תורת הבקרה (035188)

תרגול מס' 1 – עיצוב חוג בסיסי בתדר

שאלה 1

נתונה מערכת מכאנית בעלת מודל מקורב של אינטגרטור כפול $P(s) = \frac{1}{s^2}$.

1. תכננו **בקר** המקיים את הדרישות הבאות
   a. שגיאת מצב מתמיד אפס להפרעת מדרגה.
   b. עודף פאזה $\mu_\phi \geq 35°$.
   c. שגיאת מצב מתמיד קטנה מ-5% להפרעות מחזוריות בתחום התדרים $\omega \in (0,0.003)$

   בחנו את התנהגות החוג בעזרת דיאגרמת ניקולס.

2. נתון כי המערכת מושפעת על ידי רעש מדידה מחזורי מהצורה
   $n(t) = 2\,sin(15t) + sin(100t)$.
   בחנו את תגובת המערכת לרעש.

3. בכדי למזער את השפעת הרעש, נוספת הדרישה כי לבקר יהיה roll-off של 1. תכננו בקר המקיים דרישה זו יחד עם הדרישות מסעיף 1.

פתרון

1. היות והמודל שלנו מקורב לאינטגרטור כפול פיגור הפאזה שלו אחיד בכל התדרים, לכן ניתן לבצע תכן עבור תדר מעבר $\boldsymbol{\omega_c = 1}$ כדוגמא מייצגת.

- על מנת לעמוד בדרישה הראשונה נשתמש בבקר פיגור מהצורה

$$\boldsymbol{C_{lag}(s) = \frac{10s + \omega_m}{10s + \omega_m/\beta} = \frac{10s + 1}{10s}}$$

כאשר השאפנו את הפרמטר $\boldsymbol{\beta}$ לאינסוף על מנת לקבל את הפעולה האינטגרלית.

- לתהליך יש פיגור פאזה קבוע של $\boldsymbol{-180°}$ בכל תדר, בקר פיגור מוסיף פיגור פאזה של $\boldsymbol{\approx -5.7°}$ בתדר המעבר, לכן עלינו להוסיף בקר קידום של $\boldsymbol{35.7°}$. נשתמש בבקר קידום סטנדרטי מסדר ראשון:

$$\boldsymbol{C_{lead}(s) = \frac{\sqrt{\alpha}s + \omega_m}{s + \sqrt{\alpha}\omega_m} = \frac{1.95s + 1}{s + 1.95}}$$

כאשר הפרמטרים נבחרו לפי קידום הפאזה הדרוש, כפי שנלמד במבוא לבקרה.

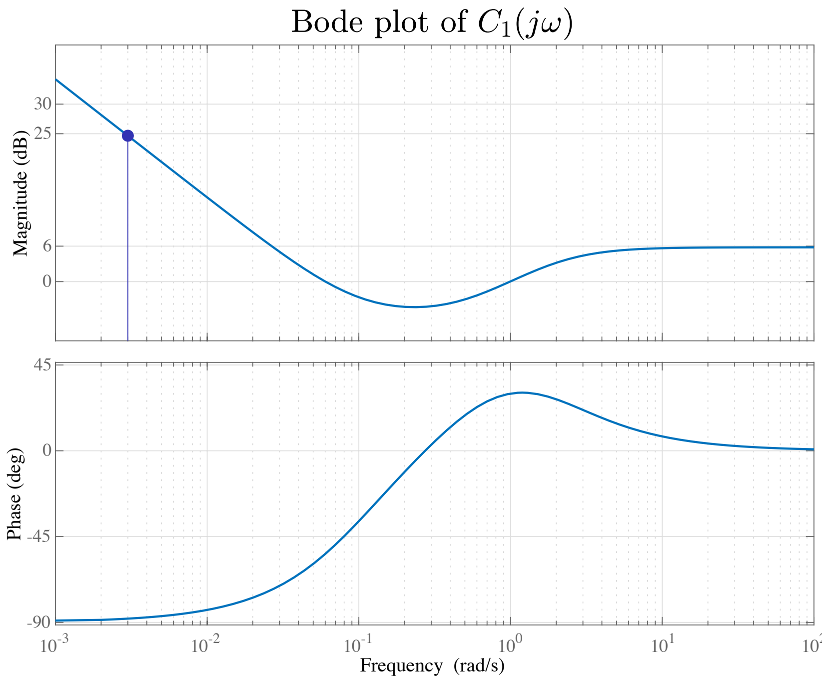
- את הדרישה השלישית נוודא לפי אנליזה של תגובת התדירות של פונקציית הרגישות להפרעה. נשים לב כי מתקיים

$$\boldsymbol{|T_d(j\omega)| = \left|\frac{P(j\omega)}{1 + P(j\omega)C(j\omega)}\right| = \left|\frac{1}{P^{-1}(j\omega) + C(j\omega)}\right|},$$

