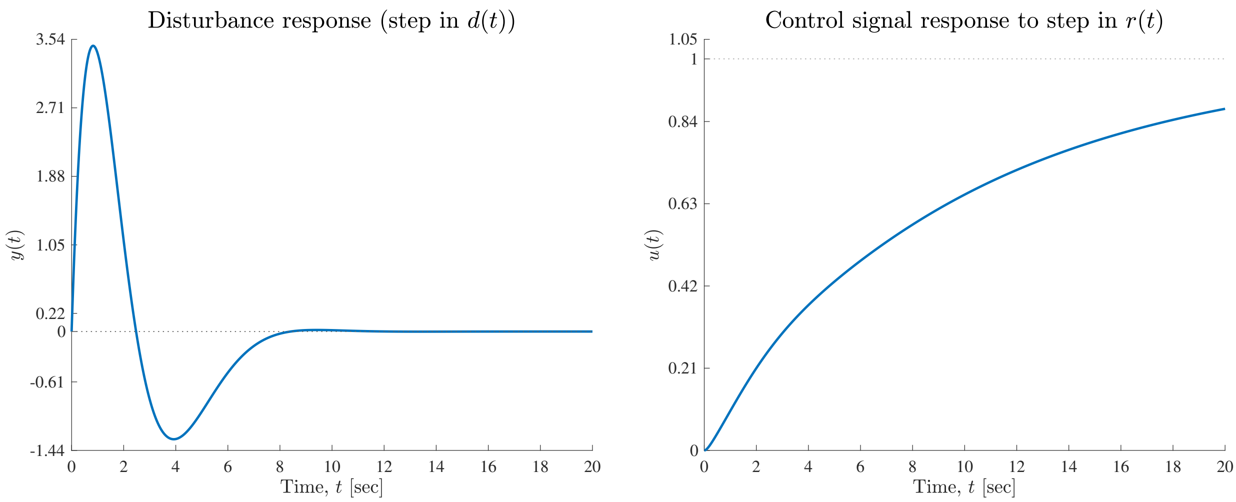


(a) תגובת ההפרעה עבור צמצום של קטבים לא מרוסנים

(b) תגובת אות הבקרה עבור צמצום של קטבים לא מרוסנים

איור 3: תגובות עבור התהליך השני

(ג) עבור התהליך השלישי מצטמצם אפס איטי של התהליך, כלומר ההתנהגות תהיה דומה לסעיף הראשון בהיפוך תפקידים של הרגישות להפרעה והרגישות לאות הבקרה. כלומר תהיה תגובה אגרסיבית יחסית להפרעה, ותגובה איטית מאוד באות הבקרה.

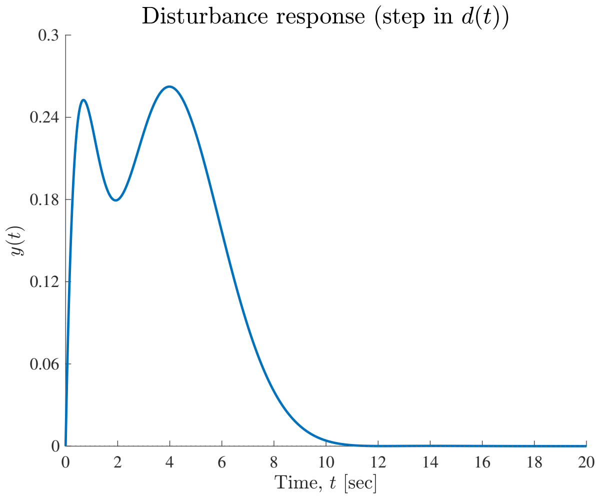


(a) תגובת ההפרעה עבור צמצום של אפס איטי

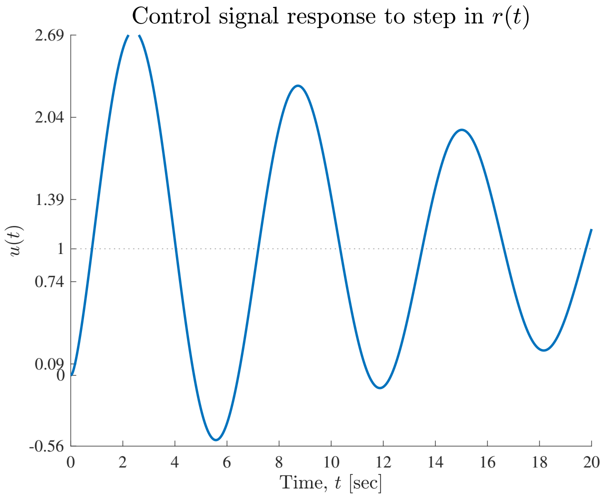
(b) תגובת אות הבקרה עבור צמצום של אפס איטי

