תורת הבקרה (035188)

סמסטר אביב תשפ"ג

תירגול מס' 2

שאלה מס' 1

נתון התהליך $P(s)=1/s^2$ כמו בתרגול הראשון.

1. תכננו בקר המקיים את הדרישות הבאות

   (א) שגיאת מצב מתמיד אפס להפרעת מדרגה.

   (ב) עודף פאזה $\mu_\phi \geq 35^\circ$.

   (ג) הבקר סטריקטלי פרופר.

2. כפי שראיתם בהרצאה, אות ייחוס מדרגה אינו פיזיקלי ברוב המקרים. תכננו S-curve שיהווה אות ייחוס המגיע לערך סופי $y_\mathrm{f} > 0$, ומקיים את החסמים $|\dot{r}(t)| \leq v_\mathrm{max}$ ו־ $|\ddot{r}(t)| \leq a_\mathrm{max}$. הניחו כי $y_\mathrm{f} > \frac{v_\mathrm{max}^2}{a_\mathrm{max}}$.

3. סמלצו את תגובות החוג הסגור לאות הייחוס שתיכננתם עבור

$$r_\mathrm{f}=5, \quad v_\mathrm{max}=2, \quad a_\mathrm{max}=1$$

   והשוו לתגובות המתקבלות כתגובה למדרגה טהורה בגובה r_f.

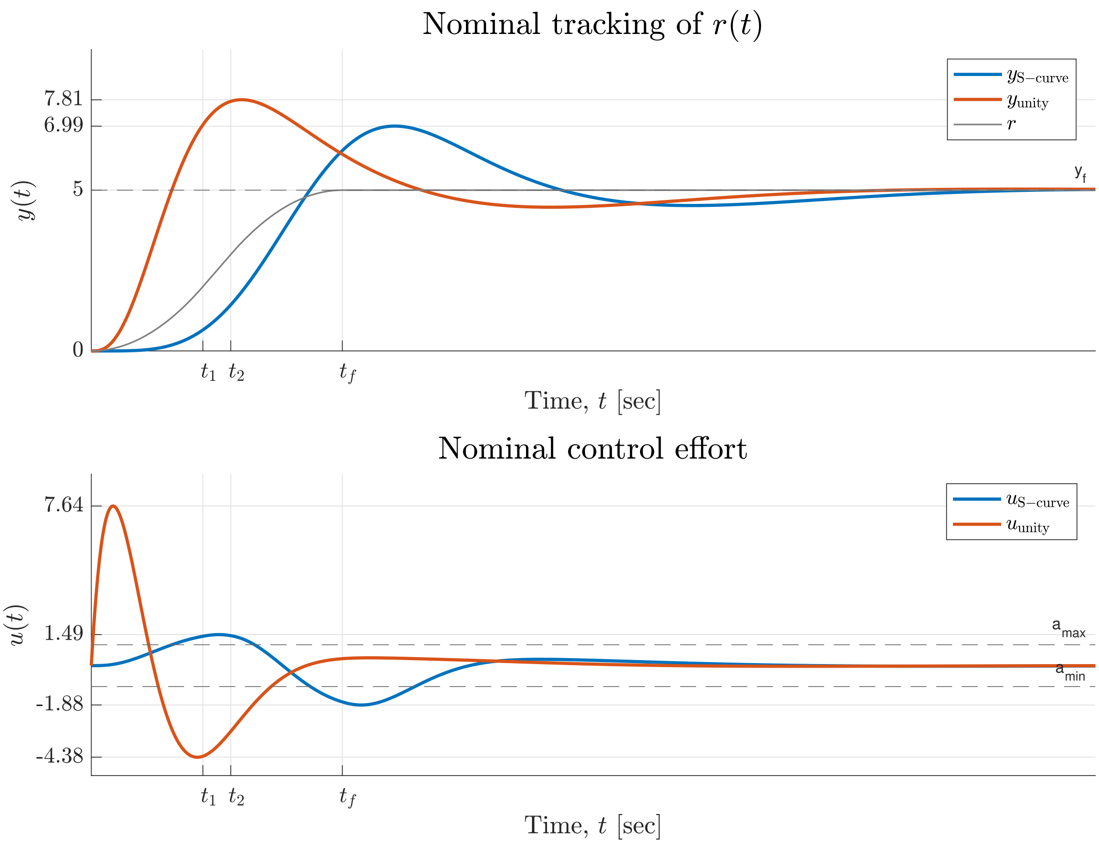
4. תכננו חוג בארכיטקטורת שתי דרגות חופש המבטיח עקיבה מושלמת אחר אות הייחוס שתכננתם.