והיות ולתהליך יש הגבר גבוה מאוד בתחום התדרים הדרוש, ניתן לכתוב כי

$$\boldsymbol{|T_d(j\omega)| \approx \left|C^{-1}(j\omega)\right|}$$

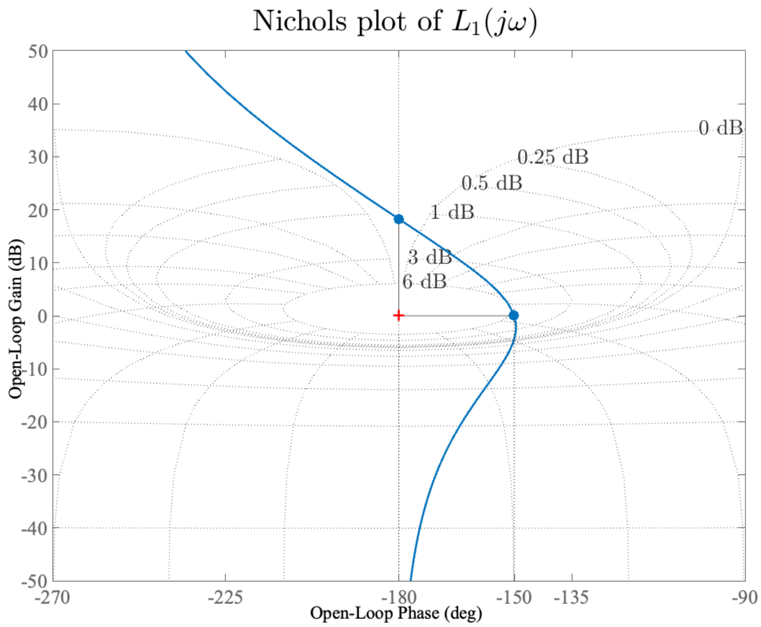
בתחום התדרים המבוקש. מדיאגרמת בודה של הבקר



ניתן לראות כי בתחום הדרוש הגבר הבקר יורד מונוטונית, ומגיע למינימום של $\mathbf{24.8[dB]}$ בתדר $\boldsymbol{\omega = 0.003}$. מכאן עבור הדרישה

$$|T_d(j\omega)| < 0.05 \Rightarrow |C(j\omega)| > 20[dB]$$

כלומר הבקר אכן עומד בדרישה. כעת נבחן את דיאגרמת ניקולס של החוג הפתוח.