איור 4: תגובות עבור התהליך השלישי

(ד) עבור התהליך הרביעי מצטמצמים זוג אפסים תת מרוסנים, לכן מדובר במקרה השני בהיפוך תפקידים. הפעם אות הבקרה תונד לאורך זמן רב ובאמפליטודה גבוהה בגלל התהודה הנגרמת מצמצום האפסים התת מרוסנים. כלומר הבקר לא רק מתכנס לאט, אלא גם דורש הגברים גדולים יחסית לאורך כל התנועה. לעומת זאת בפונקציית הרגישות להפרעה יש אנטי תהודה בתדר של האפסים שצומצמו, לכן יש הנחתה טובה במיוחד של הפרעות סביב תדר זה.



(a) תגובת ההפרעה עבור צמצום של אפסים לא מרוסנים



(b) תגובת אות הבקרה עבור צמצום של אפסים לא מרוסנים

איור 5: תגובות עבור התהליך הרביעי

שאלה מס' 2

נתון התהליך הגמיש

$$P(s) = \frac{-42s^2}{(s+18)(s^2+0.02s+23)}.$$

בהרצאה ראיתם כי התהליך תונד מאוד, והוא רוסן באמצעות בקר פיגור פאזה ומסנן מעבר נמוכים, כך שהבקר הכולל היה

$$C_1(s) = -0.451\frac{s+5.85}{s+1.188}.$$

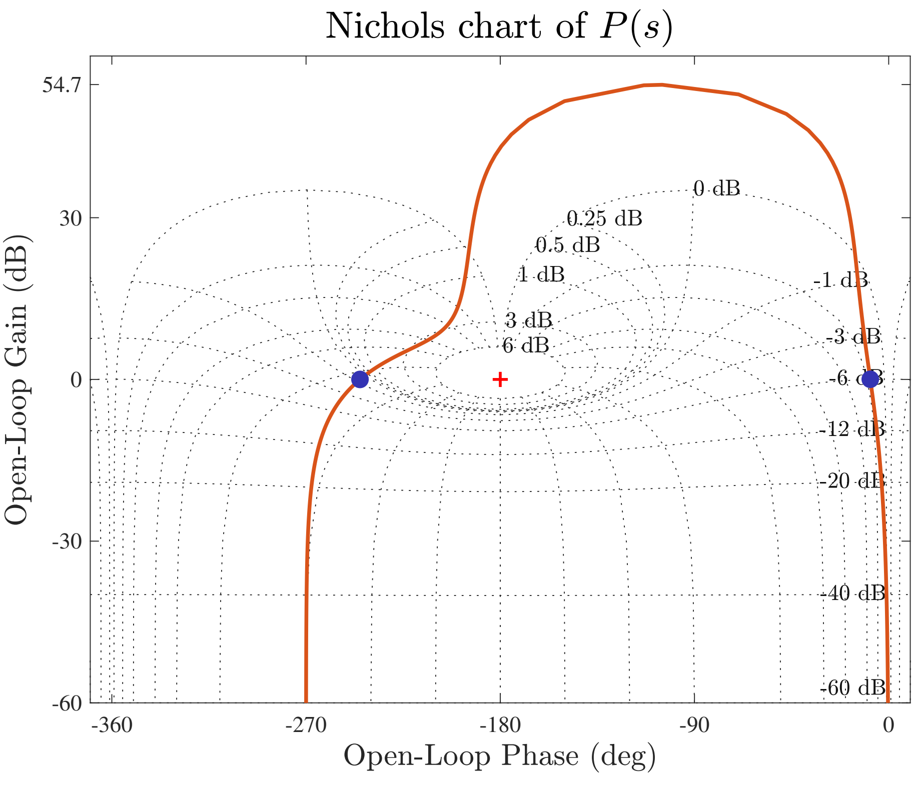
תכננו בקר המרסן את המערכת ללא שימוש בבקר קידום הופכי אלא בעזרת מסנן מעביר נמוכים מסדר ראשון

$$.C(s) = \frac{k}{\tau s+1}$$

כיצד בחירת קבוע הזמן והגבר הבקר משפיעה על תגובת המערכת?