פתרון

1. נשים לב כי מדובר באותו תהליך עם אותן הדרישות מהתרגול הראשון, וראינו כי ניתן למלא אותן בעזרת אינטגרטור ובקר קידום מסדר שני. עבור בחירה של $\zeta = 1/\sqrt{2}$ מתקבל הבקר הבא
$$C(s) = \frac{9.2725(s^2 + 0.4644s + 0.1078)}{s(s^2 + 4.306s + 9.272)}$$
אשר מקיים את כל הדרישות.

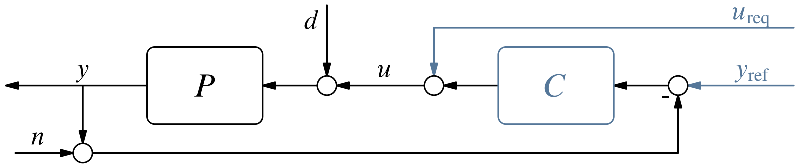
2. בהרצאה למדתם אסטרטגיה "טבעית" לתכנון אותות יחוס תחת אילוצי מהירות ותאוצה בעזרת אינטגרציה של פולינומים. מתחילים בתאוצה המקסימלית, כלומר תנועה פרבולית, עד אשר המהירות מגיעה לערך המקסימלי המותר. כאשר מגיעים לערך המקסימלי המותר, עוברים למהירות קבועה ומקסימלית ללא תאוצה, כלומר לתנועה לינארית. מטעמי סימטריה, כאשר אנחנו במרחק שקול מהסוף למרחק בו הגענו למהירות המקסימלית, מתחילים להאט בתאוטה מקסימלית. אסטרטגיה זו מבטיחה שנגיע במהירות אפס לנקודה הרצויה. בצורה פרמטרית, אות הייחוס יהיה
$$r(t) = \begin{cases} \frac{a_{\max}}{2}t^2, & 0 < t < t_1 \\ \frac{v_{\max}^2}{2a_{\max}} + v_{\max}(t - t_1), & t_1 < t < t_2 \\ y_{\mathrm{f}} - \frac{a_{\max}}{2}(t - t_f)^2, & t_2 < t < t_f \end{cases} \tag{1}$$
כאשר זמן החילוף הראשון $t_1 = \frac{v_{\max}}{a_{\max}}$, השני $t_2 = \frac{y_{\mathrm{f}}}{v_{\max}}$, ומטעמי סימטריה $t_f = t_1 + t_2$.. חשוב לשים לב כי אסטרטגיה זו בדרך כלל **לא** מבטיחה הגעה לנקודת היעד בזמן הקצר ביותר, ואיכות העקיבה תלויה גם בבקר שתוכנן. היתרון המרכזי של אסטרטגיה זו הוא שניתן לתכנן את אות הייחוס ללא תלות בדינמיקת התהליך עצמו או בבקר. החיסרון הוא שאות הייחוס הזה לא מבטיח שהחוג יקיים את האילוצים הנתונים.