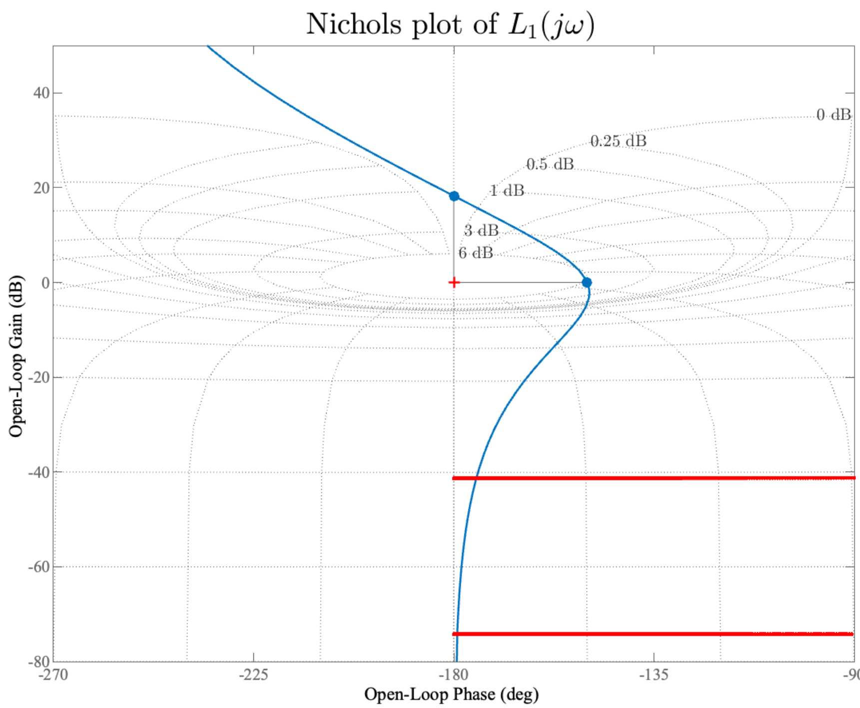


קודם כל ניתן לראות כי החוג יציב. בחוג יש שלושה אינטגרטורים המוסיפים קרן ישרה מפאזה אפס עד לתחילת העקום, כלומר חציה שלילית אחת, ולאחר מכן העקום מבצע חציה חיובית אחת. כלומר סה"כ יש אפס חציות, היות ואין קטבים לא יציבים בחוג הפתוח לפי קריטריון נייקויסט המערכת יציבה. בנוסף ניתן לראות כי עקום ניקולס חוצה את מעגל M עבור $6[dB]$, מכאן שההגבר המקסימלי של פונקציית הרגישות המשלימה יהיה בסביבות 6 דציבלים. היות ותדר החציה שלנו מתקבל קרוב לאזור בו מתקבל ההגבר המקסימלי, ניתן להסיק שתגובת המדרגה של הרגישות המשלימה תכלול תגובת יתר משמעותית.

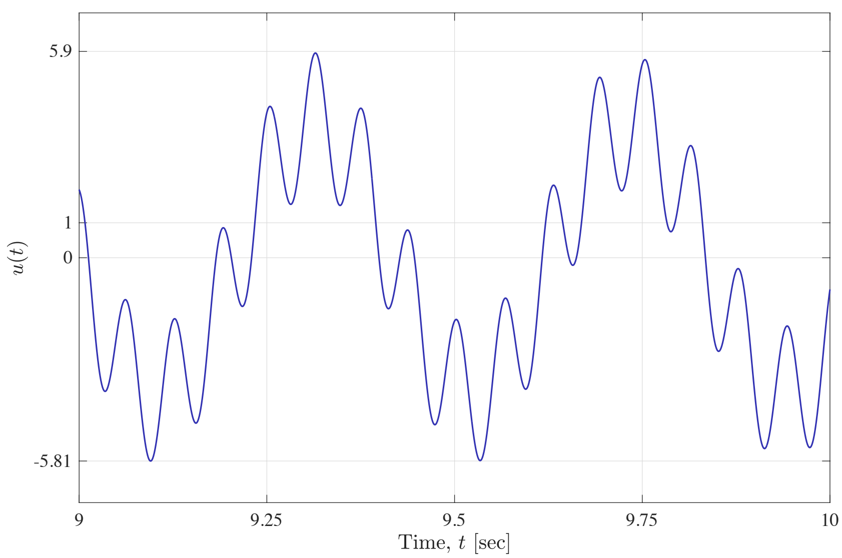
2. כעת נתון כי המערכת מושפעת על ידי רעש מדידה מחזורי המרוכז בשני תדרים