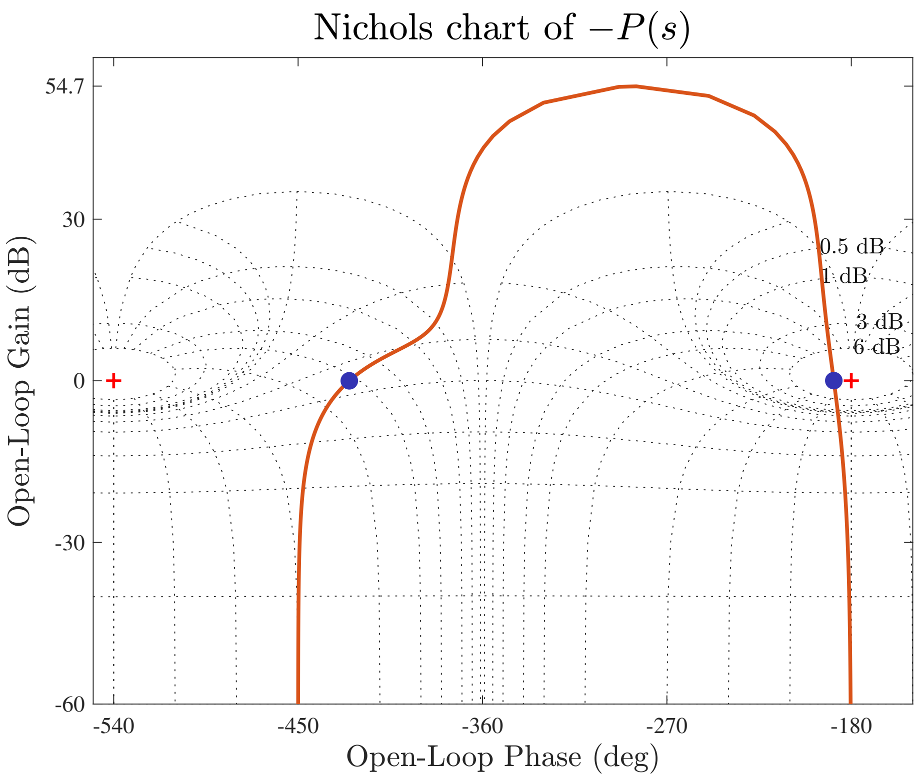
פתרון

בהרצאה ראיתם כי התהליך אינו יציב בחוג סגור עם בקר יחידה $C(s)=1$, נבחן את דיאגרמת ניקולס של התהליך המתוארת באיור ??.



איור 6: דיאגרמת ניקולס של החוג הפתוח

אם נרצה להשתמש במשוב שלילי נצטרך להוסיף קידום פאזה משמעותי (מעל 65 מעלות) בתדר המעבר הגבוה, דבר שכזכור עשוי לפגוע בביצועים ולדרוש בקר מסדר גבוה. אפשרות אחרת, כפי שראיתם בהרצאה, היא להשתמש במשוב חיובי, עבור משוב חיובי דיאגרמת ניקולס של התהליך מוסטת ב 180° , ולמעשה כבר יציבה. דיאגרמת ניקולס עבור מקרה זה מתוארת באיור ??



איור 7: דיאגרמת ניקולס של החוג הפתוח עבור משוב חיובי

בסוג כזה של תכן אנחנו רוצים "לדחוס" את העקום בין שתי הנקודות הקריטיות על מנת להרחיק אותו משתיהן - את הדחיסה הזו ניתן להשיג באמצעות **פיגור** פאזה. פיגור פאזה כזה ניתן להשיג גם באמצעות מסנן מעביר נמוכים פשוט, שגם ינחית את ההגבר בתדרים גבוהים באופן טבעי (roll-off), בניגוד לבקר שהודגם בהרצאה. מסנן מסדר ראשון גורם לפיגור פאזה של עד -90°, כאשר פיגור הפאזה מתחיל לפני שמתחילה הנחתה בהגבר, נוכל להשתמש בתכונות הללו לטובתנו. אם נבחר קבוע זמן מספיק קטן, נוכל להרחיק משמעותית את תדירות המעבר הראשונה מהנקודה הקריטית, ולהשתמש בהנחתת ההגבר בתדרים גבוהים יותר כדי לא לפגוע יותר על המידה בתדירות המעבר הגבוהה יותר. על מנת לתכנן את הבקר, ראשית נבחן את פיגור הפאזה של מסנן מעביר נמוכים מסדר ראשון

$$\arg C_{lpf}(j\omega) = \arg \frac{k}{\tau j\omega + 1} = -\arctan(\tau\omega).$$