3. בהרצאה ראיתם שדרך נוחה לממש אותות כאלו היא לייצר מערכת עזר, $T_r(s)$, שתגובת המדרגה שלה היא בדיוק האות הרצוי. ניתן לעשות זאת במספר דרכים. הדרך ה "ישירה", היא ביצוע התמרת לפלס ישירות עבור אות היחוס שבנינו. בצורה זו נקבל תמסורת מורכבת מאוד שעשויה להיות קשה למימוש ולגרור בעיות נומריות (פיתוח מקוצר בדרך זו נמצא בנספח). דרך פשוטה יותר היא להשתמש בתכונות מוכרות של התמרת לפלס, בשילוב עם הדרך בה בנינו את אות הייחוס. את אות הייחוס הגדרנו באמצעות חסמים על התאוצה והמהירות, כלומר את התאוצה המייצרת את $r(t)$ ניתן להציג בצורה פשוטה כפונקציה קבועה למקוטעין
$$.\ddot{r}(t) = \begin{cases} a_{\max}, & 0 < t < t_1 \\ 0, & t_1 < t < t_2 \\ -a_{\max}, & t_2 < t < t_f \end{cases} \tag{2}$$
כזכור ממערכות לינאריות (ומקורסי משוואות דפירנציאליות רגילות), אות קבוע למקוטעין שכזה ניתן להציג פשוט בתור סכום של מדרגות מוזזות
$$\ddot{r}(t) = a_{\max}\left(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t - t_1) - \mathbb{1}(t - t_2) + \mathbb{1}(t - t_f)\right)$$
ואת אות הייחוס עצמו נקבל לאחר אינטגרציה כפולה של אות זה. היות ואות היחוס שלנו מתחיל ממהירות, תאוצה ומיקום אפס, אין תנאי התחלה מיוחדים לכן התמרת לפלס של אות הייחוס נתונה בפשטות על ידי
$$.R(s) = \left(1 - \mathrm{e}^{-t_1 s} - \mathrm{e}^{-t_2 s} + \mathrm{e}^{-t_f s}\right)\frac{a_{\max}}{s^2} \tag{3}$$
כעת על מנת שאות זה יהיה תגובת המדרגה של מערכת כלשהי, פשוט נגדיר
$$T_r(s) = R(s)\frac{s}{y_{\mathrm{f}}} \tag{4}$$
ואכן ניתן לוודא כי אם נכניס מדרגה בגובה y_{f} ל $T_r(s)$ נקבל בדיוק את אות הייחוס הדרוש. תגובת המערכת ומאמץ הבקרה ביחס לאות הייחוס שתוכנן לעומת מדרגה בגובה הרצוי מוצגים באיור 1, כאשר החסמים והערך הסופי הרצויים מסומנים בקווים מקווקים. כפי שניתן לראות, חוג הבקרה שתכננו לא מצליח לעמוד בחסמים על אות הבקרה או לעקוב במדוייק אחרי אות הייחוס. יחד עם זאת, ניתן לראות כי מאמץ הבקרה המקסימלי קטן משמעותית ביחס לתגובה למדרגה פשוטה, במקום לתנוד בתחום $[-4.38, 7.64]$ אות הבקרה תונד רק בתחום $[-1.88, 1.49]$, שיפור משמעותי אבל עדיין כמעט כפול מהערכים הרצויים. בנוסף ניתן לראות כי הערך המקסימלי של היציאה ירד ל 6.99 לעומת 7.81 בתגובה למדרגה וכי זמן ההתכנסות גדל במעט, כצפוי.



איור 1: תגובת החוג הסגור לאות הייחוס לעומת התגובה למדרגה עבור דרגת חופש אחת

4. נבחן את דיאגרמת הבלוקים הבאה, המייצגת ארכיטקטורת בקרה של שתי דרגות חופש מטרת הארכיטקטורה