$$\boldsymbol{n(t) = 2\,sin(15t) + sin(100t)}.$$

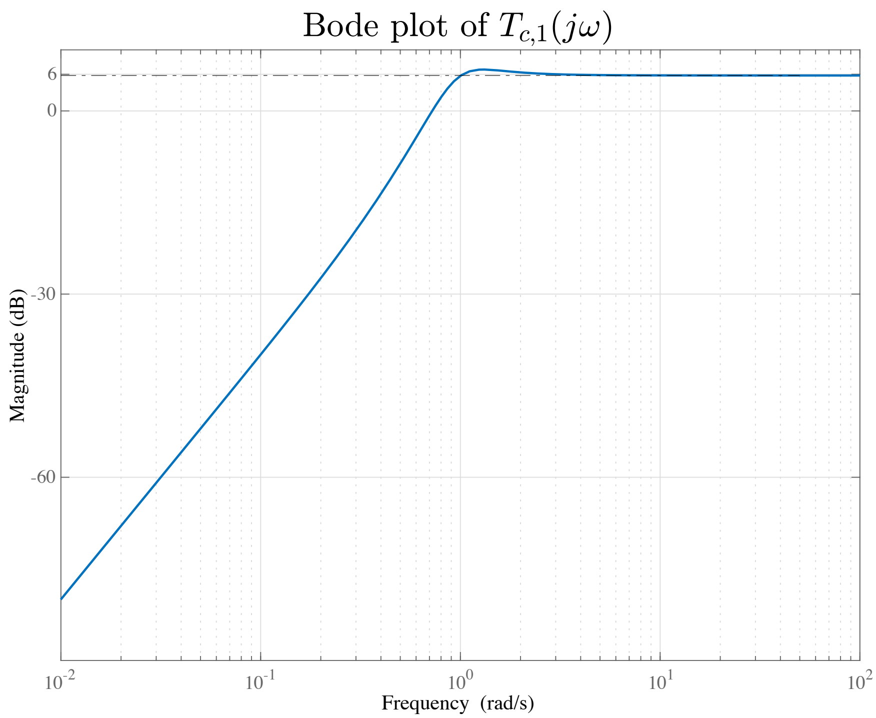
פונקציית התמסורת מרעש המדידה אל היציאה היא בדיוק פונקציית הרגישות המשלימה, לכן ניתן לנתח את ההתנהגות במצב מתמיד בעזרת גרף ניקולס של החוג הפתוח. נשרטט את גרף ניקולס של החוג הפתוח, כאשר באדום מופיעים מעגלי M עבור תדירויות ההפרעה



החוג הפתוח חותך את מעגלי M של $-41[dB]$ ו- $-74[dB]$ (בקירוב) עבור תדרי ההפרעה, כלומר היציאה כמעט שלא תושפע מהרעש הנתון. נבחן את תגובת אות הבקרה לרעש הנתון.



נשים לב כי דרוש אות בקרה בעל אמפליטודה מקסימלית כפולה מאמפליטודת הרעש! **מדוע?** נבחן את דיאגרמת בודה של פונקציית התמסורת מהרעש לאות הבקרה.



פונקציה זו אינה מסנן מעביר נמוכים, למעשה יש לה הגבר קבוע בתדרים גבוהים הנובע מבקר הקידום. פונקציית הרגישות המשלימה לעומת זאת היא מסנן מעביר נמוכים בעל roll-off של 2, לכן כמעט לא מושפעת מהרעשים (בגלל עודף הקטבים של התהליך). כלומר, הבקר שתיכננו "עובד סתם" עבור כל רעש מדידה בתדר גבוה.

3. על מנת למזער את השפעת הרעש על המערכת, נרצה בקר בעל roll-off של 1, כלומר סטריקטלי פרופר. ניתן לעשות זאת בשתי דרכים:

- לצרף מראש מסנן מעביר נמוכים בעל תדר פינה של בערך דקדה לאחר תדר המעבר הרצוי ולבצע את התכן מחדש.
- להניח מראש שבקירוב טוב האפס של בקר הפיגור יצטמצם עם הקוטב של המסנן, ופשוט לתכנן מראש בקר עם אינטגרטור רגיל ולא עם בקר פיגור.

מבחינת תכנון האפשרות השנייה פשוטה יותר, לכן נבחר בה. נבחן את הדרישות על מערכת הבקרה