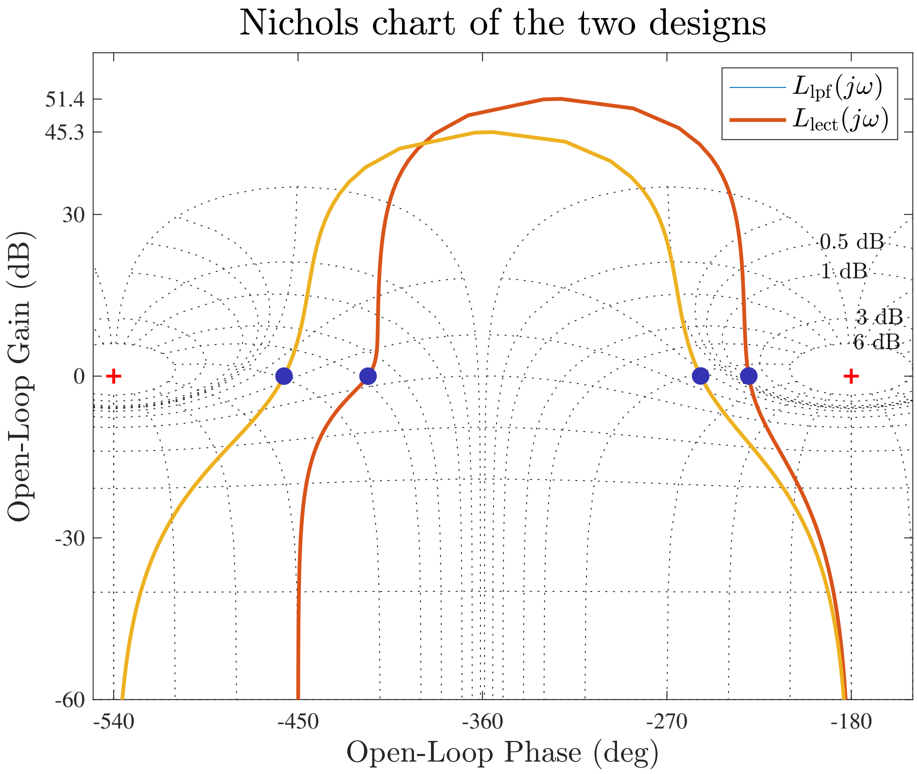
אנו רוצים למקם את תדר התהודה של המערכת בקירוב במרחק שווה משתי הנקודות הקריטיות, אם נבחר לדוגמא את קבוע הזמן בתור $\tau = \frac{1}{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{23}}$ נקבל בתדר התהודה פיגור פאזה של -45°. מהתבוננות בעקום ניקולס אנו רואים כי כדי להביא את תדר התהודה למרחק שווה משתי הנקודות הקריטיות צריך להוסיף כמעט 90° מעלות של פיגור, כלומר הבחירה לעיל לא מספיקה לנו. חשוב לזכור כי עבור פיגור כל כך גדול נקבל גם הנחתה בהגבר החוג הפתוח כולו, ובפרט סביב תדר התהודה. כזכור מההרצאה, כאשר אנו רוצים לרסן תנודות במערכת גמישה אנחנו צריכים שבסביבת תדרי התהודה של התהליך הגבר הבקר לא יהיה נמוך מידי שכן בסביבת תדרים אלו מתקיים כי

$$|T_d(j\omega)| = \left|\frac{1}{P^{-1}(j\omega) + C(j\omega)}\right| \approx \left|\frac{1}{C(j\omega)}\right|,$$

כלומר אם הגבר הבקר יהיה נמוך מדי, החוג יהיה רגיש להפרעות בתדרים אלו. ננסה לבחון דרך ביניים, כלומר להוסיף פיגור גדול יחסית, לדוגמא של $\approx -70^\circ$, סביב תדר התהודה, ולהשתמש בהגבר הסטטי של הבקר כפרמטר כוונון על מנת לשפר ביצועים. בחירה של $\tau = \frac{1}{\sqrt{3}}$ מניבה את הפיגור הרצוי, וכעת עולה השאלה כיצד לבחור את ההגבר הסטטי. במבוא לבקרה השתמשנו בהגבר הבקר על מנת לקבוע תדר חציה רצוי, ננסה לעשות את אותו הדבר במקרה הנתון ונבחר את הגבר הבקר בכדי שישמר את תדר החציה של התהליך. כלומר נבחר את הגבר הבקר בתור