איור 2: ארכיטקטורת בקרה בעלת שתי דרגות חופש

היא לשלב את היתרונות של שני העולמות - הפשטות והעקיבה הטובה של בקרה בחוג פתוח והרובסטיות ודחיית ההפרעות של בקרה בחוג סגור. על מנת לעשות זאת, ראשית עלינו לייצר אות יציאה רצוי, y_{ref}, לדוגמא האות שתכננו בסעיף הקודם. בחוג סגור עם משוב יחידה סטנדרטי אם מתקיימת עקיבה מושלמת $y = y_{\text{ref}}$ אות הבקרה מתאפס, במקרה זה החוג למעשה נפתח שכן הבקר שלנו לא מייצר שום אות. מכאן, על מנת לקיים עקיבה מושלמת לאורך זמן ולא רק במצב מתמיד, עלינו להזריק לחוג אות בקרה נוסף, u_{req}, לאחר הבקר שתכננו שיבטיח כי

$$y(s) = P(s)u_{\text{req}}(s) = y_{\text{ref}}(s).$$

תצורה זו תבטיח כי במקרה האידאלי נקבל עקיבה כמו בחוג פתוח, אך במידה ויכנסו הפרעות או רעשים, הבקר יחזור לפעול. ניתן לראות זאת מלינאריות המערכות, שכן היציאה ואות הבקרה נתונים על ידי

$$\begin{aligned} y &= Pu_{\text{req}} + PC(y_{\text{ref}} - y) + T_d d - Tn \\ u &= u_{\text{req}} + C(y_{\text{ref}} - y) - T_d d - T_c n \end{aligned}$$

שאכן מבטיחים כי במידה ואין הפרעות או רעשים, כאשר אין שגיאת עקיבה המערכת תתנהג כבחוג פתוח. כזכור תכננו כבר את אות הייחוס בסעיף הקודם, כל מה שנותר לנו הוא למצוא את u_{req} המתאים, לשם כך נשווה ישירות

$$y_{\text{ref}}(s) = P(s)u_{\text{req}}(s) \implies \left(1 - \mathrm{e}^{-t_1 s} - \mathrm{e}^{-t_2 s} + \mathrm{e}^{-t_f s}\right)\frac{a_{\max}}{s^2} = \frac{1}{s^2}u_{\text{req}}(s)$$

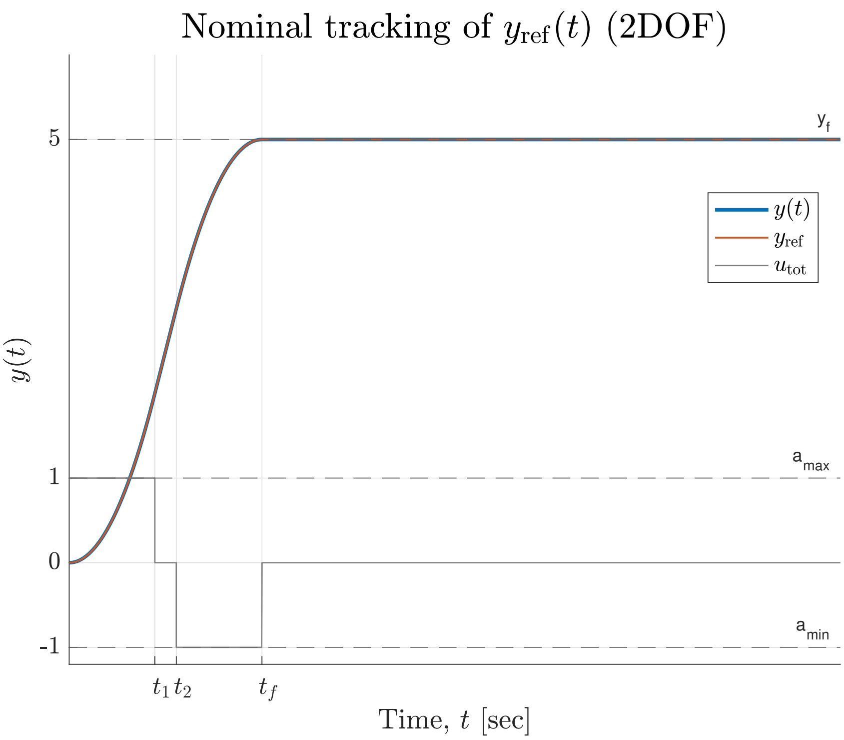
ומכאן נקבל ישירות ביטוי לאות הבקר הדרוש:

$$u_{\text{req}}(s) = \left(1 - \mathrm{e}^{-t_1 s} - \mathrm{e}^{-t_2 s} + \mathrm{e}^{-t_f s}\right)a_{\max}.$$