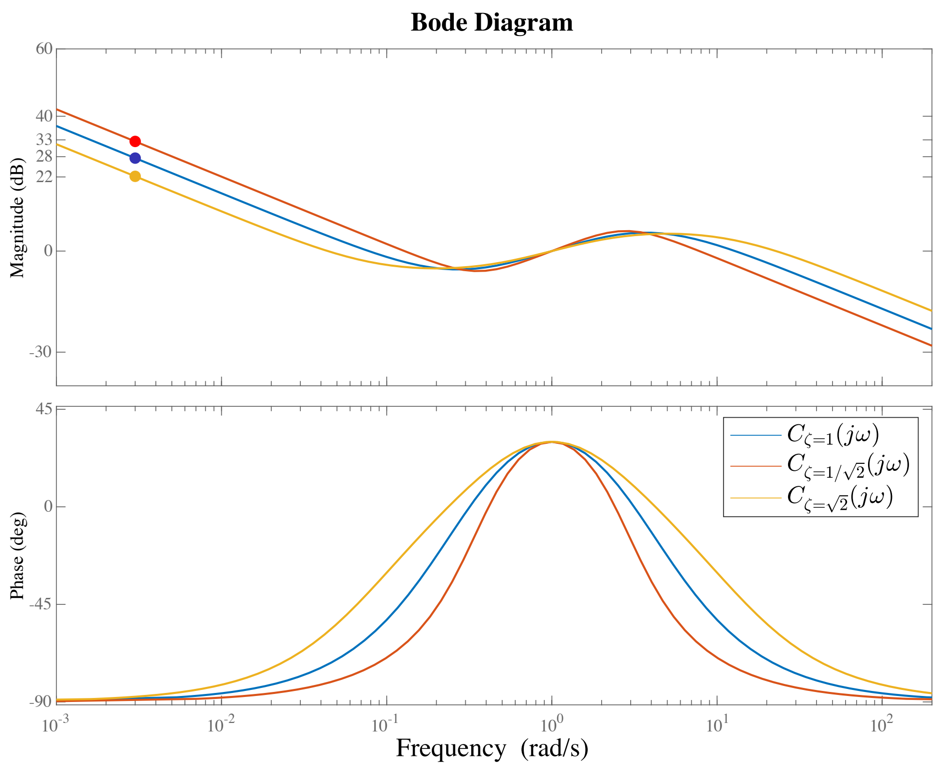
a. שגיאת אפס להפרעת מדרגה תתקבל מיידית בזכות האינטגרטור.

b. לעומת הפעם הקודמת, הפעם נאלץ להתמודד עם כל פיגור הפאזה של האינטגרטור הנוסף. כלומר עלינו לתכנן בקר קידום המקדם $\mathbf{120^\circ}$, לכך נדרש בקר קידום מסדר שני. בהרצאה למדתם את הצורה הכללית הבאה לבקר קידום מסדר שני

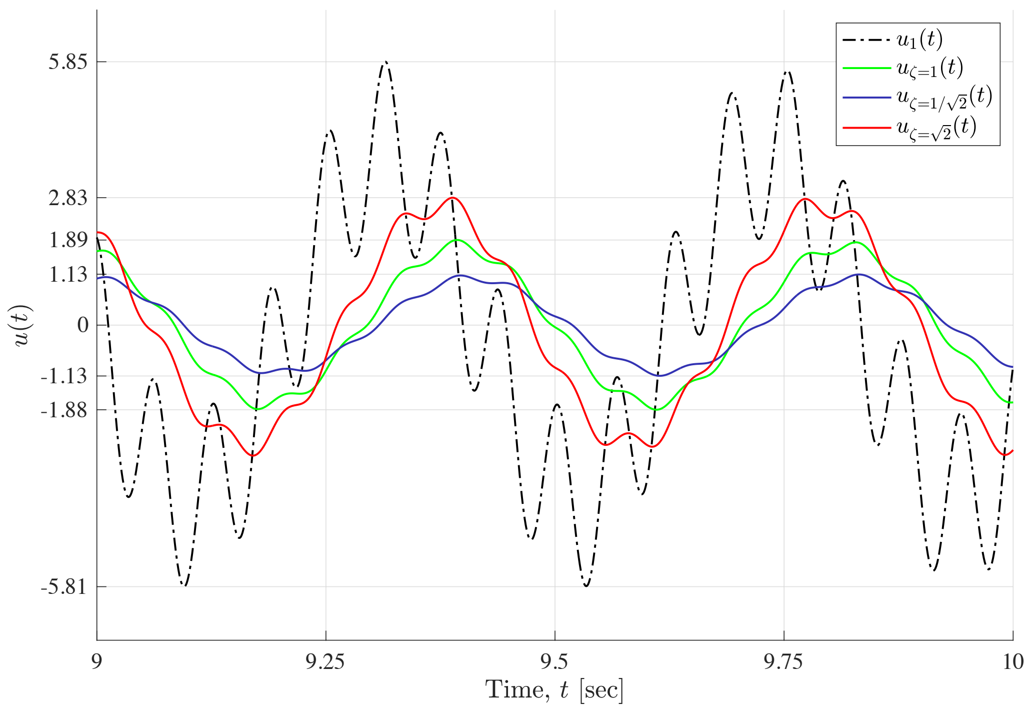
$$C_{lead}(s) = \frac{\alpha s^2 + 2\zeta\sqrt{\alpha}\omega_c s + \omega_c^2}{s^2 + 2\zeta\sqrt{\alpha}\omega_c s + \alpha\omega_c^2}, \quad \alpha > 1, \quad \zeta > 0$$