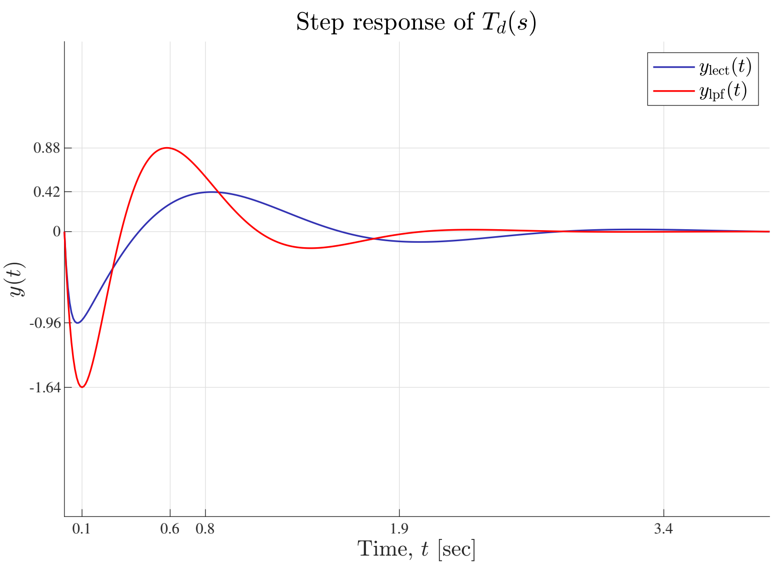
$$\left|\frac{k}{\tau\omega_c \mathrm{j} + 1}\right| = 1 \implies |k| \approx 1.823.$$

נתבונן בדיאגרמת ניקולס של החוג הפתוח עם המסנן לעומת החוג הפתוח עם הבקר שתוכנן בהרצאה.



איור 8: דיאגרמת ניקולס של החוג הפתוח עם מסנן מעביר נמוכים והבקר שתוכנן בהרצאה

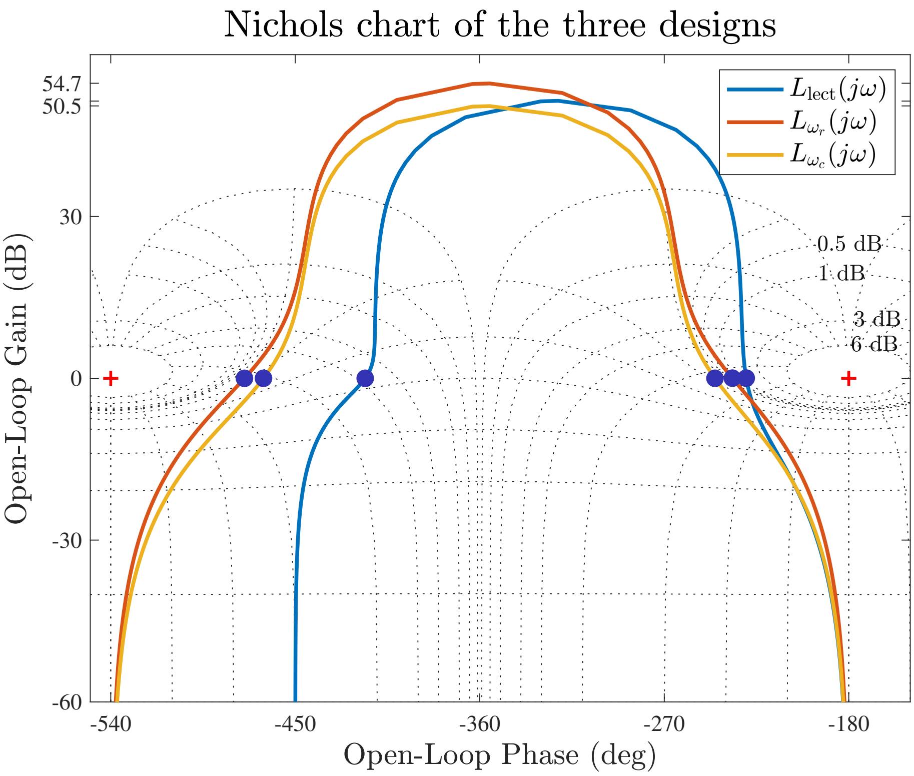
כפי שניתן לראות, החוג עם המסנן (בכתום) ממורכז יחסית בין שתי הנקודות הקריטיות, אך כצפוי ישנה ירידה קולקטיבית בהגבר. כתוצאה מכך תדר החציה הראשון גדל והשני קטן, והגבר החוג כולו סביב תדר התהודה קטן ב $\approx 6[\text{dB}]$, כלומר נצפה לתגובה מהירה ותונדת יותר בהפרעה, כפי שניתן לראות באיור ??.