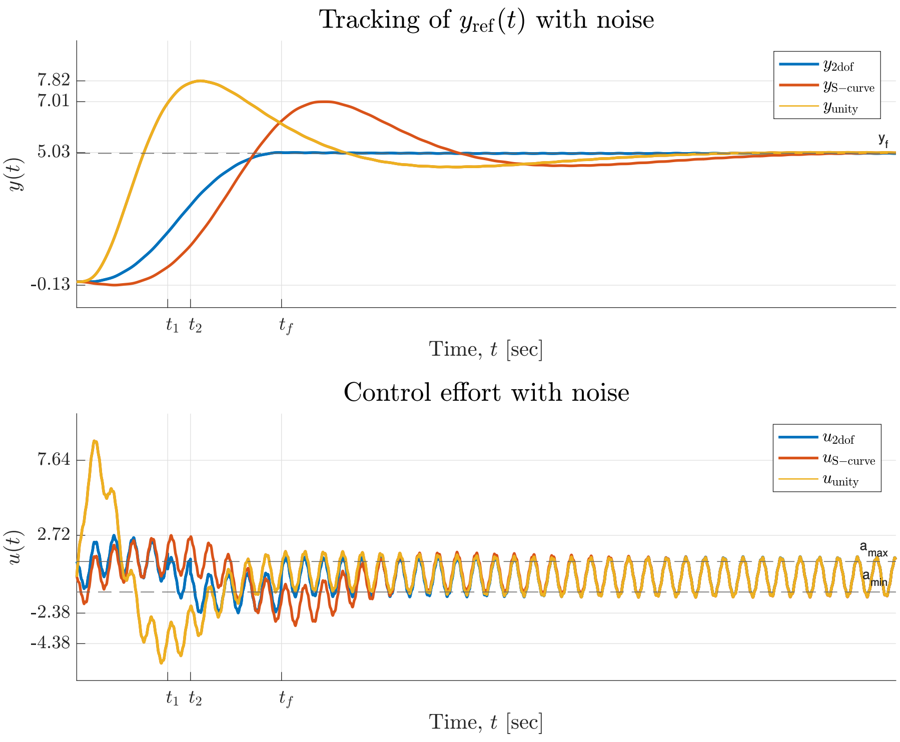
שימו לב שאת אות הבקרה בחוג הפתוח קיבלנו למעשה בעזרת היפוך תהליך ייחד עם מודל הייחוס שהגדרנו בסעיף הקודם, זו שיטה נפוצה לבקרה בחוג פתוח כאשר הבקר הוא מהצורה $C_{\text{ol}}(s) = T_r(s)/P(s)$. שימו לב שזו פונקציית תמסורת סיבתית ויציבה ללא קטבים כלל, לכן היא מהווה בקר הניתן למימוש בחוג פתוח. מעצם הבניה של ארכיטקטורת שתי דרגות חופש, בהנחת מצב נומינלי נקבל עקיבה מושלמת אחרי אות היחוס תוך שמירה על החסמים שהוגדרו ללא תלות כלל בבקר שתכננו. היות ואנחנו מייצרים את אות הייחוס, אנחנו יודעים (ולמעשה קובעים) את הנגזרות שלו לכל סדר שנרצה, לכן אם נקבל מערכת מסדר גבוה יותר נוכל לייצר אות ייחוס מסדר גבוה יותר בהתאם ולהגיע לאותם ביצועים. תגובת המערכת עבור חסמים כלשהם מוצגת באיור 3, כאשר אכן מתקבל עקיבה מושלמת כצפוי.