כאשר קידום הפאזה המקסימלי מתקבל בתדר ω_c כפונקציה של שני הפרמטרים האחרים. נשים לב כי עבור בחירה של $\zeta = 1$ נקבל בדיוק שני בקרי קידום מסדר ראשון באותה הנקודה, כפי שלמדנו במבוא לבקרה. יחד עם זאת, מנת הריסון נותנת לנו פרמטר כיוונון נוסף, ככל שנגדיל אותה מעל ל 1 כך תחום התדרים בו הבקר יקדם יהיה רחב יותר, וככל שנקטין אותו הוא יהיה צר יותר. בנוסף ההגבר בתדרים גבוהים ("המחיר") בדיוק פרופורציונאלי לפרמטר אלפא, כלומר בעזרת כיוונון מנת הריסון, נוכל להקטין את ההגבר בתדרים גבוהים ועדיין לקבל את אותו הקידום

נבחן את תגובת התדירות של הבקר עבור שלושה ערכים מייצגים של יחס הריסון.

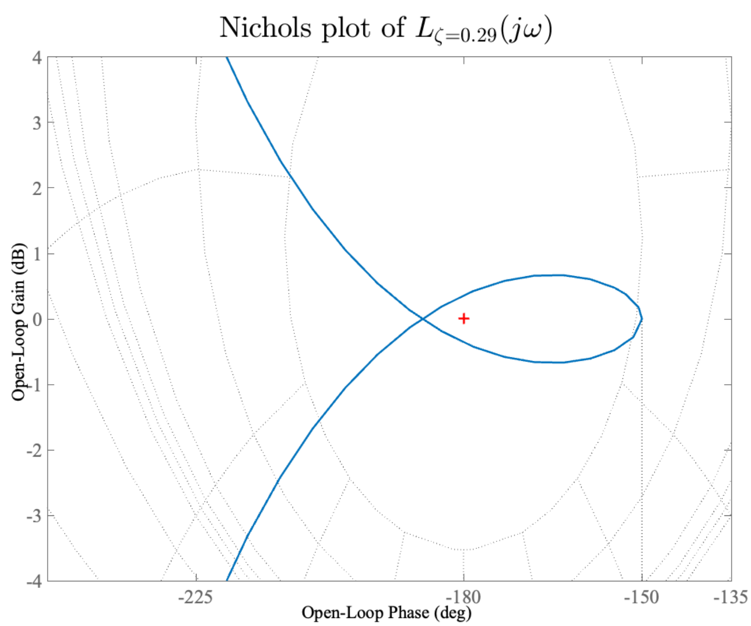


ככל שיחס הריסון גדל, הבקר מקדם בתחום תדרים רחב יותר, ובהתאמה אנו "משלמים" בהגבר קטן יותר בתדרים נמוכים וגדול יותר בתדרים גבוהים, ניתן לראות השפעה זו בתגובת אות הבקרה לרעש.



התגובה המקוקוות מציגה את התכן הראשוני עבור בקר ללא roll-off, ושלושת האחרים מציגים את שלושת ערכי הריסון עליהם דיברנו. ניתן לראות כי שני תדרי הרעש מסוננים טוב בהרבה ככל שאנו מקטינים את יחס הריסון.

הסכנה מתחילה כאשר מקטינים את יחס הריסון מתחת ל $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, במצב זה הגבר הבקר מפסיק להיות מונוטוני למרות שקידום הפאזה ממשיך להתנהג כצפוי. נבחן את דיאגרמת ניקולס של החוג הפתוח עבור בקר קידום בעל $\zeta = 0.29$.



חוסר המונוטוניות בהגבר הבקר שינה את תדר המעבר! עדיין יתקבל קידום מקסימלי עבור $\omega = 1$, אבל כעת זהו לא התדר היחיד עבור הגבר החוג הפתוח הוא יחידה. כלומר חוסר המונוטוניות הזה לא מאפשר תכנון "אלגוריתמי" המבטיח יציבות.