איור 9: תגובת שני החוגים למדרגה בהפרעה

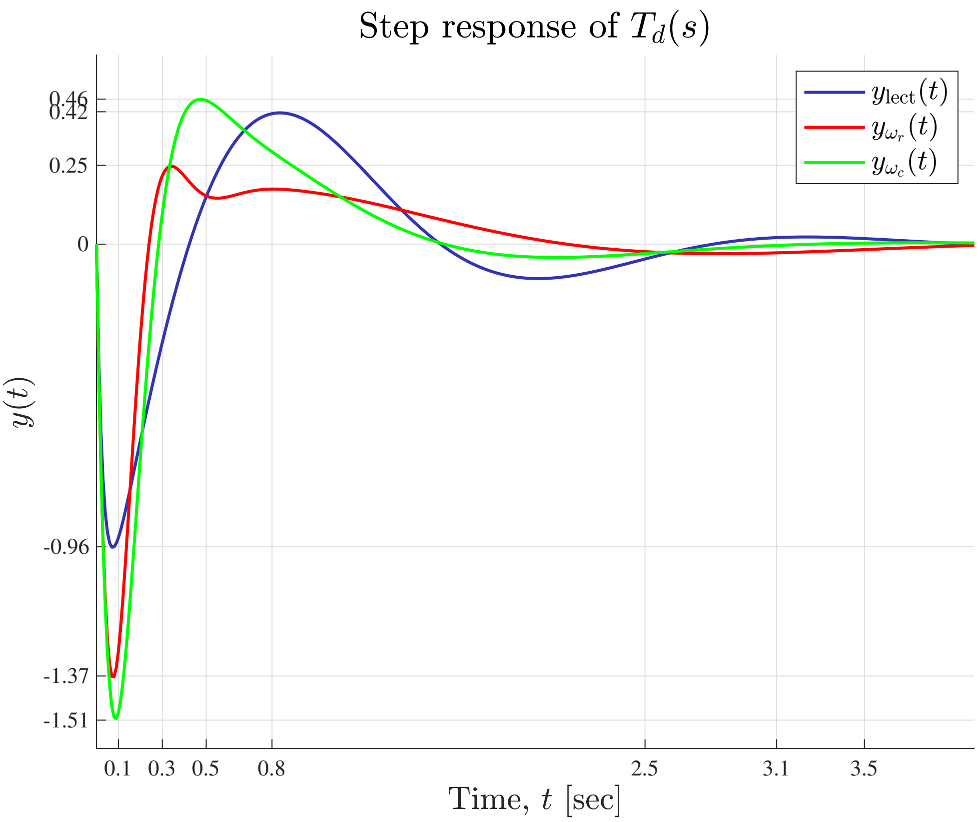
שימוש בהגבר סטטי מאפשר לנו לקבוע את הגבר החוג בתדר מסויים, שתי אפשרויות טבעיות הן לשמור את תדר

החציה הראשון של התהליך כפי שעשינו, או לחילופין לשמר את הגבר התהליך בתדר התהודה. השוואה בין החוג שתוכנן בהרצאה, ושני החוגים מהתרגול ניתן לראות באיור ??.



איור 10: עקומי ניקולס עבור שלושת החוגים

שני החוגים שתוכננו בעזרת מסנן מעביר נמוכים בלבד ממורכזים טוב יותר בין שתי הנקודות הקריטיות. בתכן הראשון שמרנו את הגבר התהליך בתדר התהודה ובהתאמה תדר החציה הראשון קטן, לכן נצפה שתגובת המערכת להפרעת מדרגה תהיה איטית יותר ופחות תונדת. לעומת זאת בתכן השני שמרנו את תדירות המעבר ושילמנו על כך בהגבר נמוך יותר בתדר התהודה, לכן נצפה כי התגובה להפרעה תתכנס מהר יותר אך בהתאמה תתנוד יותר. תגובות שלושת התיכנונים להפרעת מדרגה מוצגות באיור ??, ומאששות את האנליזה לעיל, כאשר תגובת הבקר מההרצאה היא האיטית ביותר, אך גם תונדת בתדר האיטי ביותר.



איור 11: תגובת שלושת החוגים להפרעת מדרגה

תרגיל: נסו למצוא בקר מסדר ראשון בעל ביצועים טובים יותר. עד כמה אתם יכולים לשפר את התגובה בעזרת בקר מסדר שני?