שימו לב שהעקיבה מושלמת והחסמים לא מופרים תחת ההנחה שהמערכת נומינלית - כלומר ללא רעשים, הפרעות או שגיאות מידול. עבור המקרה הלא נומינלי הבקר בחוג יתחיל לפעול, מה שכמובן עשוי לדרוש מהתהליך מהירות (לדוגמא) שחורגת מהחסם. באיור 4 מופיעות תגובות היציאה ואות הבקרה עבור שלושת המקרים עליהם דיברנו בנוכחות הרעש ההרמוני מהתרגול הקודם. מהאיור ניתן לראות כי במצב מתמיד שלוש התגובות מתלכדות, אך תגובות המערכת המבוקרת בעזרת שתי דרגות חופש טובות בהרבה מהאחרות, במיוחד ביחס למערכת הסטנדרטית ללא אות ייחוס מותאם. עבור שתי דרגות החופש היציאה סובלת מתגובת יתר מינימאלית בלבד, ואות הבקרה אומנם גבוה מהחסמים שלנו כתוצאה מהרעש, אך תכנון אות הייחוס מאפשר בקרה "חסכונית" גם בנוכחות רעש. בפרט, מאמץ הבקרה המקסימאלי ירד מ 7.64 ל 2.72 בלבד, ערך נמוך פי 2.8 לערך.

תרגיל הביתה: ייצרו את המערכת במאטלב/סימולינק ובדקו את התנהגותה תחת הפרעות ורעשים, נסו לתכנן בקר המניב ביצועים טובים יותר.



איור 3: תגובת המערכת הנומינלית לאות הייחוס



איור 4: תגובת שלושת החוגים בנוכחות הרעש מהתרגול הקודם

נספח - רענון התמרות לפלס

כדי לפתח את הביטויים של תגובות המדרגה בסעיף 3 צריך להכיר כלל בסיסי בהתמרות לפלס - הזזה. זהות ההזזה אומרת שבהינתן פונקציה $f(t)$ שהתמרת לפלס שלה קיימת, אזי

$$\mathcal{L}[f(t-a)\mathbb{1}(t-a)] = \mathrm{e}^{-as}F(s).$$

מכאן בעזרת שימוש בלינאריות (התמרה אינטגרלית היא אופרטור לינארי) ניתן מיד לחלץ את הזהות

$$\mathcal{L}[t\mathbb{1}(t-a)] = \mathcal{L}[(t-a)\mathbb{1}(t-a)] + \mathcal{L}[a\mathbb{1}(t-a)] = \frac{1}{s^2}\mathrm{e}^{-as} + a\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-as} = \frac{as+1}{s^2}\mathrm{e}^{-as}$$

בצורה דומה ניתן לחלץ את ההתמרות עבור פולינומים מסדר גבוה יותר, וכך לייצר את התגובות הרצויות. נפעיל את הכלל על שלושת המרכיבים של אות הייחוס, ונקבל

$$\begin{aligned}
R_1(s) &= \frac{a_{\max}}{s^3}\left(1-\mathrm{e}^{-st_1}\right) - \frac{a_{\max}(0-t_1)}{2}\frac{(0-t_1)s+2}{s^2}\mathrm{e}^{-st_1} \\
R_2(s) &= \left(\frac{v_{\max}^2}{2a_{\max}s} + \frac{v_{\max}}{s^2}\right)\left(\mathrm{e}^{-st_1}-\mathrm{e}^{-st_2}\right) + \frac{v_{\max}}{s}(t_1-t_2)\mathrm{e}^{-st_2} \\
R_3(s) &= \left(\frac{y_{\mathrm{f}}}{s} - \frac{a_{\max}}{s^3}\right)\left(\mathrm{e}^{-st_2}-\mathrm{e}^{-st_f}\right) - \frac{a_{\max}(t_2-t_f)}{2}\frac{(t_2-t_f)s+2}{s^2}\mathrm{e}^{-st_f}
\end{aligned}$$

מכאן על מנת לקבל את אות הייחוס בתור תגובת מדרגה של מערכת כלשהי נגדיר

$$T_r(s) := \Big(R_1(s)+R_2(s)+R_3(s)\Big)\frac{s}{y_{\mathrm{f}}} + \mathrm{e}^{-st_f},$$

וניתן לבדוק בסימולציה שאכן מתקבלת אותה התגובה.