שאלה מס' 3

תזכורת:

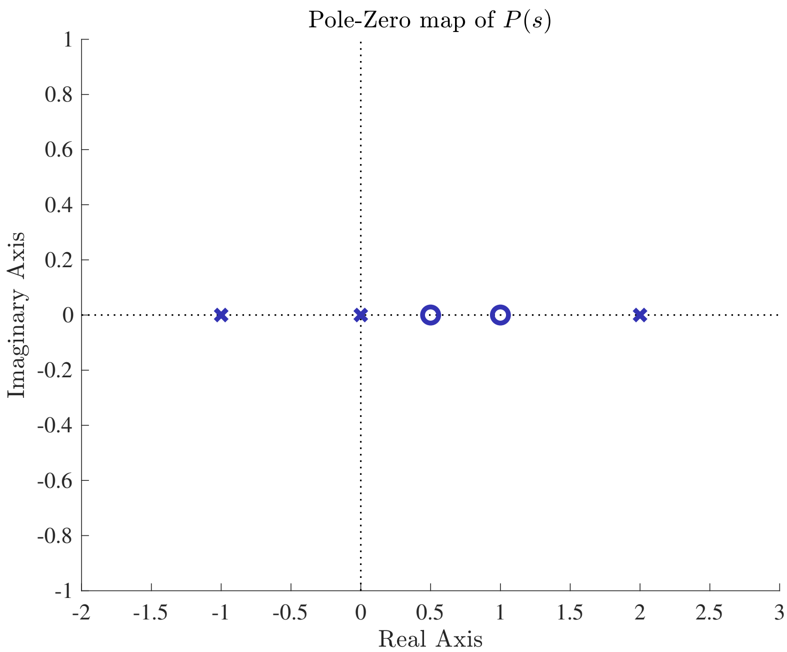
1. ניתן לייצב תהליך באמצעות בקר יציב (ייצוב חזק) אם ורק אם יש לו מספר זוגי של קטבים ממשיים בין כל זוג אפסים ממשיים בחצי המישור הימני הסגור, כולל בפלוס אינסוף.
2. מספר האפסים הממשיים בפלוס אינסוף שווה לדרגה היחסית של התהליך.

האם ניתן לייצב את התהליכים הבאים בחוג סגור באמצעות בקר יציב?

1. $P(s) = \dfrac{(s-1)(s-0.5)}{s(s-2)(s+1)}$
2. $P(s) = \dfrac{(s-1)(s-0.5)}{s(s-2)}$
3. $P(s) = \dfrac{(s-1)(s-0.5)}{s(s+1)(s-2)(s-3)}$
4. $P(s) = \dfrac{1}{s-1}, \quad \dfrac{s+2}{s-1}, \quad \dfrac{s^2-s+1}{s^2+s+1}$
5. **(תרגיל למחשבה)** $P(s) = \dfrac{s-2}{(s^2+s+1)(s+3)}$

פתרון

1. נתבונן במפת הקטבים והאפסים של התהליך



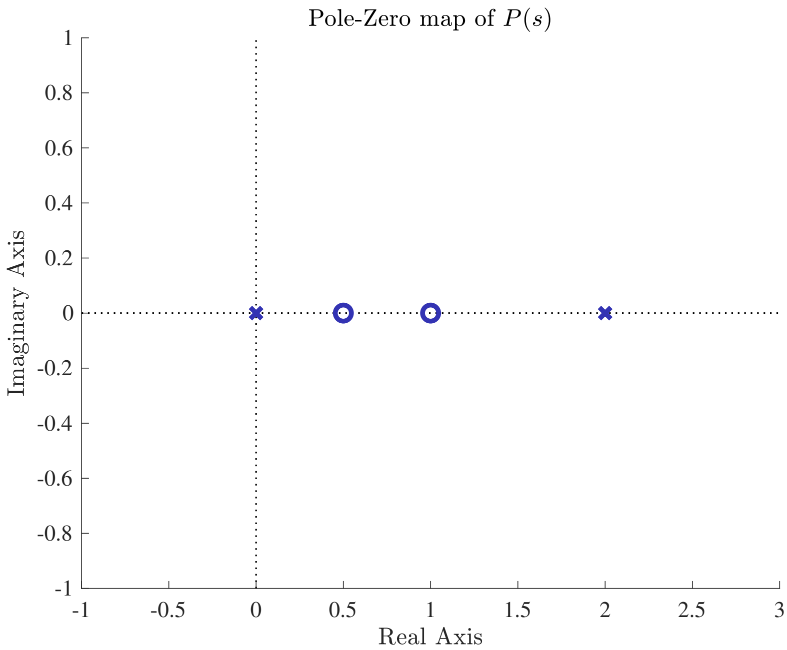
איור 12: מפת הקטבים של התהליך

הדרגה היחסית של התהליך היא

$$\deg\left(D_p(s)\right) - \deg\left(N_p(s)\right) = 3 - 2 = 1$$

לכן יש לו אפס ממשי אחד בפלוס אינסוף. בין האפסים ב 0.5 ו־ 1 יש אפס קטבים, כלומר מספר זוגי, אך בין האפסים ב 1 ובאינסוף יש רק קוטב יחיד, לכן התהליך אינו ניתן לייצוב חזק.

2. נתבונן במפת הקטבים והאפסים של התהליך



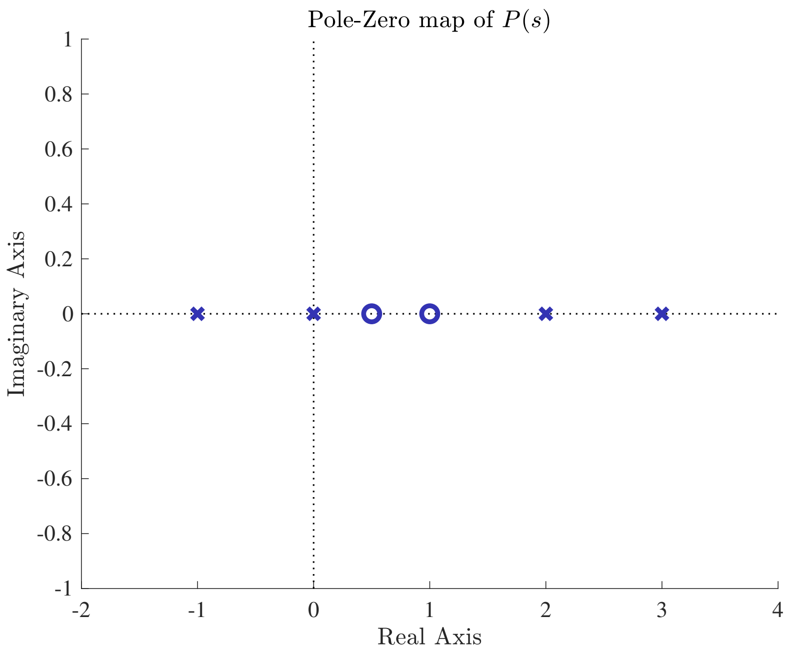
איור 13: מפת הקטבים של התהליך

הדרגה היחסית של התהליך היא

$$\deg\left(D_p(s)\right)-\deg\left(N_p(s)\right)=2-2=0$$

לכן אין לו אפסים ממשיים בפלוס אינסוף. בין האפסים ב 0.5 ו־ 1 יש אפס קטבים, כלומר מספר זוגי, ואין עוד אפסים בחצי המישור הימני לכן התהליך ניתן לייצוב חזק.

3. נתבונן במפת הקטבים והאפסים של התהליך



איור 14: מפת הקטבים של התהליך

הדרגה היחסית של התהליך היא

$$\deg(D_p(s)) - \deg(N_p(s)) = 4 - 2 = 2$$

לכן יש לו שני אפסים ממשיים בפלוס אינסוף. בין האפסים ב 0.5 ו־ 1 יש אפס קטבים, כלומר מספר זוגי, ובין האפסים ב 1 ובפלוס אינסוף יש שני קטבים, לכן התהליך ניתן לייצוב חזק.

4. היות ולתהליכים הללו אין אפסים ממשיים בחצי המישור הימני, שלושתם ניתנים לייצוב חזק.

5. נשים לב כי במקרה הזה אין צורך לבדוק את מפת הקטבים, ניתן לדעת מייד כי התהליך ניתן לייצוב חזק. מדוע? קל לראות כי התהליך עצמו יציב, לכן עבור הבקר $C(s) = 0$ נקבל את הפולינום האופייני

$$\chi_{cl}(s) = D_P(s)D_C(s) + N_P(s)N_C(s) = D_P(s)$$

כלומר הפולינום האופייני הוא בדיוק קטבי התהליך. כלומר עבור תהליך יציב, בהכרח קיים בקר יציב המייצב אותו בחוג סגור, שכן $C(s) = 0$ יציב.